ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Дізнайтеся багато цікавого і несподіваного!

<u>Задача 1.</u> Дано три попарно неколінеарних вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ таких, що вектор $\overline{a}+\overline{b}$ колінеарний вектору $\overline{c}$, а вектор $\overline{b}+\overline{c}$ колінеарний вектору $\overline{a}$. Знайти довжину вектору $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$.

Відповідь: 0.

Розв'язання.

За умовою, $\overline{a}+\overline{b}=\alpha\overline{c}$, $\overline{b}+\overline{c}=\beta\overline{a}$. Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо $\overline{a}-\overline{c}=\alpha\overline{c}-\beta\overline{a}$, звідки:

$$(1+\beta)\overline{a}=(1+\alpha)\overline{c}. \qquad (1)$$

Оскільки вектори $\overline{a}$ і $\overline{c}$ неколінеарні, то (1) можливе лише при $\alpha=\beta=-1$. Тоді $\overline{a}+\overline{b}=-\overline{c}$, а $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$. Отже, $\left|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right|=0$.

> **Коментар.** В основі ідеї розв'язання – використання властивостей колінеарних векторів ($\overline{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні вектори $\Leftrightarrow \vec{a}=k\cdot\vec{b}$, k – деяке число).

<u>Задача 2.</u> Дано трикутник ABC. Довести, що:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}<0.$$

Доведення.

Позначимо $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{c}$. Очевидно, що $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, отже, $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=0$. Використовуючи властивості скалярного добутку, розкриємо дужки: $\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}=0$, або

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2\right)<0.$$

> **Коментар.** В основі ідеї доведення – перехід від очевидної рівності $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ до скалярного квадрату вектору $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

<u>Задача 3.</u> На площині розміщено три точки $A(3-t;6+2t)$, $B(1+t;3-t)$, $C(t-1;1)$. При яких значеннях t з точки A не буде видно точку C?

Відповідь: $3-\sqrt{10}$.

Розв'язання.

Для виконання умови задачі всі три точки повинні лежати на одній прямій, причому точка B повинна знаходитися між A і C. Вказані умови виконуються, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ - колінеарні і однаково напрямлені, тобто $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\lambda > 0$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = \left(2t-2;-3-3t\right)$, $\overrightarrow{BC} = \left(-2;t-2\right)$, то маємо $\lambda = \dfrac{2t-2}{-2} = \dfrac{-3-3t}{t-2} > 0$, звідки $t = 3-\sqrt{10}$.

Коментар. Успіх розв'язання – у встановленні взаємного розташування на площині точок A, B, C.