

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ
УНІВЕРСИТЕТ

ПРИНЦИПИ І МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ В
БАГАТОРІВНЕВІЙ СИСТЕМІ ВИЩОЇ ОСВІТИ : СУЧАСНИЙ ТА
ІСТОРИЧНИЙ ПОГЛЯД ЗДОБУВАЧІВ І МОЛОДИХ ВЧЕНИХ

***Матеріали Всеукраїнської науково-практичної
конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених
07-08 квітня 2022 року***

Харків
ХНАДУ
2022

Редакційна колегія:

КИРИЧЕНКО Ігор Костянтинович - доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики ХНАДУ (Україна).

ЯРХО Тетяна Олександрівна – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики ХНАДУ (Україна).

Всеукраїнська науково-практична конференція здобувачів вищої освіти і молодих вчених проведена згідно з планом проведення міжнародних, всеукраїнських та науково-методичних конференцій та семінарів ХНАДУ у 2022 році (ДНУ «ІМЗО» МОН України № 22.1/10-2985 від 30.12.2021 р.).

Відповідальний редактор:

ЄМЕЛЬЯНОВА Тетяна Вікторівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики ХНАДУ (Україна).

Принципи і методи математичної підготовки в багаторівневій системі вищої освіти : сучасний та історичний погляд здобувачів і молодих вчених : матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених. – Харків: ХНАДУ. – 2022. – 180 с.

В збірку включені матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених, в яких розглянуто науково-педагогічна діяльність видатних вчених в галузі фундаментальних досліджень, новітні математичні та методичні підходи у вивченні природничо-математичних дисциплін, фундаментальні основи розв'язання професійно-прикладних задач.

Збірник матеріалів розраховано на студентів, магістрів, аспірантів і фахівців, діяльність яких пов'язана з науково-дослідною роботою в різних галузях сучасної науки і освіти. Він може бути корисним методистам, викладачам середніх і вищих навчальних закладів, аспірантам та стажерам.

© Харківський національний
автомобільно-дорожній
університет, 2022

ЗМІСТ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ У ДОСЛІДЖЕННЯХ ВИДАТНИХ ВЧЕНИХ У ТЕХНІЧНИХ, ТРАНСПОРТНИХ ТА ЕКОНОМІЧНИХ ГАЛУЗЯХ

<i>Деревицький А. С.</i> Розв'язання рівнянь вищих степенів до Галуа	5
<i>Колісниченко Т. О.</i> Особливості системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу	9
<i>Масло О. М., Товчига Д. Є.</i> Застосування визначеного інтегралу в задачах економіки	14
<i>Рудяшко А. С.</i> Внесок Леонардо Пізанського в математику	18
<i>Струс М. В.</i> Внесок Галуа у розв'язання питання про корені рівнянь ступеня ≥ 5	21

НОВІТНІ МАТЕМАТИЧНІ ТА ПЕДАГОГІЧНІ ПІДХОДИ У ВИВЧЕННІ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

<i>Афиф Акрам, Ельуаргі Амін</i> Формули наближеного рішення задачі Коші для звичайного диференціального рівняння І-ого порядку	28
<i>Бобров І. О., Ковалевська М. Є.</i> Використання сучасних методів аналізу даних у вирішенні проблем розпізнавання візуальних образів.....	33
<i>Воронков С. В., Карлюкіна Л. О.</i> Застосування табличного редактора EXCEL в процесі аудиту автотранспортного підприємства.....	37
<i>Кулаков Д. С.</i> Лінійні різниці рівняння із постійними коефіцієнтами та їх реалізація у цифрових пристроях	41
<i>Купцова А. В.</i> Фундаментальна роль поняття границі в диференціальному та інтегральному численні.....	46
<i>Ковальчук О. О.</i> Проблеми адитивної теорії чисел	52
<i>Сльота О. Л.</i> Побудова й аналіз математичної моделі росту чисельності населення міста Полтава	55
<i>Токарев В. М.</i> Принцип суперпозиції для лінійних різницевих рівнянь та їх реалізація у складних пристроях	60
<i>Хайчіна М. О.</i> Застосування системи комп'ютерної математики MAXIMA під час вивчення теорії графів	63
<i>Щербініна Ю. В., Харченко С. Д.</i> Інтегрування тестів в оболонку «Moodl»	67

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОФЕСІЙНО-ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

<i>Бабаєва А. О.</i> Рефлексія у іграх	77
<i>Безцінна К. М., Кобзар В. С.</i> Розв'язання задачі оптимізації транспортних перевезень	87
<i>Бутенко Д. С.</i> Застосування лінійної алгебри для обчислення характеристик деяких систем міського господарства.....	90

Гетало А. І. Геометрична властивість інтегральних кривих лінійного диференціального рівняння першого порядку	95
Головань О. О. Застосування диференціального числення для розрахунків динаміки гідропривода трактора	99
Градовський А. С. Програмна реалізація гри «Аерторія» з використанням методів об'єктно-орієнтованого програмування	105
Груніна С. Б. Основні дидактичні аспекти самостійної підготовки з математичних дисциплін очима здобувачів вищої освіти	109
Забара Д. С. Аспекти використання технології Smart Board на заняттях з вищої математики в закладах технічної вищої освіти	114
Занфіров Р. Р. Програмна реалізація системи розпізнавання лицьових масок на обличчі з використанням нейронних мереж	117
Ксенофонов Є. Р. Модель конфлікту у рефлексивній грі	123
Літвіненко А. В. Розрахування відсоткової ставки	126
Матушкін Д. П., Цимбал Д. В. Транспортна задача як проблема логістичної оптимізації	130
Мяленко Я. В. Проектування нейронних мереж для здійснення трекінгу рук з використанням імерсивних технологій	134
Науменко А. В. Проектування інструментальної програмної системи в процесі синтезу формального опису нейронних моделей	139
Палагута А. М. Обробка експериментальних даних дискретного випадкового процесу	143
Польовик А. В. Використання методів об'єктно-орієнтованого програмування в процесі розроблення гри «Lost archer» мовою C++	147
Порожняк М. С. Soft skills як складова професійної компетентності майбутніх інженерів	152
Самарський К. С. Численні методи розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою пакету VisSim	156
Степанюк О. М. Застосування математичного апарату solidworks simulation для аналізу напружено-деформованого стану моделі	160
Стокалюк Т. М. Застосування STEM освіти при підготовці здобувачів технічної вищої освіти	165
Ткаченко С. О. Моделювання рефлексивної гри	169

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ У ДОСЛІДЖЕННЯХ ВИДАТНИХ ВЧЕНИХ У ТЕХНІЧНИХ, ТРАНСПОРТНИХ ТА ЕКОНОМІЧНИХ ГАЛУЗЯХ

Деревицький А. С. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – док. Вишневецький О. Л.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТУПЕНІВ ДО ГАЛУА

Вступ. Можна стверджувати напевно, що ні знайдеться жодної людини, яка б не була знайома з рівняннями. Діти змалку починають вирішувати «завдання з іксом». Правда, для багатьох знайомство з рівняннями і закінчується шкільними справами. Відомий німецький математик Курант писав: «Протягом двох з гаком тисячоліть володіння деякими, не дуже поверхневими, знаннями в галузі математики входило необхідною складовою частиною в інтелектуальний інвентар кожної освіченої людини». І серед цих знань було вміння розв'язувати рівняння.

Алгебраїчні рівняння природно класифікувати по їх степені, і найпростішими є рівняння першого ступеня $ax + b = 0$ та другого ступеня $ax^2 + bx + c = 0$. Формули їх розв'язання були здавна відомі і (для рівнянь другого ступеня) використовували радикали. Звичайно, хотілося б мати схожі формули для рівнянь вищих степенів. Такі рівняння ступеня n мають вид

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

До них зводяться дуже багато і дуже різноманітних питань практики і природознавства. Звичайно, тут можна відразу припустити, що $a_0 \neq 0$, так як інакше ступінь рівняння насправді не n , а менше. Багатьом, зрозуміло, приходила в голову приваблива думка знайти для будь-якого рівняння ступеня n формули, які виражали б корені через його коефіцієнти за допомогою радикалів та чотирьох дій арифметики, тобто розв'язували б рівняння в радикалах. Однак «похмуре середньовіччя» виявилось дуже похмурим і щодо обговорюваної задачі - протягом цілих семи століть необхідних формул ніхто не знайшов. Тільки в XVI столітті італійським математикам вдалося

просунутися далі - знайти формули для $n = 3$ і 4 . Історія їх відкриттів і навіть авторство знайдених формул досить темні донині, і ми не будемо з'ясовувати складні відносини між Ферро, Кардано, Тартальей і Феррарі, а викладемо математичну суть справи (для $n = 3$ і 4).

Рівняння 3-го ступеня

Це рівняння має вид

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Легко перевірити, що якщо ми покладемо $x = y - \frac{a_1}{3a_0}$, де y - нове

невідоме, то справа зведеться до розв'язання рівняння

$$y^3 + py + q = 0,$$

де p, q – нові коефіцієнти. Щаслива здогадка італійців складалася в тому, щоб шукати невідому y у вигляді суми $y = u + v$, де u, v – **д в а** нових невідомих. Для них наше рівняння переписеться - після невеликого перегруповання доданків - так:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Так як невідомих тепер два, на них можна накласти ще яку-небудь умову – найкраще таку:

$$3uv + p = 0,$$

тоді вихідне рівняння прийме зовсім простий вигляд

$$u^3 + v^3 + q = 0.$$

Це означає, що сума кубів u^3, v^3 повинна дорівнювати $-q$, а їх добуток $-\frac{p^3}{27}$. Отже, самі u^3, v^3 повинні бути коренями квадратного рівняння

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0,$$

а для нього формула вже відома. У підсумку виходить формула

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

причому з дев'яти пар значень кубічних радикалів, що входять в неї, треба брати тільки пари, що дають в добутку $\frac{-p}{3}$, як випливає з попереднього міркування. Історично за цією формулою закріпилася назва формули Кардано, хоча питання про її авторство так до кінця і не з'ясоване.

Рівняння 4-го ступеня

Для $n = 4$ формулу для коренів рівняння відкрив Феррарі, вона виглядає складніше, але теж використовує тільки чотири арифметичних дії і добування радикалів. Ось начерк виведення формули Феррарі. Перш за все, подібно до попереднього, покладемо $x = y - \frac{a_1}{4a_0}$, тоді справа зведеться до розв'язання рівняння виду

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Доповнивши y^4 до $(y^2 + z)^2$, тобто додавши і віднявши в лівій частині $2zy^2 + z^2$, де z - допоміжне невідоме, отримаємо

$$(y^2 + z)^2 - [(2z - p)y^2 - qy + (z^2 - r)] = 0.$$

Підберемо тепер z так, щоб квадратний тричлен в квадратних дужках виявився повним квадратом; для цього потрібно, щоб його дискримінант дорівнював нулю, тобто щоб було

$$q^2 - 4(2z - p)(z^2 - r) = 0.$$

Чи можемо ми розв'язати це рівняння відносно z ? Так, бо воно кубічне. Нехай z_0 - який-небудь його корінь (дається формулою Кардано), тоді вихідне рівняння переписеться у вигляді

$$[(y^2 + z_0) - (...)] * [(y^2 + z_0) + (...)] = 0,$$

де крапки означають многочлен не більше ніж першого степеня від y , обидва рази один і той же. Його корені:

$$y_1 = \frac{\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}}{2};$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}}{2}$$

$$y_3 = \frac{-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}}{2};$$

$$y_4 = \frac{-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}}{2}$$

При цьому знаки перед радикалами $\sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}, \sqrt{z_3}$ вибирають так, щоб виконувалася рівність $\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = -q$.

Попередники Галуа

У 1770-71 рр. знаменитий французький математик Лагранж (1736-1819) публікує в Мемуарах Берлінської Академії свій мемуар «Думки над вирішенням алгебраїчних рівнянь», в якому робить критичний перегляд всіх способів розв'язків рівнянь 3-й і 4-го ступенів, даних його попередниками, і зауважує, що все вони по суті засновані на наступному принципі.

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ будуть корені заданого рівняння, і нехай $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ буде їх раціональна функція, що приймає при всіляких $n!$ перестановках між коренями v значень. Тоді ця функція задовольняє рівнянню степеня v з раціональними коефіцієнтами. Відповідно до точки зору Лагранжа, задача полягає в тому, щоб підібрати функцію $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ таким чином, щоб v було менше n . І ось виявилось, що при $n > 4$ це неможливо. Ці дослідження Лагранжа дали для наступних алгебраїстів вельми зручний апарат. Крім того, вони вказали шлях, по якому слід було шукати доведення неможливості розв'язання рівнянь в радикалах в загальному випадку.

