ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Дізнайтеся багато цікавого і несподіваного!

<u>**Задача 1**</u>**.** Обчислити A^{2021}, де $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $A^{2021}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Виконаємо початкові розрахунки:

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ A^3=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Таким чином,

$$A^{2021}=A\cdot A^{2020}=A\cdot\left(A^4\right)^{505}=A\cdot E^{505}=A\cdot E=A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

> **Коментар.** Результат досягається знаходженням певної закономірності при послідовному піднесенні матриці А до степені 2, 3 тощо.

<u>**Задача 2**</u>. Знайти матрицю X, яка задовольняє рівнянню $\left(2X^2\right)^{-1}=2X^{-1}$.

Відповідь: $\frac{1}{4}E$.

Розв'язання.

З умови задачі та означення оберненої матриці випливає, що

$$\left(2X^{-1}\right)\left(2X^2\right)=E,$$

де E – одинична матриця того ж самого порядку, що й матриця X.

Користуючись законами матричної алгебри, перетворимо ліву частину отриманої рівності:

$$4\left(X^{-1}X^2\right)=E \Leftrightarrow \left(X^{-1}X\right)X=\frac{1}{4}E \Leftrightarrow X=\frac{1}{4}E.$$

> **Коментар.** Основна ідея розв'язання полягає у використанні рівності $X^{-1}X=E$.

<u>**Задача 3.**</u> Нехай $A=\left(a_{ij}\right)$ і $B=\left(b_{ij}\right)$– квадратні матриці n-го порядку, $b_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}a_{ij}$ ($i, j=1,2,...,n$). Як пов'язані визначники цих матриць?

Відповідь: $\det B = \det A$.

Розв'язання.

Оскільки $b_{ij} = (-1)^i (-1)^j a_{ij}$, то множник $(-1)^i$ можна розглядати як спільний множник i-го рядка, а множник $(-1)^j$ - як спільний множник j-го стовпця ($i, j = 1, 2, ..., n$), звідки маємо:

$$\det B = (-1)^1 \cdot (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^2 \cdot \ldots \cdot (-1)^n \cdot (-1)^n \det A = \det A.$$

> **Коментар.** Для розв'язання задачі потрібно було скористатися властивостями визначників.