Подальшим етапом в з'ясуванні проблеми розв'язання рівнянь в радикалах послужили роботи Руффіні (P. Ruffini, 1765-1822) і Абеля (N.-H. Abel, 1802 - 1829). Руффіні (1799) запропонував доведення нерозв'язності в радикалах рівнянь 5-го степеня, коефіцієнти якого є незалежними змінними. Однак його доведення закінчилося невдачею, бо було неправильне.

Правильним мав бути принципово новий підхід. На цей раз він не змусив себе довго чекати - вже в 1824 році молодий (і в віці 27 років померлий) норвезький математик Нільс Генрік Абель, спираючись на ідеї Лагранжа, пов'язані з перестановками коренів рівняння, довів, що необхідних формул, які

розв'язували б в радикалах рівняння загального вигляду, при $n \geq 5$ дійсно не існує. Теорема Абеля дала негативну відповідь тільки для рівнянь загального вигляду, тобто з літерними коефіцієнтами $a_0, a_1, \dots, a_n$, але, зрозуміло, багато конкретних рівнянь як завгодно високого степеня цілком можуть розв'язуватися в радикалах (приклад: рівняння $x^{90} + 5x^{45} + 7 = 0$, треба покласти $x^{45} = t$). Тому відразу ж постало питання про повне вирішення завдання - знаходження **критерію** можливості розв'язання рівнянь в радикалах, тобто необхідної і достатньої умови, яка б за коефіцієнтами $a_0, a_1, \dots, a_n$ будь-якого заданого рівняння

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

дозволяла б судити, розв'язується рівняння в радикалах чи ні.

Література

1. Чеботарев Г. Н. Основы теории Галуа. Часть первая. – ОНТИ, Москва, 1934. – 221 с.
2. Эварист Галуа. Революционер и математик /А. Дальма. Пер. с фр. – 2-е изд. - Москва : Наука, 1984. – 111 с.
3. Алгебра / Б. Л. Ван-дер-Варден. - М.: Мир, 1976. – 648 с.
4. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов, 13-е изд. / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, - М. : Наука, 1986. – 545 с.

УДК 004:640.43

Доц. Колісниченко Т. О.
*Київський національний університет технологій та дизайну
(Київ, Україна)*

ОСОБЛИВОСТІ СИСТЕМИ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ЩОДО РОЗВИТКУ РЕСТОРАННОГО БІЗНЕСУ

Дослідження системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу охоплює важливу проблему, пов'язану з підвищенням застосовності методів у контексті прийняття управлінських рішень та вибір найкращих рішень для розвитку ресторанного бізнесу. Завданням системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу є підтримка складних багатокритеріальних проблем ухвалення управлінських рішень. Функціональна спеціалізація системи визначається як вирішення завдань,

пов'язаних з питаннями відбору, групування, упорядкування конкретних об'єктів (варіантів рішення), аналізу та пост-оцінки результатів рішення, процедура моделювання розвитку ресторанного бізнесу. Структура системи базується на міждисциплінарному підході, який поєднує кількісні та поведінкові аспекти теорії рішень у всеосяжний, узгоджений та корисний процес підтримки прийняття рішень у сфері ресторанного бізнесу. Остаточна структура системи визначається детермінантами, що впливають із складності процесу аналізу рішень, що особливо помітно на практиці.

Архітектура ІТ-системи класу системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу підпорядкована аналізу всіх ситуацій процесу прийняття рішень. Можна виділити наступні умови, які необхідно враховувати у ході побудови системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу, а саме:

- багатетапність - процес прийняття рішення може відбуватися в один або кілька етапів,
- багатокритеріальність - рішення можна розглядати з точки зору будь-якої кількості критеріїв (структура критеріїв - прості (вектор критеріїв), складні (ієрархічні або мережеві залежності), представлення критеріїв - у вигляді числових або словесних значень),
- кількість осіб, які приймають рішення - рішення може приймати один або група осіб (менеджерів ресторанної сфери), крім того, деякі параметри рішення (варіанти рішення) можуть розглядатися експертом або групою експертів з необхідним рівнем компетентності [1],
- масштаб проблеми рішення - дрібномасштабні проблеми, пов'язані з вирішенням рішення, що охоплює від кількох до десятка варіантів рішення або масові проблеми щодо розгляду кількох десятків чи сотень варіантів (наприклад, подані заявки на фінансування ресторанного бізнесу) [2],
- гнучкість варіантів рішення - процедура прийняття рішення може виконуватися одноразово, від визначення проблеми, до визначення варіантів

та їх вибору, або може бути ітераційною, що дозволяє змінювати значення, що характеризують варіанти, у ході рішення.

У світлі вищезазначених умов архітектура системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу повинна відповідати вимогам мережевого рішення, орієнтованого на комунікацію, мати підтримку групових рішень і моделей, що надаються користувачеві у вигляді готових пропозицій, володіти інструментами, що дозволяють модифікувати та створювати власні рішення. Структура системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу має бути гнучкою, природною та розробленою спеціально для відповіді на мінливі потреби користувачів.

Система підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу, що функціонує в даних, моделях, методах (обчислювальних методах), результатах (формах подання), повинна становити єдину ІТ-платформу з відкритою архітектурою.

Вибір методу багатокритеріальної підтримки прийняття рішень для конкретної проблеми визначається певним набором параметрів. Існують набори даних, умови, необхідні для застосування конкретного методу. Вибір методів багатокритеріальної підтримки прийняття рішень з точки зору побудови системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу і застосування інформаційних технологій, які будуть використовуватися для вирішення певного класу проблем, що виникають у різних ситуаціях прийняття рішень, є завданням більш широкого плану. Його структура зосереджена на інтеграції кількісних методів для більш широкого кола застосувань. Це можна зробити за допомогою сучасних інформаційних технологій, побудувавши рішення з відкритою, гнучкою та інтегрованою архітектурою, відоме як ІТ-платформа (або інтернет-платформа). Основою такої системи є оптимальна організація інформаційних структур для опису різноманітних ситуацій прийняття рішень, оптимальні з точки зору інформаційні входи інтегральних методів. Важливо знайти метод з найбільшим інформаційним потенціалом (пропускною здатністю до

інформації). Передбачається, що метод повинен у високій мірі відображати актуальні проблеми прийняття рішень у сфері ресторанного бізнесу, щоб після підготовки до його введення набору числових або мовних даних міг бути використаний для подальших досліджень особою, яка приймає рішення, і дозволила використовувати інші (наприклад, взаємодоповнювальні) методи в одній ІТ-системі, та яка є інструментом для пошуку кращих рішень.

Використання кількісних методів та комп'ютерних технологій вимагає системного підходу до розв'язання складних, багатокритеріальних, групових та багатоетапних задач щодо прийняття рішень у сфері ресторанного бізнесу. У контексті інтеграції кількісних методів разом із знаннями, необхідними для роботи з ними в одній ІТ-системі, системний аналіз створює цілісну, однозначну та алгоритмічну основу для процедури прийняття рішень розвитку ресторанного бізнесу. Коректно побудовані в її ході моделі, що вичерпно описують розглянуту проблему вибору рішення, можуть являти собою повні метаописи (шаблони математичних моделей) в ІТ-системі. Отримана метабаза моделей, що містить вичерпний опис інформаційних структур для конкретного класу завдань, може, у свою чергу, стати основою для інтеграції та використання багатьох різних методів. Метабаза є елементом, який дає змогу забезпечити цілісність, мовну та інформаційну узгодженість інтегрованої та всеосяжної ІТ-системи.

Більшість ситуацій прийняття рішень для розвитку ресторанного бізнесу через складність світу та багатовимірність людського сприйняття розглядаються з точки зору багатьох критеріїв. Багатокритеріальний критерій найбільш широко охоплює методи системного аналізу. Це методи з дуже високою (теоретично необмеженою) інформаційною ємністю. Приклади включають моделі багатокритеріального лінійного програмування. Вони дозволяють вичерпно описувати ситуацію прийняття рішення через можливість визначення багатьох змінних рішень, обмежень і балансів ресурсів, а також безліч часткових цільових функцій, що представляють критерії вибору та надані їм переваги. Якщо глобальним критерієм цілі в такій

системі є функція корисності, сумарне значення якої досягає екстремуму на множині можливих рішень, то можна отримати найкращі з можливих рішень.

Анотація. *Завданням системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу є підтримка складних багатокритеріальних проблем ухвалення управлінських рішень. Виділено умови, які необхідно враховувати у ході побудови системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу. Окреслено критерії формування структури системи підтримки прийняття рішень щодо розвитку ресторанного бізнесу. Обґрунтовано використання кількісних методів та комп'ютерних технологій, що вимагає системного підходу до розв'язання складних, багатокритеріальних, групових та багатостадійних задач у системі прийняття рішень у сфері ресторанного бізнесу.*

Ключові слова: *система, підтримка прийняття рішень, ресторанний бізнес.*

Література

1. Yurynets Z., Bayda B., Petruch O. Country's economic competitiveness increasing within innovation component. *Economic Annals* – XXI. 2015. № 9-10. P. 32-35.
2. Yurynets Z. Forecasting model and assessment of the innovative and scientific-technical policy of Ukraine in the sphere of innovative economy formation. *Investment Management and Financial Innovations*. 2016. Volume 13. Issue №2. P. 16-23. URL: [http://dx.doi.org/10.21511/imfi.13\(2\).2016.02](http://dx.doi.org/10.21511/imfi.13(2).2016.02)

Масло О. М. (студ., 2 курс),
Товчига Д. Є. (студ., 2 курс)

Науковий керівник – проф. Жерновникова О. А.
Харківський національний педагогічний університет ім.Г. С. Сковороди
(Харків, Україна)

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ В ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІКИ

Аналіз останніх досліджень. О. В. Семененко подає найбільш доступне означення визначеного інтегралу, властивості й методи їх обчислення [4].

Л. Б. Коваленко знайомить з основними поняттями, необхідними для розв’язання задач економіки: продуктивністю, об’ємом продукції, функцією Кобба-Дугласа, кривою Лоренца, коефіцієнтом Джині, точкою ринкової рівноваги, вирашем користувачів і постачальників і наводить відповідні приклади розв’язання задач [2].

В. М. Мацкул зазначає, що інтегрування має великий діапазон використання для задач економіки [3]. Наприклад, для знаходження функції прибутку, споживання й витрат за умови, якщо буде відомо функції граничних прибутку, споживання, витрат тощо.

Стандартні задачі в загальному вигляді (та в прикладах) наводять А. М. Алілуйко, Н. В. Дзюбановська, О. Ф. Лесик, В. М. Неміш, І. Я. Новосад, М. І. Шинкарик [1]. Зокрема, задачі про знаходження зміни загальних видатків при зростанні кількості одиниці продукції; зміни прибутку й доходу при зростанні реалізації продукції; середніх значень витрат прибутку й доходу за інтервал часу; загального прибутку за певний час за відомою різницею похідних середнього значення доходу й витрат (або відомої похідної середнього значення прибутку); приросту капіталу при певному обсягові чистих інвестицій; повної дисконтної суми за T (період) років; надлишку споживача за можливих і реальних витрат споживача; додаткової вартості виробника за вартістю створеного продукту та факторів виробництва.

Виклад основного матеріалу. Почнемо з розгляду поняття визначеного інтегралу. Якщо границя інтегральних сум $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ існує, скінченна й не залежить від способу розбиття сегмента $[a, b]$ на частинні відрізки, а також від вибору проміжних точок c_i , то ця границя називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ і позначається:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c) \Delta x_i, \quad (1)$$

де $\int_a^b$ – знак визначеного інтеграла; a, b – нижня та верхня межі інтегрування; $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз; dx – диференціал змінної інтегрування [4, с. 167].

Економічний зміст визначеного інтегралу: він чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством із продуктивністю праці $y = f(t)$ за інтервал часу $[0; t]$, тобто

$$q = \int_0^t f(t) dt \quad (2)$$

Важливо, щоб інтегрована функція була неперервною на проміжку $[a, b]$, інакше визначений інтеграл не буде існувати. Це означає, що частина графіку на вказаному проміжку не повинна мати розривів (із алгебраїчної точки зору – знаменник дробу функції $f(x)$ ненульовий на $[a, b]$, під знаком кореня парного степеня – невід’ємний вираз, аргументи тангенса, котангенса й логарифма такі, щоб функція існувала тощо).

Наведемо приклад постановки й розв’язання такої задачі.

Задача 1. Знайдемо надлишок споживача, якщо крива попиту визначається функцією $p = f(q) = 45 - 4q^2$, а рівноважний обсяг товару $q_0 = 3$ [1, с. 128].

Розв’язування. Підставивши значення $q_0 = 3$ у функцію попиту, дістанемо рівноважну ціну:

$$p_0 = f(q_0) = 45 - 4 \cdot 3^2 = 9.$$

Використовуючи формулу

$$S_H = \int_0^{q_0} f(q) dq - p_0 q_0, \quad (3)$$

матимемо:

$$\begin{aligned} S_H &= \int_0^3 (45 - 4q^2) dq - 9 \cdot 3 = \left(45q - \frac{4q^3}{3} \right) \Big|_0^3 - 27 = \\ &= 45 \cdot 3 - 36 - 27 = 72. \end{aligned} \quad (4)$$

Проміжний розрахунок виконали з використанням формули Ньютона-Лейбніца.

Таким чином, надлишок споживача $S_H = 72$.

Розглянемо задачу, в якій порівнюється знаходження загального прибутку фірми за рік двома способами: без інтегрування й із використанням визначеного інтегралу (більш точно).

Задача 2. Припустимо, що фірма передбачає випуск продукції протягом року й за цей період планує отримати прибуток 100 млн грн. Продаж продукції здійснюється рівномірно протягом року. Ставка дисконту становить 15% [3, с. 293].

Розв'язування. Наближено оцінимо поточну вартість майбутніх надходжень. Для цього розглянемо дискретний грошовий потік за один рік ($t = 1$). За формулою теперішньої вартості маємо:

$$PV_1 \approx \frac{100}{1+0,15} = 86,96 \text{ (млн грн)}, \quad (5)$$

де 100 – прибуток, який плануємо отримати, 1 – кількість років, 0,15 – ставка дисконту.

За умовою задачі надходження від реалізації продукції поступають регулярно протягом року, тому вважатимемо інтенсивність потоку сталою величиною, яка дорівнює 100 млн грн / рік. Обрахуємо силу зростання: $\rho = \ln 1,15 = 0,14$. Тепер знаходимо загальний прибуток на початку року:

$$PV = \int_0^1 100 \cdot e^{-0,14t} dt = -\frac{100}{0,14} e^{-0,14t} \Big|_0^1 = 93,32 \text{ (млн грн)}. \quad (6)$$

Отже, загальний прибуток, який фірма отримуватиме за рік та який ми оцінюємо як 100 млн грн, на початку року становить 93,32 млн грн.

Звичайно, наведені приклади розв'язання не вичерпують усього обсягу задач, що приводять до використання визначеного інтегралу для розв'язання питань економіки.

Анотація. У статті висвітлено окремий аспект математичного аналізу, а саме поняття визначеного інтегралу; показана роль його використання в розв'язанні економічних задач. Студентам економічних спеціальностей пропонується розглянути наведені приклади задач. Стаття спрямована на більш розширене дослідження стосовно використання визначеного інтегралу, а також передбачає розкриття інших понять математичного аналізу в задачах з економіки.

Ключові слова: економічні задачі, математичний аналіз, визначений інтеграл, прибуток.

Література

1. Вища математика у прикладах і задачах для економістів : навч. посіб. / А. М. Алілуйко, Н. В. Дзюбановська, О. Ф. Лесик, В. М. Неміш, І. Я. Новосад, М. І. Шинкарик. Тернопіль : ТНЕУ, 2017. С. 119 – 132.
2. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : підруч. 2-ге вид., перероб. Та допов. Харків : ХНУМГ імені О. М. Бекетова, 2019. С. 333 – 338.
3. Мацкул В. М. Вища математика для економістів : підруч. Одеса : ОНЕУ, 2018. С. 319 – 343.
4. Навч.-метод. посібник з курсу «Вища математика» / О. Г. Семененко. Переяслав-Хмельницький : ПХДПУ, 2021. 260 с.

Рудяшко А. С. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – проф. Жерновникова О. А.
Харківський національний педагогічний університет ім. Г. С. Сковороди
(Харків, Україна)

ВНЕСОК ЛЕОНАРДО ПІЗАНСЬКОГО В МАТЕМАТИКУ



Леонардо Пізанський, він же Фібоначчі, великий італійський математик, а також один із найвідоміших вчених свого часу. Ім'я Фібоначчі більш відоме ніж справжнє, закріпилось за ним лише в XIV ст. Жив Леонардо в Пізі приблизно в XII-XIII ст. Він був сином торговця, а став відомим математиком часів Середньовіччя завдяки відкриттю чисел

Фібоначчі та арабських цифр.

Вчений разом зі своїм батьком багато подорожував по країнах Сходу. Подорожуючи, ознайомився із працями арабських математиків, а також читав роботи вчених Античності в арабському перекладі. Після чого став поширювати свої знання в Європі. Згодом першим порекомендував використовувати арабські цифри замість римських і відкрив послідовність чисел. Цей числовий ряд стали називати послідовністю Фібоначчі. Основні трактати Леонардо Фібоначчі :

- a) «Книга абака» («Liber Abaci», 1202);
- b) «Практика з геометрії» («Practica geometriae», 1220);
- c) «Квітка» («Flos», 1225);
- d) «Книга квадратів» («Liber quadratorum», 1225).

У «Книзі абака» розкриті знання з арифметики та алгебри, які були на той час. «Практика геометрії» – трактат про застосування алгебраїчних методів у геометрії. Трактат «Квітка» містить дослідження про кубічні рівняння, а «Книга квадратів» завдання про невизначені квадратні рівняння.

Леонардо Пізанський у своїй «Книзі абака» (1202) описав багато нових відкриттів та різних задач серед яких задачі комбінаторики. Прикладом є задача про знаходження кількості гирь, за допомогою яких можна виміряти вагу. У книзі було представлено дробову риску, найстаріший знак ділення серед сучасних – горизонтальна риска, а також сучасний запис дробу. Серед нових термінів були поданні такі як : «частка» та «дріб». Також Фібоначчі вперше в Європі представив від'ємні числа та правило знаходження суми членів арифметичної прогресії.

Якщо говорити про книгу «Практика геометрії», то вона містить багато теорем, пов'язаних із вимірювальними методами. Цікавим є доказ про перетин в одній точці трьох медіан. Вважається, що Архімед знав про це, але якщо він і довів цю теорему, то до нас відомості не дійшли. Ще одне доведення теореми є не менш цікавим та заслуговує уваги, бо її немає в «Началах» Евкліда. Ця теорема про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда, яка дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів. У цій книзі також зустрічається формула для обчислення об'єму зрізаної піраміди.

Фібоначчі найчастіше згадують насамперед через числову послідовність. Він першим розглянув послідовність, в якій перші два члени одиниці, а наступне число, починаючи з третього, сума двох попередніх. Цікавим є той факт, що числа Фібоначчі можна зустріти в живій природі. Наприклад, порядок розташування гілок у рослин. Відстані між гілками співвідносяться з числами Фібоначчі (філотаксис). Таку строгу закономірність можна побачити в сучасних творах масової культури. Числа Фібоначчі згадуються в бестселері Дена Брауна «Код да Вінчі». Якщо докладніше, то послідовність є кодом для відкривання сейфу [5; 6; 7].

Для того, щоб перейти до наступного визначення розглянемо приклад. Якщо візьмемо довільний прямокутник та розіб'ємо його на квадрати, у яких довжини сторін утворюють послідовність Фібоначчі, то отримаємо так званий «золотий прямокутник». Прямокутник вважається «золотим», бо відношення двох сусідніх чисел у послідовності Фібоначчі прямує до числа, яке

називається «золотим перерізом». Це число 1,6180339887. Золотий переріз можна спостерігати в образотворчому мистецтві. Яскравими прикладами є картини Леонардо да Вінчі.

Окремим випадком «золотого прямокутника» є спіраль Фібоначчі. Якщо провести плавну лінію через кути квадратів прямокутника, то отримаємо спіраль Архімеда. Числа Фібоначчі в спіральних формах можна спостерігати в природі. Раковини молюсків, деякі галактики, циклони, лусочки на сосновій шишці, спіраль ДНК та багато іншого – все це фантастичні приклади чисел Фібоначчі в спіральних формах. Слід зазначити, що на уроках математики в школі використовують математичні історизми про числа Фібоначчі [1; 2; 3; 4].

На честь Леонардо Пізанського був встановлений пам'ятник у його рідному місті Пізі.

***Анотація.** Леонардо Пізанський (Фібоначчі) – видатний математик, який зробив великий внесок у розвиток математики часів Середньовіччя. Його відкриття вражають світ. Зв'язок чисел та спіралі Фібоначчі наводять на думки про цікаві закономірності. Цікаві вони тим, що подібні до числа та спіралі Фібоначчі явища можна спостерігати в природі. І природа дійсно має привід для таких припущень.*

***Ключові слова.** Фібоначчі, математика, трактат, числа, послідовність, «золотий переріз», спіраль.*

Література

1. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2017. 272 с.
2. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенко, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.
3. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. Київ : Генеза, 2017. 264 с.
4. Воевода А. Л. Зацікавити математикою : метод. посібн. 2-ге вид., допов. і перероб. Вінниця : ФОП «Легкун В. М.», 2012.- 181 с.
5. Послідовність Фібоначчі і принципи Золотого перерізу. URL : <https://gazette.com.ua/edu/poslidovnist-fibonachchi-i-printsipi-zolotogo-pererizu.html> (дата звернення 17.02.2022).
6. Числа Фібоначчі та золотий переріз : взаємозв'язок. Спіраль Фібоначчі – зашифрований закон природи. URL : <https://secondhandivanovo.ru/uk/street-style/chisla-fibonachchi-i-zolotoe-sechenie-vzaimosvyaz-spiral-fibonachchi.html> (дата звернення 17.02.2022).
7. Фібоначчі. URL : <https://znaimo.com.ua/%D0%A4%D1%96%D0%B1%D0%BE%D0%B%D0%B0%D1%87%D1%87%D1%96> (дата звернення 22.02.2022).

ВНЕСОК Е. ГАЛУА У РОЗВ'ЯЗАННЯ ПИТАННЯ ПРО КОРЕНІ РІВНЯНЬ СТУПЕНЯ ≥ 5

Життя Галуа.

Питання про можливість розв'язання рівнянь в радикалах було остаточно розібране, у всякому разі принципово, в роботах Галуа (Evariste Galois, 1811-1832).

Особистість Галуа є абсолютно виняткове в історії науки явище. Життя Галуа, померлого всього на 21 році, склалося вкрай бурхливо. Двічі провалившись на вступних іспитах в знамениту Політехнічну школу, Галуа вступив в Підготовчу школу (перетворену з Вищої нормальної школи під час реакційного правління Карла IX), звідки незабаром після липневого перевороту був звільнений за друкований виступ проти школи. Після цього Галуа відкрив «публічний курс» з алгебри, але політичне життя країни швидко залучило його в свій вир. Маючи репутацію затятого республіканця і активного ворога короля Луї-Філіпа, він два рази сидів у в'язниці за політичні виступи та в травні 1832 року був убитий на дуелі, причини якої залишаються досі загадковими.

За своє коротке життя Галуа встиг створити теорію, яка до цих пір стоїть в фокусі математичної думки. Розглядаючи чисельні рівняння, він встановив поняття їх **груп**, тобто сукупності таких підстановок між їх коренями, які не порушують раціональних співвідношень між ними. Ця група визначає для кожного рівняння алгебраїчну структуру його коренів. Зокрема, рівняння розв'язується в радикалах тоді і тільки тоді, коли його група належить до числа так званих розв'язних груп (інша назва на сучасному математичному жаргоні – має поліциклічну матрешку). Таким чином, питання про можливість розв'язання кожного даного рівняння в радикалах може бути вирішене за допомогою скінченного числа дій.

Математичне підґрунтя теорії Галуа.

Групою називається будь-яка множина G , на якій задана двомісна алгебраїчна операція, тобто правило, що зіставляє кожним двом елементам з групи G визначений третій елемент з G , причому виконуються наступні аксіоми:

- а) операція асоціативна, тобто $(ab)c = a(bc)$
- б) група G містить одиничний елемент e
- в) для будь-якого елемента a з G існує зворотний елемент a^{-1} , тобто такий, що $aa^{-1}=e$.

Розглянемо послідовність вкладених одна в одну підгруп; всяка така послідовність

$$M: G=N_0 \supseteq N_1 \supseteq \dots \supseteq N_m=E,$$

що містить групу G і одиничну підгрупу E , називається *матрьошкою підгруп* групи G .

Припустимо тепер, що в кожному члені N_i даної матрьошки M виділено по елементу a_i , причому

- для кожного елемента x з N_{i+1} "спряжений елемент» $a_i^{-1}xa_i$ знову лежить в N_{i+1} і

- кожен елемент y з N_i записується у вигляді добутку деякого степеня a_i^m на деякий елемент із N_{i+1} ;

тоді матрьошка M називається *поліциклічною*.

У науковій літературі групи, які мають поліциклічну матрьошку, називаються *розв'язними*.

Звернемося тепер до вихідного об'єкту дослідження – до рівняння

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ - задані числа. Ще Гаусс в кінці XVIII століття довів «основну теорему алгебри», яка говорить, що при будь-яких $a_0, a_1, \dots, a_n$ дане рівняння має в поле комплексних чисел n коренів, точніше, многочлен $f(x)$, що стоїть в його лівій частині, може бути розкладений на лінійні множники

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)\dots(x - \alpha_n),$$

де $\alpha_1 \dots \alpha_n$ – деякі комплексні числа (що називаються коренями рівняння). Завдання полягає в тому, щоб дізнатися, чи існують формули, які виражають корені $\alpha_1 \dots \alpha_n$ через коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n$ за допомогою чотирьох арифметичних дій і знаходження радикалів? Перш за все, відразу можна вважати, що всі числа $\alpha_1 \dots \alpha_n$ різні, інакше ми поділили б многочлен f на найбільший спільний дільник цього f і його похідної і одержали б многочлен з тими же коренями, але вже без повторень.

Ключовою ідеєю, воістину прозрінням Галуа, стала думка пов'язати з кожним алгебраїчним рівнянням групу всіх автоморфізмів його «поля коренів» $\mathbf{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, які залишають нерухомим «поле коефіцієнтів» $\mathbf{Q}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ (тут $\mathbf{Q}$ – поле раціональних чисел, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – корені многочлена, $a_0, a_1, \dots, a_n$ – його коефіцієнти). Зрозуміло, що це дійсно група, так як якщо φ, ψ – два таких автоморфізми, то автоморфізми $\varphi\psi$ і φ^{-1} теж залишають числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ нерухомими.

Як діє будь-який такий автоморфізм φ на корені нашого рівняння?

Якщо α – корінь, тобто

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

то, застосувавши φ до обох частин рівняння, отримаємо

$$a_0(\alpha^\varphi)^n + a_1(\alpha^\varphi)^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

тобто α^φ – корінь того ж рівняння! Іншими словами, автоморфізм φ просто переставляє корені $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ між собою, визначаючи тим самим деяку перестановку коренів

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{in} \end{pmatrix}$$

Легко збагнути, що добутку автоморфізмів відповідатиме добуток відповідних перестановок, так що всі перестановки, що виходять при цьому, самі складають групу. Вона називається групою симетрій (або групою Галуа) рівняння $f(x) = 0$ і позначається $\text{Gal}(f)$. Зрозуміло, що $\text{Gal}(f)$ – підгрупа групи S_n всіх перестановок n символів. Виявляється, що властивостями групи Галуа

і визначається відповідь на питання про можливість розв'язання даного рівняння $f(x) = 0$ в радикалах (тут $f(x)$ – многочлен).

Ось цей знаменитий Критерій Галуа.

Рівняння $f(x) = 0$ тоді і тільки тоді розв'язне в радикалах, коли його група $\text{Gal}(f)$ має поліциклічну матрешку.

Перш за все, може виникнути питання: «Як можна працювати з перестановками коренів, коли самі корені невідомі? А якщо корені будуть знайдені, то ніякі перестановки вже не знадобляться. У чому полягає досягнення? »

Виявляється, що групу $\text{Gal}(f)$ насправді можна обчислити, не знаючи коренів рівняння $f = 0$, а користуючись лише, так би мовити, міркуваннями симетрії.

Розглянемо рівняння

$$x^4 - x^2 + 1 = 0.$$

Звичайно, без всякого критерію Галуа видно, що воно біквадратне і легко розв'язується в радикалах, але наша мета зараз в іншому: продемонструвати на цьому простенькому прикладі, як, не користуючись знанням коренів рівняння, знайти його групу Галуа. Зараз ми переконаємося, що це цілком можливо. Насамперед зазначимо, що многочлен

$$f = x^4 - x^2 + 1,$$

що стоїть в правій частині, не розкладається на множники меншого степеня з раціональними коефіцієнтами. Для з'ясування цього є нескладний загальної прийом, на якому ми не будемо зупинятися.

Нехай α який-небудь корінь нашого рівняння. Зрозуміло, що тоді $-\alpha$, $1/\alpha$, $-1/\alpha$ - теж корені, причому всі вони попарно різні. Занумеруємо їх, нехай

$$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = -\alpha, \alpha_3 = 1/\alpha, \alpha_4 = -1/\alpha$$

Очевидно,

$$\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \mathbf{Q}(\alpha).$$

Які перестановки увійдуть до групи $\text{Gal}(f)$? Зрозуміло, далеко не всі $4!=24$ перестановки чотирьох символів. Справді, якщо при якомусь автоморфізмі поля $\mathbf{Q}(\alpha)$ число α переходить в $\alpha_1 = \alpha$, тобто залишається на місці, то легко зрозуміти, що числа $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ теж залишаються на місці. Іншими словами, вийде одинична перестановка e . Далі, якщо $\alpha_1 = \alpha$ перейде в α_2 , то з тієї ж причини вийде перестановка

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Нарешті, при $\alpha \rightarrow \alpha_3$ і $\alpha \rightarrow \alpha_3$ вийдуть перестановки

$$b = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Так як всі можливості для образу кореня α ми перебрали, ніякі інші перестановки з'явитися не можуть.

З іншого боку, можна переконатися, що всі чотири перестановки e, a, b, c дійсно виникають з автоморфізмів поля $\mathbf{Q}(\alpha)$, так що вони і складають групу $\text{Gal}(f)$ нашого рівняння. Справді, розглянемо, наприклад, підстановку a (для підстановок b, c міркування абсолютно аналогічно). Якщо, як ми збираємося довести, автоморфізм поля $\mathbf{Q}(\alpha)$, який відповідає підстановці a , існує, то він має діяти так:

$$\frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} \rightarrow \frac{g(\alpha_2)}{h(\alpha_2)},$$

де g, h довільні многочлени з раціональними коефіцієнтами, причому $h(\alpha) \neq 0$ (враховуємо, що автоморфізм зобов'язаний переводити суму в суму і добуток у добуток). Ясно, що цю формулу і слід взяти за визначення шуканого автоморфізму. Тонкість полягає в тому, що число може бути записано багатьма різними способами

$$\therefore \frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} = \frac{g_1(\alpha)}{h_1(\alpha)} = \dots,$$

і потрібно переконатися, що при заміні α на α_2 всі ці рівності збережуться. Інакше кажучи, якщо $p = gh_1 - g_1h$ і $p(\alpha) = 0$, то і $p(\alpha_2) = 0$. Щоб довести це, поділимо многочлен p на вихідний многочлен f з остачею:

$$p(x) = f(x)q(x) + r(x);$$

тут остача $r(x)$ - це многочлен степеня не вище третьої. Так як $p(\alpha) = f(\alpha) = 0$, то і $r(\alpha) = 0$. Якщо ми припустимо, що $r(x) \neq 0$, то за відомою теоремою Безу многочлени $f(x)$, $r(x)$ мають спільний дільник $x - \alpha$; нехай $d(x)$ - їх найбільший спільний дільник. Очевидно, $d(x)$ має ступінь не нижче першої і не вище третьої і ділить многочлен $f(x)$, а це суперечить його нерозкладності на множники. Отримане протиріччя означає, що $r(x) = 0$, тобто

$$p(x) = f(x)q(x).$$

Поклавши тут $x = \alpha_2$, отримуємо потрібну рівність $p(\alpha_2) = 0$ (а разом з нею і дві інших рівності $p(\alpha_3) = p(\alpha_4) = 0$). Точно так же з $h(\alpha) \neq 0$ отримуємо $h(\alpha_2) \neq 0$ і т.д. Отже,

$$Gal(f) = \{e, a, b, c\}.$$

Як бачимо, група Галуа знайдена, і значення коренів при цьому не знадобилися!

На закінчення декілька слів про загальне рівняння

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ - літерні коефіцієнти. Можна показати (знову-таки не користуючись значеннями коренів), що групою Галуа цього рівняння буде група всіх перестановок S_n . Чи має вона поліциклічну матрешку підгруп? Якщо $n \leq 4$, то так. Якщо ж $n \geq 5$, то група S_n не має поліциклічних матрешок, - це вже досить складна теорема, також доведена Еварістом Галуа. Отже, загальне рівняння степеня $n \geq 5$ нерозв'язне в радикалах.

Закінчуючи цей короткий нарис ідей Галуа, скажемо, що шістдесят сторінок, написаних Еварістом Галуа напередодні фатальної дуелі, стали

одним з витоків сучасної теорії груп - основного і вельми розвиненого розділу алгебри, що вивчає в загальному вигляді глибоку закономірність реального світу – симетрію.

Література

1. Чеботарев Г. Н. Основы теории Галуа. Часть первая. – ОНТИ, Москва, 1934. – 221 с.
2. Эварист Галуа. Революционер и математик /А. Дальма. Пер. с фр. – 2-е изд. - Москва : Наука, 1984. – 111 с.
3. Алгебра / Б. Л. Ван-дер-Варден. - М.: Мир, 1976. – 648 с.
4. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов, 13-е изд. / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, - М. : Наука, 1986. – 545 с.

НОВІТНІ МАТЕМАТИЧНІ ТА ПЕДАГОГІЧНІ ПІДХОДИ У ВИВЧЕННІ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Афиф Акрам (студ., 2 курс),

Ельуаргі Амін (студ., 2 курс)

Науковий керівник – доц. Чеканова Н. М.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

ФОРМУЛИ НАБЛИЖЕНОГО РІШЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ І-ОГО ПОРЯДКУ

Диференціальні рівняння, як звичайні, так і з частинними похідними виникають у різних галузях у фізики і математики, але й у екології і навіть у соціальних та економічних науках. Це природно визначає актуальність дослідження цієї галузі математики.

Є не так багато класів звичайних диференціальних рівнянь, які можуть бути проінтегровані, тобто їх загальні рішення будуть представлені у вигляді відомих функцій та інтегралів [1-6].

Але, на жаль, більшість навіть звичайних диференціальних рівнянь не допускає, крім рідкісних випадків, представлення їхніх рішень у явному аналітичному вигляді. Наприклад, рішення здавалося б на вигляд простих рівнянь $y' = y^2 - x$ [7, с.15] или $y' = y^2 + x$ [6, с.22] не можна уявити кінцевими комбінаціями елементарних функцій та інтегралів. Наприклад, немає рішень у цьому сенсі в великому класі диференціальних рівнянь Ріккати.

Крім того, іноді, навіть коли можливе знаходження загального рішення, воно призводить до таких складних формул, що з них майже не можна отримати користі [8, с.13].

Тому природно виникає завдання пошуку наближених розв'язків диференціальних рівнянь. Зазначимо, що переваги наближених методів оцінюються 1) за точністю результатів, що даються ними, і 2) за простотою обчислень [2, с. 61]. Звичайно, відразу ж можна вказати на можливість пошуку розв'язання диференціальних рівнянь наявними чисельними методами із

застосуванням сучасних потужних електронних обчислювальних машин, комп'ютерів.

Хоча ймовірно можна стверджувати, що одним із універсальних методів є метод прямого чисельного розв'язання задачі Коші із застосуванням сучасних потужних електронних обчислювальних машин.

Чисельний метод (метод ламаних Ейлера) розв'язання задачі Коші

Розв'язання задачі Коші геометрично представляє деяку так звану інтегральну криву. З початкової умови $y(x_0) = y_0$ нам вже відомі координати однієї (початкової точки $(x_0; y_0)$) на цій кривій. Тому обчислюючи координати $(x_k; y_k)$ інших точок кривої можна таким чином визначити інтегральну криву в цілому з якоюсь похибкою. Зручно, звичайно, координати x_k обирати рівновіддаленими один від одного, тобто $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_k = x_0 + k \cdot h$, де h є відстань між сусідніми точками. Якщо відрізок $[a; b]$, на котром шукаємо розв'язок, ділиться на n частин, то $h = (b - a) / n$.

Так як права частина рівняння, тобто функція $f(x, y)$ визначає тангенс кута нахилу дотичної до інтегральної кривої в точці (x, y) , то, наприклад, ординату y_1 при значенні $x = x_1$ можна наближено вирахувати за формулою $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0)$. Точки (x_0, y_0) та (x_1, y_1) з'єднуємо відрізком прямої вздовж напрямку дотичної з точки (x_0, y_0) . Аналогічно обчислюються ординати інших точок інтегральної кривої в точках $x_2, x_3, x_4, \dots, x_k, \dots, x_n$. З'єднуючи всі отримані точки (x_k, y_k) відрізками прямих, отримуємо так звану ламану лінію, яка приблизно визначає істинну інтегральну криву $y(x)$. Зазвичай, всі необхідні обчислення проводяться з допомогою ЕОМ чи персональних комп'ютерів. Зауважимо, що наближений

спосіб побудови інтегральної кривої називають методом Ейлера, а ламана лінія називається ламаною Ейлера.

До теперішнього часу існують інші способи побудови наближеної інтегральної кривої, які відрізняються один від одного переважно прийомами обчислення ординат y_k .

Нехай дана задача Коші

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0.$$

Послідовно обчислюються чотири числа k_1, k_2, k_3, k_4 за формулами:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0) \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_2/2\right) \\ k_4 &= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) \end{aligned} \quad (1)$$

Тоді наближене значення функції $y(x_1)$ в точці $x_1 = x_0 + h$ обчислюється за формулою

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + 1/6 \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2)$$

За наведеними формулами (1), (2) обчислюються $y(x_2)$ в точці $x_2 = x_1 + h$, а також у точках $x_n = x_{n-1} + h$. Аргументи $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ можуть бути не обов'язково рівновіддаленими один від одного на величину h . Крім цих, можна сказати найпростіших способів чисельного вирішення завдання Коші є велика кількість інших різних чисельних методів. Всі ці методи детально викладені у відповідних книгах. Крім того, більшість чисельних методів реалізовані у вигляді програм для обчислювальних машин та комп'ютерів.

Постановка задачі

Отже, як на відомо, більшість звичайних диференціальних рівнянь не інтегруються у квадратурах.

Завдання обчислення наближених рішень диференціальних рівнянь з початковою умовою у вигляді конкретних аналітичних формул проводиться з використанням ряду Тейлора та з застосуванням методу послідовних наближень.

Відповідно до цього методу вирішення завдання Коші

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ якщо } y(x = x_0) = y_0 \quad (3)$$

шукається у вигляді ряду Тейлора

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \quad (4)$$

Реально, звісно, будемо обмежені першими членами $N < \infty$ в ряді. Для побудови низки (4) треба визначити значення похідних. Не важко побачити, що знаючи рівняння (3) та початкове значення $y(x_0) = y_0$, ці обчислення досить легко здійсненні.

Справді, диференціюючи рівняння $y' = f(x, y)$ та враховуючи, що $y = y(x)$, бачимо, що друга похідна обчислюється за правилом диференціювання складної функції.

В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} y'' &= f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot f(x, y) \\ y''' &= f''_{xx}(x, y) + 2f''_{xy}(x, y) + f''_{yy}(x, y) \cdot (y')^2 + f'_y(x, y) \cdot y'' \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогічно обчислюються похідні наступних порядків

$$y^{(IV)}, y^{(V)}, \dots, y^{(k)}, y^{(N)}.$$

Вважаючи в отриманих формулах для похідних $x = x_0$, обчислюємо всі необхідні похідні $y^{(k)}(x_0)$. У результаті одержуємо у вигляді ряду наближену формулу для вирішення заданої задачі Коші (3).

Отримаємо за таким підходом наближену формулу для наступного завдання

$$y' = x^2 + y^2 \text{ за умови } y(x_0 = 0) = 0 \quad (6)$$

Відразу ж відзначимо, що задане диференціальне рівняння є рівнянням Ріккати і у наведеному вигляді воно не виражається через елементарні функції або через інтеграли від таких функцій,

Тому буде корисно знайти наближений розв'язок цієї задачі. Для отримання наближеної формули за допомогою ряду Тейлора з рівності

$$y' = x^2 + y^2$$

шляхом диференціювання знаходимо похідні вище за перший

$$\begin{aligned} y'' &= 2x + 2yy', \quad y''' = 2 + 2yy' + 2(y')^2, \\ y^{(4)} &= 2yy''' + 6y'y'', \quad y^{(5)} = 2yy^{(4)} + 8y'y''' + 6(y'')^2, \\ y^{(6)} &= 3yy^{(5)} + 20y'' \cdot y''', \\ y^{(7)} &= 2yy^{(6)} + 12y'y^{(5)} + 30y''y^{(4)} + 20(y''')^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Вважаючи в отриманих виразах (7) змінну $x = 0$, обчислюємо потрібні похідні

$$y''(0) = 0, y'''(0) = 2, y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = y^{(6)}(0) = 0, y^{(7)}(0) = 80.$$

Підставляючи ці значення до ряду Тейлора, знаходимо наближене рішення вихідного завдання (6) до членів 7-го ступеня

$$y|x| \approx y_7(x) = \frac{x^3}{3} + x^7/6$$

Література

1. Айнс Э. Л.. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Харьков ОНТИ гос. НКТП научно - техн. изд-во Украины, 1939. – 719 с.
2. Эльсгольц Л. Э.. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / М.: Наука, 1969. – 424 с.
3. Степанов В. В.. Курс дифференциальных уравнений / М.: Гос. изд-во техн. - теор. лит., 1953. – 468 с.
4. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-е второе, перераб. / М.: Высшая школа, 1963. – 546 с.
5. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. / М.: Наука, 1985. – 448 с.
6. Филиппов А. Ф.. Введение в теорию дифференциальных уравнений / М.: Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.
7. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.: Наука, 1984. – 272 с.

Бобров І. О. (студ., 1 курс),
Ковалевська М. Є. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Гадецька С. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ВИКОРИСТАННЯ СУЧАСНИХ МЕТОДІВ АНАЛІЗУ ДАНИХ У ВИРІШЕННІ ПРОБЛЕМ РОЗПІЗНАВАННЯ ВІЗУАЛЬНИХ ОБРАЗІВ

Бурхливе зростання автомобільного парку і обсягу перевезень веде до збільшення інтенсивності руху, що в умовах міст з історично сформованою забудовою приводить до виникнення різноманітних транспортних проблем. Зокрема, зростає і кількість дорожньо-транспортних випадків, при цьому на перехрестях, що займають незначну частину території міста, концентрується більше 30% всіх ДТП. Забезпечення швидкого й безпечного руху в сучасних містах вимагає застосування комплексу заходів архітектурно-планувального й організаційного характеру. За останні роки в нашій країні і за рубежом інтенсивно ведуться роботи зі створення складних автоматизованих систем із застосуванням керуючих ЕОМ, засобів автоматики, телемеханіки, диспетчерського зв'язку й телебачення для керування рухом у масштабах великого району або цілого міста. Досвід експлуатації таких систем переконливо свідчить про їхню ефективність у вирішенні транспортних проблем [1, 2].

При цьому багатоплановим завданням є задача обробки зображень як важливої дієвої складової вищеназваних систем. Сюди включають рішення завдань фільтрації шумів, геометричної корекції, градаційної корекції, посилення локальних контрастів, різкості.

Зупинимось на задачі розпізнавання візуальних об'єктів засобами математичного моделювання і статистичного аналізу. Використання статистичних засобів з метою побудови класифікаторів для образів візуальних об'єктів у системах комп'ютерного зору націлене на забезпечення необхідних показників результативності на підставі вивчення властивостей, змісту,

структури еталонних даних та впровадження отриманих знань у процес класифікації.

Елементом простору образів у середовищі векторних даних з дійсними чи бінарними компонентами при впровадженні структурних методів розпізнавання є скінченна множина дескрипторів ключових точок (КТ) зображення [2]. Останнього часу завдяки невеликим обчислювальним витратам набули популярності дескриптори BRISK та ORB з бінарними компонентами [2].

Статистичні розподіли даних є досконалим засобом подання та аналізу візуальних даних у системах розпізнавання образів. Якщо опис розпізнаваного об'єкту подано множиною векторів, статистичний апарат стає фундаментальним для прийняття класифікаційного рішення.

Особливе значення набуває ця задача при побудові нових ефективних просторів ознак, наприклад, шляхом агрегування множини дескрипторів за компонентами векторів [2].

Класифікатор за агрегованими ознаками для опису як множини дескрипторів організовує новий простір даних, в рамках якого оцінюється подібність векторів ознак розпізнаваного об'єкту та окремого еталону, а класифікація здійснюється шляхом оптимізації міри цієї подібності.

Головним завданням роботи є впровадження статистичного апарату аналізу даних для побудови та підтвердження ефективності класифікатора зображень за агрегованим поданням даних для опису як множини дескрипторів ключових точок.

Впровадимо відображення $T \rightarrow P$, $T \subset B^n$, із фіксованої множини бінарних векторів - дескрипторів КТ для певного об'єкту у числовий вектор $P = \{p_k\}_{k=1}^n$, компоненти якого будемо обчислювати за деяким встановленим правилом. Це надасть можливість здійснити ідентифікацію та розрізнення візуальних об'єктів на підставі даних меншої розмірності, так як множина векторів трансформується до одного вектора.

Будемо здійснювати класифікацію на підставі оцінювання відмінності значень векторів P для різних описів, розрахунків яких пропонується здійснити двома різними способами, що має на меті різнобічне врахування структурних особливостей досліджуваних даних і, як результат, забезпечення ефективності процесу розпізнавання. Відповідно до способу визначення векторів P знайдемо усереднену суму бінарних значень (число одиниць) послідовно за кожним бітом окремо, базуючись на повній множині опису об'єкту.

Зауважимо, що процес порівняння двох об'єктів може базуватися на побітовому порівнянні значень, розрахованих для кожного з таких об'єктів, які в певному сенсі можуть розглядатися як агреговані за бітами кількісні величини. Але така ідея для класифікаційного правила не достатньо виправданою для прикладного застосування через громіздкі обчислення.

У роботі пропонується здійснювати класифікацію досліджуваних об'єктів на підставі параметру розподілу p_i . Виходячи із загальних міркувань, будемо вважати вектор значень $P^{(1)} = (p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)})$, отриманий на підставі опису, агрегованим параметричним поданням опису.

Розглянемо $P^{(1j)}$, $j=1, \dots, m$, – вектор, агрегований за стовпцями матриці для бінарного опису еталону E_j з номером $j=1, \dots, m$, та $P^{(10)}$ – агрегований вектор для опису досліджуваного об'єкту O . Для здійснення співставлення агрегованих описів об'єктів і, відповідно, вирішення задачі класифікації, введемо класифікатор

$$K^{(1)}: k^{(1)} = \arg \min_{j \in [1; m]} D^{(1j)}, \quad (1)$$

де D представляє собою нормовану відстань між відповідними бітами агрегованих векторів досліджуваного об'єкта і еталона.

Класифікатор (1) реалізує принцип аналізу «об'єкт – еталон» на основі агрегованого векторного подання P . Наголосимо, що вираз (1) можна розглядати як класифікаційне правило, що сформульоване у термінах відстані.

Для підтвердження значущості прийняття рішення, а також для контролю отриманого результату класифікатора (1) із залученням агрегованих

векторів також можна задіяти методи математичної статистики, а саме, парний двох-вибірковий t-тест для середніх [3], який передбачає попарне (по-координатне) порівняння досліджуваних об'єктів – векторів P на предмет статистично значущої відмінності їхніх середніх величин. При використанні вказаного тесту розглядаються дві вибірки однакового об'єму, в яких елементи мають фіксоване місце розташування (як координати).

У процесі перевірки нульової гіпотези щодо рівності середніх в цих вибірках застосовується статистика Стюдента [3]; встановлюється рівень значущості α , рівний ймовірності здійснити помилку I роду. Тоді, якщо р-значення виявляється меншим за встановлене α , то нульова гіпотеза відхиляється, і приймається альтернативна гіпотеза щодо значущої відмінності середніх (на рівні значущості α). В іншому випадку немає підстав відхилити нульову гіпотезу про відсутність статистично значущих відмінностей між середніми [3], і, відповідно, між об'єктом і окремим еталоном, що і вирішує задачу класифікації із статистичної точки зору.

Анотація. У роботі здійснено кількісний аналіз цифрової обробки зображень, що може бути закладений в основу функціонування сучасних систем керування транспортними потоками і заснований на математичному, програмному і інформаційному підґрунті.

Ключові слова: класифікаційне рішення, системах розпізнавання образів, аналіз даних, статистичний апарат.

Література

1. Алексієв В.О. Принципи інтелектуалізації моніторингу транспортних засобів та систем / В.О. Алексієв, В.О. Хабаров, О.В. Дзюбенко // Автомобильный транспорт : Сборник научн. трудов. – 2007. – Вып. 20. – С. 143–145.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982.— Т. 2. — 790 с.
3. Data Analysis with Microsoft Excel. Kenneth N. Berk, Patrick Carey. Brooks/Cole, 2009. - 596 p.

Воронков С. В. (студ., 1 курс),
Карлюкіна Л. О. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Гадецька С. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ЗАСТОСУВАННЯ ТАБЛИЧНОГО РЕДАКТОРА EXCEL В ПРОЦЕСІ АУДИТУ АВТОТРАНСПОРТНОГО ПІДПРИЄМСТВА

Розглянемо деякі окремі задачі, з якими з точки зору автоматизації аналітичної діяльності стикаються аудитори під час перевірки автотранспортних підприємств.

Одна з поширених – яка виникає на початковому етапі перевірки - може бути пов'язана із потребою випадковим способом відібрати певну кількість документів з із усієї їх сукупності. Продемонструємо на прикладах можливий порядок виконання таких завдань, використовуючи табличний редактор EXCEL.

Продемонструємо спочатку порядок відбору випадковим способом 50 документів з 500, якщо порядкові номери документів – від 1 до 500.

Згенеруємо спочатку таблицю з 50-ти випадкових чисел (від 0 до 500).
Для цього:

- виділяємо в таблиці EXCEL комірку для першого випадкового числа;
- послідовно виконуємо: fx→Математические→СЛЧИС();
- в діалогове вікно вводимо параметри, що характеризують діапазон послідовних номерів, з яких здійснюється відбір. Оскільки в прикладі діапазон становить від 0 до 500, то у вікні має бути СЛЧИС()*500; якщо б діапазон починався, скажімо, з 100, то у вікні потрібний запис СЛЧИС()*100+500 (див. рис.1);

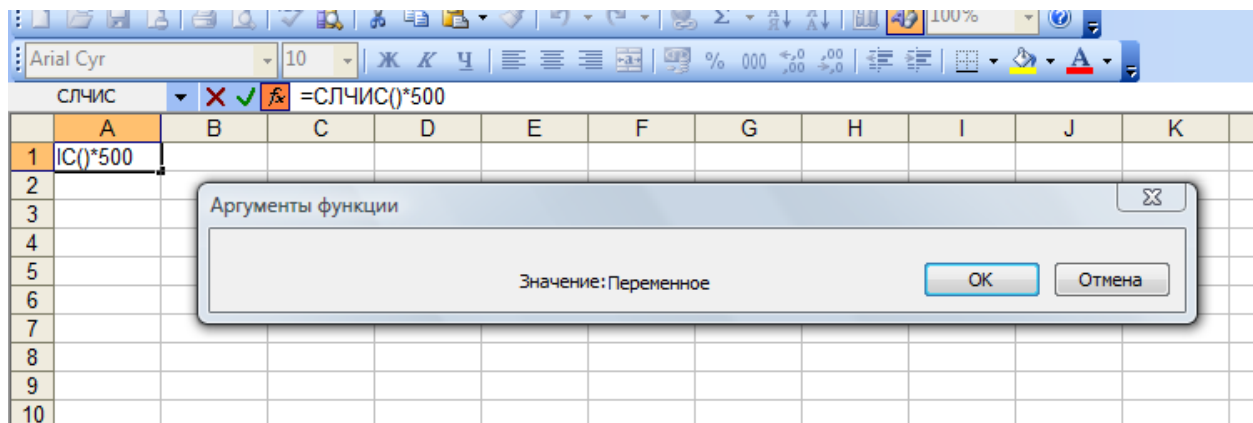


Рисунок 1. Порядок використання функції СЧИСЛ

- натискаємо Enter, у виділеній комірці отримуємо перше випадкове число, округлюємо його до цілого значення;
- для отримання усіх 50-ти номерів копіюємо виділену комірку стандартним способом. Таким чином, до вибірки потраплять 50 документів з номерами 161, 247, ..., 280 (рис. 2).

	A	B	C	D	E
1	161				
2	247				
3	27				
4	16				
...	...				
46	380				
47	396				
48	75				
49	160				
50	280				
51					

Рисунок 2. Результат відбору випадковим способом 50 документів з 500

Перейдемо до наступної типової аудиторської задачі, яку прокоментуємо на наступному прикладі. Необхідно способом механічного відбору відібрати 40 документів з 1000. Порядкові номери документів – від 1 до 1000.

Розраховуємо крок відбору: $1000:40=25$. Отже, кожна з 40 груп містить по 25 послідовних номерів. З першої групи (1-25) випадково обираємо номер: наприклад, 4. Тоді наступні номери: 29, 54, 79,

Зазначимо, що у випадку нецілого значення величини, що розраховується для визначення кроку відбору, її округлюють у бік меншого цілого значення.

Зауважимо, що для здійснення механічного відбору елементи сукупності також повинні мати наскрізну нумерацію, при цьому передбачається, що у послідовності елементів немає циклічності.

Нехай тепер документи у кількості 3700 од. розподілені за чотирма вартісними проміжками (таблиця 1, в дужках наведені середні значення відповідного проміжку).

Таблиця 1

Розподілення документів за зазначеною вартістю

Вартісні показники, млн. грн	Кількість документів
0,0001 – 0,02 (0,01)	2000
0,02 – 0,1 (0,06)	1000
0,1 – 0,4 (0,25)	500
0,4 – 1 (0,7)	200
Разом	3700

Розглянемо завдання щодо потреби відбору з наявних документів 200 примірників наступними методами:

- 1) пропорційного розшарування, зокрема,
 - за кількістю документів (а);

- за вартістю (б);

2) непропорційного розшарування.

Проміжні розрахунки та результати внесемо до таблиці 2.

Таблиця 2

Результати відбору документів

Вартісні показники, млн. грн.	Кількість документів	Сумарна вартість в проміжку, млн. грн.	Об'єм вибірки		
			За методом 1) а)	За методом 1) б)	За методом 2)
0,0001 – 0,02 (0,01)	2000	$0,01 \cdot 2000 = 20$	$(2000:3700) \cdot 200 \approx 108$ (доля окументів з першого прошарку помножується на встановлений обсяг вибірки)	$(20:345) \cdot 200 \approx 12$ (вартісна доля документів з першого прошарку помножується на встановлений обсяг вибірки)	$200:4=50$ (встановлений обсяг вибірки ділиться на кількість прошарків)
0,02 – 0,1 (0,06)	1000	60	$(1000:3700) \cdot 200 \approx 54$	$(600:345) \cdot 200 \approx 35$	50
0,1 – 0,4 (0,25)	500	125	$(500:3700) \cdot 200 \approx 27$	$(125:345) \cdot 200 \approx 72$	50
0,4 – 1 (0,7)	200	140	$(200:3700) \cdot 200 \approx 11$	$(140:345) \cdot 200 \approx 81$	50
Разом	3700	345	200	200	200

Як бачимо, результат формування вибірки суттєво залежить від способу її формування, що, в свою чергу, може бути пов'язано зі змістом безпосередньої аудиторської задачі.

Анотація. В роботі вивчено можливість застосування вибірових методів в процесі аудиту автотранспортного підприємства, визначено кількісну оцінку ризиків аудиторської діяльності, розглянуто вибірові оцінки параметрів сукупності, яка підлягає обстеженню.

Ключові слова: вибірка, випадковий відбір, механічний відбір, пропорційне розшарування, функції EXCEL.

Література

1. Четыркин Е. М., Васильева Н. Е. Выборочные методы в аудите. - М.: Дело, 2003. - 144 с.
2. Петренко С. Н. Риски аудиторской деятельности: Научно-практическое пособие. – К.: Эльга, Ника-Центр, 2003. – 84 с.
3. Івахненко С. В. Комп'ютерний аудит: контрольні методики і технології. – К.: Знання, 2005. – 286 с.

ЛІНІЙНІ РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ ІЗ ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ЇХ РЕАЛІЗАЦІЯ У ЦИФРОВИХ ПРИСТРОЯХ

Різницеві рівняння, як і диференціальні рівняння, застосовуються для математичного опису природних явищ. Різницеві рівняння описують дискретні процеси, в той час як диференціальні рівняння – неперервні.

В 19 сторіччі та у першій половині 20 сторіччя вважалося, що майже усі природні явища описуються диференціальними рівняннями. Внаслідок цього диференціальні рівняння вивчаються у курсі вищої математики усіх технічних вишів. Втім, для наближеного розв’язання диференціальних рівнянь використовуються різницеві рівняння. У другій половині 20 сторіччя широке розповсюдження комп’ютерів та пов’язаних з ними дискретних процесів (наприклад, процесів роботи цифрових пристроїв) зробило актуальним для інженерів вивчення теорії різницевого рівнянь.

Лінійне різницеве рівняння

Коли ми розв’язуємо диференціальне рівняння, ми знаходимо невідому функцію. При розв’язанні різницевого рівняння ми знаходимо невідому послідовність $X = \{x(0), x(1), \dots\}$. Будемо позначати її k -ий член $x(k)$, де k належить множині $Z_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Нехай F - функція $n+1$ змінного.

Означення. Рівняння виду

$$F(x(k+n), x(k+n-1), \dots, x(k+1), x(k)) = 0 \quad (1)$$

називається **різницевою рівнянням** n -го порядку.

Приклади.

1. У послідовності $X = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$ кожний наступний член вдвічі більший від попереднього, тобто для довільного $k \in Z_0$ маємо

$$x(k+1) = 2x(k) \quad (2)$$

Це різницеве рівняння першого порядку. Зауважимо, що послідовність X можна задати рівністю $x(k) = 2^k$, $k \in Z_0$.

2. Рівняння

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = 0 \quad (3)$$

є різницеvim рівнянням другого порядку, а

$$x(k+3) + 5x(k+1) + 7x(k) = 2^k \quad (4)$$

є різницеvim рівнянням третього порядку.

Означення. Послідовність $X = g(k)$ називається **розв'язком** різницевого рівняння (1), якщо підстановка $x(k) = g(k)$ перетворює рівняння (1) у тотожність.

Приклад. Послідовність $x(k) = 2^k$ є розв'язком рівняння (2), оскільки після її підстановки в (2) одержуємо тотожність $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$. Зауважимо, що для довільної сталої C послідовність $x(k) = C \cdot 2^k$ теж є розв'язком рівняння (2), оскільки $C \cdot 2^{k+1} = 2C \cdot 2^k$.

Початкові умови для різницевого рівняння n -го порядку задають n послідовних членів його розв'язку. Як правило, цими членами є $x(0), x(1), \dots, x(n-1)$.

Означення. **Лінійне різницеве рівняння (ЛРР)** n -го порядку з сталими коефіцієнтами має вид

$$a_0 x(k+n) + a_1 x(k+n-1) + \dots + a_{n-1} x(k+1) + a_n x(k) = b(k) \quad (5)$$

Числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ називаються коефіцієнтами, послідовність $b(k)$ - вільним членом (або правою частиною) рівняння.

Означення. Якщо $b(k) = 0$ для довільного $k \in Z_0$, рівняння (5) називається **однорідним**, а у протилежному випадку – **неоднорідним**.

Приклади. Рівняння (3) є лінійним однорідним різницеvim рівнянням з сталими коефіцієнтами, рівняння (4) - лінійним неоднорідним різницеvim рівнянням з сталими коефіцієнтами, а рівняння

$$x(k+2) \cdot x(k+1) + x(k) = 0$$

не є лінійним різницеvim рівнянням.

В подальшому будемо розглядати тільки лінійні різницеvі рівняння з сталими коефіцієнтами.

1. Розв'язання лінійного однорідного різницеvого рівняння.

За означенням лінійне однорідне різницеvе рівняння має вид

$$a_0 x(k+n) + a_1 x(k+n-1) + \dots + a_{n-1} x(k+1) + a_n x(k) = 0 \quad (6)$$

Позначимо через $Lx(k)$ ліву частину цього рівняння:

$$Lx(k) = a_0 x(k+n) + a_1 x(k+n-1) + \dots + a_{n-1} x(k+1) + a_n x(k) \quad (7)$$

Тепер однорідне рівняння (2.1) можна записати так:

$$Lx(k) = 0 \quad (8)$$

а неоднорідне рівняння (1.5) – так:

$$Lx(k) = b(k). \quad (9)$$

Теорема 1 (лінійність операції L). Для довільних послідовностей $x(k)$, $x_1(k)$, $x_2(k)$ та довільної сталої C маємо

$$a) \quad L(Cx(k)) = CLx(k) \quad (10)$$

$$b) \quad L(x_1(k) + x_2(k)) = Lx_1(k) + Lx_2(k) \quad (11)$$

Доведення. а) Замінивши у обох частинах рівності (7) $x(k)$ на $Cx(k)$ та винісши C за дужки, одержимо рівність (10).

б) За формулою (7) маємо:

$$Lx_1(k) = a_0 x_1(k+n) + a_1 x_1(k+n-1) + \dots + a_{n-1} x_1(k+1) + a_n x_1(k),$$

$$Lx_2(k) = a_0 x_2(k+n) + a_1 x_2(k+n-1) + \dots + a_{n-1} x_2(k+1) + a_n x_2(k).$$

Додамо ці рівності та згрупуємо в правій частині доданки з однаковими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} L(x_1(k) + x_2(k)) &= \\ &= a_0 (x_1(k+n) + x_2(k+n)) + \dots + a_{n-1} (x_1(k+1) + x_2(k+1)) + a_n (x_1(k) + x_2(k)) = \\ &= Lx_1(k) + Lx_2(k). \end{aligned}$$

Наслідок 2. Сума розв'язків однорідного рівняння (8) є розв'язком рівняння (8). Добуток довільної сталої C на розв'язок однорідного рівняння (8) знов є розв'язком рівняння (8).

Доведення. Нехай $x_1(k)$ та $x_2(k)$ - розв'язки однорідного рівняння (8), тобто $Lx_1(k) = 0$ та $Lx_2(k) = 0$. Додавши ці рівності та використавши рівність (11), одержимо $L(x_1(k) + x_2(k)) = 0$, тобто $x_1(k) + x_2(k)$ - розв'язок рівняння (8).

Помноживши рівність $Lx_1(k) = 0$ на число C та використавши (10), одержимо $L(Cx_1(k)) = 0$, тобто $Cx_1(k)$ - розв'язок рівняння (8).

Означення. Многочлен

$$M(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

називається **характеристичним многочленом** рівняння (5), а рівняння

$$M(p) = 0$$

тобто

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (12)$$

називається **характеристичним рівнянням** для рівняння (5).

Наприклад, для рівняння

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = 0$$

характеристичним многочленом буде $M(p) = p^2 - 3p + 2$, а характеристичним рівнянням буде $p^2 - 3p + 2 = 0$.

Розглянемо дію операції L на спеціальну послідовність $x(k) = \gamma^k$, де γ - деяке число.

Теорема 3. $L(\gamma^k) = M(\gamma)\gamma^k$.

Доведення.

$$\begin{aligned} L(\gamma^k) &= a_0 \gamma^{k+n} + a_1 \gamma^{k+n-1} + \dots + a_{n-1} \gamma^{k+1} + a_n \gamma^k = \\ &= (a_0 \gamma^n + a_1 \gamma^{n-1} + \dots + a_{n-1} \gamma^1 + a_n) \gamma^k = M(\gamma) \gamma^k. \end{aligned}$$

Теорема 4 (про розв'язок лінійного однорідного різницевого рівняння).
Якщо $p_1, \dots, p_n$ - корені характеристичного рівняння (2.7), то для довільних сталих $C_1, \dots, C_n$ послідовність

$$x_{з.о.}(k) = C_1 p_1^k + \dots + C_n p_n^k \quad (13)$$

є розв'язком лінійного однорідного різницевого рівняння (8).

Доведення. Оскільки p_1 - корінь характеристичного рівняння (12), то $M(p_1) = 0$. За теоремою 3

$$L(p_1^k) = M(p_1) p_1^k = 0,$$

тобто послідовність p_1^k є розв'язком лінійного однорідного рівняння (8). Так само доводимо, що кожна з послідовностей $p_2^k, \dots, p_n^k$ є розв'язком рівняння (8). Тому за наслідком 2 послідовність (13) також є розв'язком рівняння (8).

Можна довести, що якщо корені $p_1, \dots, p_n$ характеристичного рівняння попарно різні, то довільний розв'язок однорідного рівняння (8) має вид (13). Тому формула (2.8) називається **загальним розв'язком** лінійного однорідного рівняння.

Розглянемо тепер випадок, коли деякі з коренів характеристичного рівняння рівні (такі корені називають кратними).

Означення. Число m називається кратністю кореня α многочлена $f(p)$, якщо рівно m коренів многочлена $f(p)$ дорівнюють α .

Корені кратності один називають простими, корені кратності два та більше – кратними.

Приклад. Многочлен $p^2 - 6p + 9 = (p - 3)^2$ має корінь 3 кратності два. Многочлен $(p - 1)(p + 4)^3$ має простий корінь 1 та корінь -4 кратності три.

Узагальнимо теорему 4 на випадок, коли характеристичне рівняння може мати кратні корені.

Нехай α – корінь характеристичного рівняння кратності m . Співставимо йому вираз

$$\alpha^k (C_1 + C_2 k + \dots + C_m k^{m-1}) \quad (14)$$

Теорема 5. Загальний розв’язок лінійного однорідного різницевого рівняння (8) є сумою виразів (14), узятих по усіх коренях α характеристичного рівняння.

Література

1. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. - М.: Наука, 1967. – 375 с.
2. Фудзисава Т, Касами Т. Математика для радиоинженеров: Теория дискретных структур. - М.: Радио и связь, 1984. – 240 с.

Купцова А. (студ., 2 курс)

Науковий керівник – проф. Ярхо Т. О.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

ФУНДАМЕНТАЛЬНА РОЛЬ ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОМУ ТА ІНТЕГРАЛЬНОМУ ЧИСЛЕННІ

Вивчення обов’язкової дисципліни «Вища математика» у ЗВО технічних і транспортних напрямів, як правило, відбувається протягом першого і другого семестрів бакалаврату. В цей період за навчальними планами переважно здійснюється загальноосвітня підготовка здобувачів. Виклад профільних дисциплін розпочинається пізніше. Отже, обов’язкова математична освіта у ЗВО є відірваною за часом від фахових курсів, у процесі опанування яких здобувачі мають можливість оцінити значущість набутих математичних знань і здатностей. Указані обставини призводять до виникнення у здобувачів низки запитань стосовно доцільності вивчення того чи іншого розділу математики майбутніми фахівцями нематематичних спеціальностей, з точки зору подальшої застосовності пропонованого матеріалу. Природно, що опанування математичних аспектів високого рівня абстракції, важких для розуміння, викликає у здобувачів зазначені запитання в першу чергу. Теорія границь – фундаментальний і найважливіший розділ вищої математики, є одним із таких складних аспектів.

У подоланні труднощів опанування математичних дисциплін, на наш погляд, надзвичайну роль відіграє їхнє мотивоване вивчення. Саме таке

опрацювання математичного матеріалу надає навчанню значущий сенс. При цьому власне навчальна діяльність здобувачів стає для них важливою метою. Вважаємо, що мотивоване вивчення математичних дисциплін здобувачам має забезпечити такий їхній виклад педагогами, в якому стосовно математичних понять і тверджень демонструється:

- спільність, зв'язок і спадкоємність у розділах вищої математики;
- застосовність у розв'язаннях професійно-прикладних задач за фахом здобувачів.

Із зазначених позицій розглянемо фундаментальну роль поняття границі в диференціальному та інтегральному численні.

Теорія границь складає основу математичного аналізу – сукупності розділів математики, що об'єднують диференціальне та інтегральне числення. За образним виразом відомого педагога-математика О. Я. Хинчина, «математичний аналіз до елементарних операцій алгебри вже на перших своїх кроках приєднує основну та найважливішу аналітичну операцію – граничний перехід» [1]. Поняття границі є підґрунтям основних понять математичного аналізу: неперервності, похідної, диференціала, визначеного інтеграла, кратних і криволінійних інтегралів. Тому розуміння суті поняття границі являє собою необхідну умову якісного засвоєння змісту зазначених математичних понять і відповідних теорій, а також їхніх практичних застосувань. Глибина розуміння теорії границь визначає рівень здатності здобувачів щодо самостійного опанування апарату математичного аналізу та відповідних прикладних питань [1].

Строге означення поняття границі функції в точці на мові « $\varepsilon - \delta$ », що наводиться в підручниках [2], здобувачам 1-го курсу бакалаврату нематематичних спеціальностей представляється надзвичайно абстрактним і складним. На нашу думку, до розуміння і засвоєння цього поняття доцільно дійти поступово, розпочинаючи з якісного формулювання уявлення про границю функції і надалі збільшуючи рівень абстракції означення. З точки

зору здобувачів бакалаврату, зрозумілим було б наступне, вперше введені поняття границі функції в точці [3].

Нехай незалежна змінна x необмежено наближається до числа x_0 . Це означає, що ми надаємо x такі значення, що скільки завгодно наближаються до числа x_0 , але не дорівнюють x_0 . Запишемо це так: $x \rightarrow x_0$ і будемо говорити, що x прямує до x_0 . При цьому може статися, що відповідні значення функції $f(x)$ необмежено наближаються до певного числа A . Тоді говорять, що число A є границею функції $y = f(x)$ коли $x \rightarrow x_0$.

Отже, вводимо

Означення 1. Число A називається **границею** функції $y = f(x)$, коли $x \rightarrow x_0$, якщо для всіх значень x , що достатньо мало відрізняються від числа x_0 , відповідні значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A .

Це записується так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{або} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A.$$

Вважаємо, що наведене зрозуміле якісне означення можна доповнити додатковим матеріалом [4] для самостійного вивчення, який готує здобувачів до строго остаточного означення границі функції $y = f(x)$ у точці x_0 .

Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Це означає, що у разі достатньо близьких до x_0 значень x числа $y = f(x)$ будуть достатньо близькими до числа A . Якщо зобразити точки A і y на осі ординат, то слова «достатньо близькі» означають, що точки y потрапляють у будь-який достатньо-малий інтервал (окіл) $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Це можна записати за допомогою нерівності $|y - A| < \varepsilon$.

Слова «достатньо близько до x_0 » означають існування інтервалу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на осі абсцис, з якого вибираються значення x такі, що $|y - A| < \varepsilon$. Геометрична інтерпретація підказує, що розмір δ залежить від вибору ε . Тепер за допомогою геометричних образів неважко буде засвоїти наступне

Означення 2. Число A називається границею функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$, якщо для будь-якого інтервалу $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ з центром у точці A на осі ординат ($\varepsilon > 0$ – довільне стале число) можна указати такий інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ з центром у точці x_0 на осі абсцис (δ залежить від ε), що для всіх точок x із δ -інтервалу відповідні точки $y = f(x)$ на осі ОУ потрапляють у ε -інтервал (рис. 1).

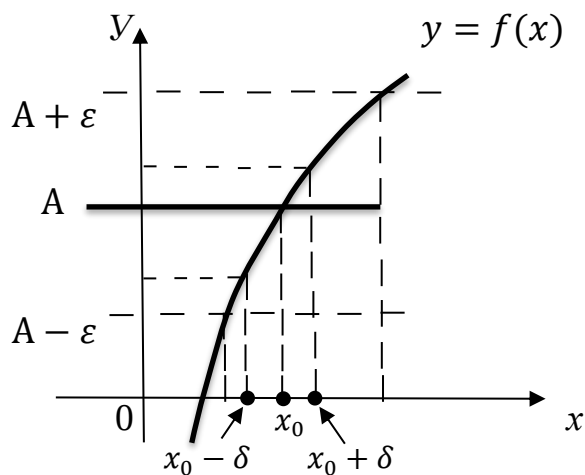


Рис. 1

Для формування мотивованого ставлення здобувачів до навчання, на нашу думку, корисно було б у процесі введення у розгляд нових математичних об'єктів, що ґрунтуються на означенні границі функції $y = f(x)$ в т. x_0 , кожного разу підкреслювати фундаментальність і загальність вказаного поняття. Дійсно, граничний перехід включають [2]:

- означення неперервності функції $y = f(x)$ в точці x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0);$$

- означення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

- означення диференціала функції $y = f(x)$ в точці x_0 :

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

(як те, що містить $f'(x_0)$);

- означення частинних похідних по змінним x і y функції двох змінних

$z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y};$$

- означення визначеного інтеграла

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

як границі інтегральної суми;

- означення подвійного інтеграла

$$\iint_D f(x, y) dx, dy = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

як границі інтегральної суми тощо.

Після вивчення матеріалу стосовно зазначених математичних об'єктів пропонуємо подальше формування мотивації здобувачів. Продовження акцентування фундаментальності поняття границі можна здійснити шляхом наведення відповідних практичних застосувань, наприклад, за пропонованою схемою (рис. 2).

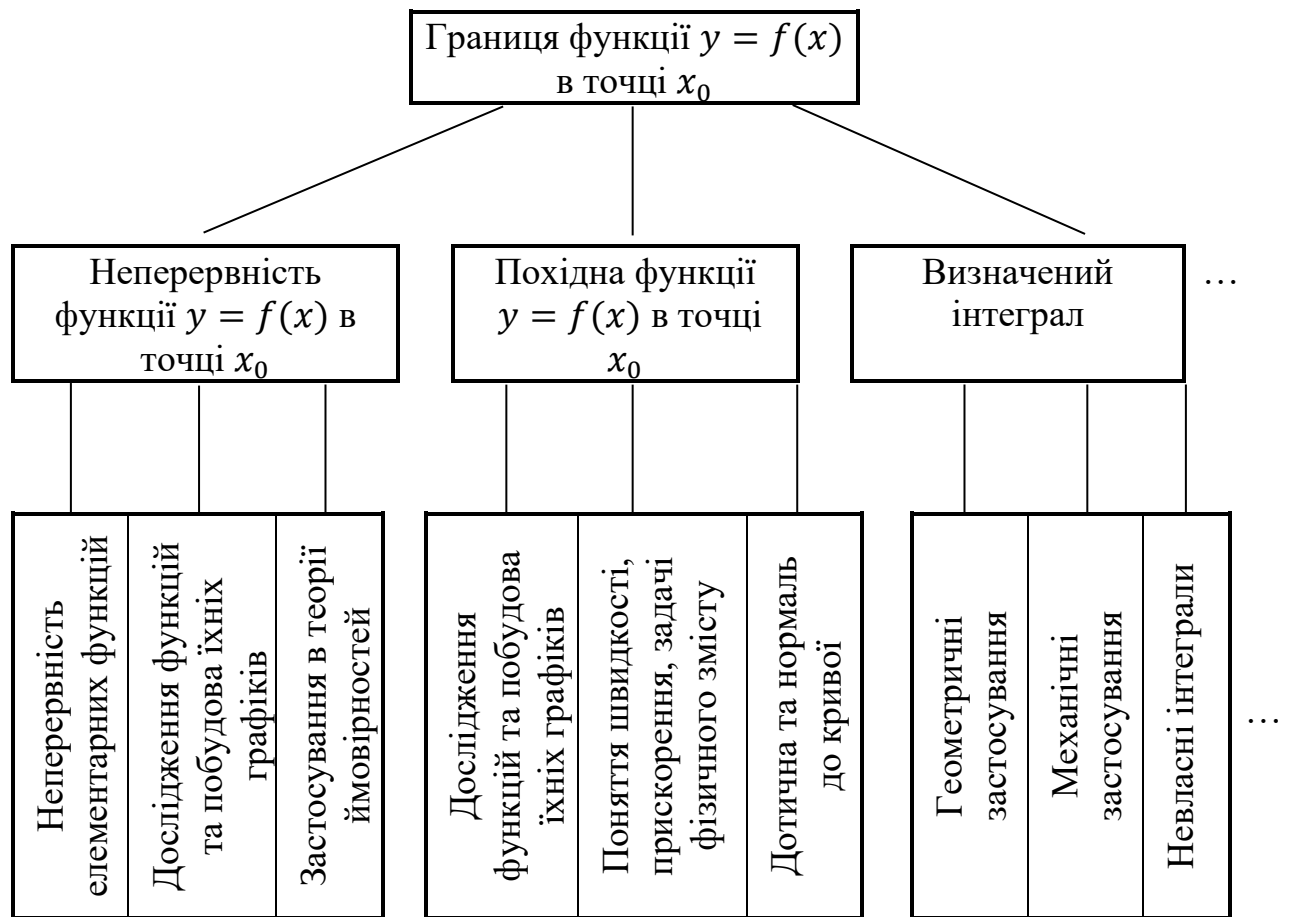


Рис. 2

Висновок. У роботі наведено аргументоване акцентування фундаментальної ролі поняття границі в диференціальному та інтегральному численні. Автори впевнені, що запропонований підхід вмотивує здобувачів ЗВО на подальше поглиблення вивчення теорії границь і, у першу чергу, на засвоєння строгого математичного означення поняття границі на мові « $\varepsilon - \delta$ ». Продовження дослідження убачаємо у більш детальному виявленні зв'язків між поняттям границі та різними аспектами математичного аналізу не тільки на рівні означень, а й на рівні обґрунтування результатів.

Література

1. Ярхо Т. О. Фундаменталізація математичної підготовки майбутніх фахівців технічного профілю у вищих навчальних закладах: монографія. Х: ФОП Гончаренко В. Ю., 2016, - 284 с.
2. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. Київ: «А.С.К.», 2006. – 648 с.

3. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. М.: «Наука». Главное издательство физико-математической литературы, 1967. – 736 с.

4. Вступ до математичного аналізу. Модуль 3: Методичні рекомендації для виконання модульної роботи № 1 / Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені акад. В. Лазаряна: Уклад.: Т. М. Бусарова, О. В. Звонарьова, Н. В. Міхеєва, В. О. Петренко. – Дніпро: ДНУЗТ, 2007. – 58 с.

УДК 511

Ковальчук О. О. (студ., 5 курс)

Науковий керівник – проф. Савченко О. Г.

Херсонський державний університет (Івано-Франківськ, Україна)

ПРОБЛЕМИ АДИТИВНОЇ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

На відміну від мультиплікативної теорії чисел, яка є окремою, самостійною галуззю науки, адитивна теорія чисел до недавнього часу представляла з себе велику кількість спостережень, досліджень, гіпотез, та проблем від вирішення яких, ми сьогодні дуже далекі. [1]

Математика має велике історичне та технічне значення, задачі типу «проблем адитивної теорії чисел» дають змогу, перевіряти можливості сучасної обчислювальної техніки. Завдяки досягненням у дисциплінах природничо-математичного циклу зараз людина може зібрати необхідні матеріали, сформулювати гіпотези, вирішити питання що були відкриті протягом багатьох десятиріч, і до яких не мали доступу математики попередніх віків.[1]

Адитивна теорія чисел зі зрозумілими формулюваннями і в той же час надзвичайно складними доказами і оцінками, що вражають уяву, надає надзвичайно багатий матеріал, де можна зримо спостерігати і порівнювати зусилля багатьох поколінь математиків і обчислювачів.

Адитивні проблеми - проблеми теорії чисел про розкладання цілих чисел на складові заданого виду. Розв'язання адитивних проблем призвело до створення нових методів теорії чисел. [3]

До класичних проблем адитивної теорії чисел відносять такі:

- Проблема Гольдбаха (гіпотеза Гольдбаха, проблема Ейлера, бінарна проблема Гольдбаха) - твердження про те, що будь-яке парне число, починаючи з 4, можна подати у вигляді суми двох простих чисел.

Проблема Гольдбаха є відомою відкритою математичною проблемою; вонв в сукупності з гіпотезою Рімана включена під номером 8 до списку проблем Гільберта (1900) і на сьогодні залишається однією з відкритих. [4]

- Варто відмітити теорему Лагранжа про подання натуральних чисел у вигляді суми більше чотирьох квадратів натуральних чисел. [6]

Конструктивно відмітити наявність наступних гіпотез адитивної теорії чисел.

- Проблема Варінга (1770 р.) є узагальненням теореми Лагранжа, яка стверджує, що послідовність, утворена фіксованим степенем n чисел натурального ряду, утворює в ньому базис кінцевого порядку $G(n)$, тобто. що кожне досить велике натуральне число N може бути представлене у вигляді

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n = N,$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ — натуральні числа та кількість доданків r неперевершує фіксовану величину $G(n)$, заданої порядком базису послідовності $\{x^n\}$, або функцією Харді. [5]

- Теорема Ферма-Ейлера про подання простого числа у вигляді суми двох квадратів.

Відповідь на питання про подання числа, як суми двох квадратів була сформульована Ферма та доведена Ейлером. [7]

- Гіпотези Поллока

Гіпотеза 1: будь-яке натуральне число є сумою не більше ніж дев'яти кубічних чисел. Доведено на початку XX століття.

Гіпотеза 2: будь-яке натуральне число є сумою не більше ніж одинадцяти центрованих дев'ятикутних чисел. Досі не доведено та не спростовано.

Гіпотеза 3: будь-яке натуральне число є сумою не більше ніж п'яти тетраедральних чисел. Досі не доведено, хоча перевірено для всіх чисел,

менше 10 мільярдів. Знайдено 241 число, для яких чотирьох тетраедральних чисел недостатньо, скоріше всього, останє з них рівне 343867.

Гіпотеза 4, що узагальнює частину попередніх. Позначимо m число вершин одного з п'яти правильних багатогранників, а n - число його граней (4, 6, 8, 12 або 20). Тоді кожне натуральне число є сумою не більш ніж $m + 1$ фігурних чисел, відповідних цьому багатограннику, тобто:

($n = 4$, тетраедр) не більше 5 тетраедральних чисел;

($n = 6$, октаедр) не більше 7 октаедральних чисел;

($n = 8$, куб) не більше 9 кубічних чисел;

($n = 12$, ікосаедр) не більше 13 ікосаедральних чисел;

($n = 20$, додекаедр) не більше 21 додекаедральних чисел.

Ця гіпотеза досі не доведена та не спростована. [2]

Для вирішення адитивних проблем використовують аналітичні, алгебраїчні, елементарні та змішані методи доведення. В залежності від обраних методів розв'язання, адитивні задачі є частинами й інших розділів теорії чисел – аналітичної, алгебраїчної теорії чисел, імовірнісної теорії чисел.[3]

Задачі розглянутого типу використовують при підготовці фахівців в області комп'ютерних наук.

Теорія чисел, як всім відомо пов'язана з такими математичними дисциплінами: геометрія, алгебра, математичний аналіз, комбінаторика, комп'ютерні науки. Вона могла б бути проміжним курсом, що поєднує всі ступені викладання математики, що відповідає загальному математичному рівню.

Теорія чисел дає найширший простір складання завдань і контрольних завдань, будь-якого формату і рівня складності, включаючи як елементарні, і цілком серйозні дослідницькі теми самостійного експериментування, зокрема з допомогою комп'ютерів, графічних методів тощо.

Теорія чисел на сьогодні стала однією з найважливіших галузей математики. З точки зору реального застосування, до цього можна віднести

обчислювальні алгоритми, які здатні оперувати величезними цифрами, обробляти та передавати інформацію, кодувати тощо.

Анотація. Публікація актуалізує питання важливості вивчення математики у сучасному світі. Стаття висвітлює важливість теорії чисел у дисциплінах природничо-математичного циклу, та її зв'язок з суміжними дисциплінами. Робота містить огляд класичних проблем адитивної теорії чисел, та їх застосування під час вивчення комп'ютерних наук.

Ключові слова: теорія чисел, адитивна теорія чисел, дисципліни природничо-математичного циклу, проблеми адитивної теорії чисел.

Література

- 1.Вавилов Н. А. Компьютер как новая реальность математики: II проблема Варинга. [Електронний ресурс] Режим доступу: <http://ipo.spb.ru/journal/content/2237/Компьютер%20как%20новая%20реальность%20математики.%20II.%20Проблема%20Варинга.pdf>
- 2.Гіпотези Поллока. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Гіпотези_Поллока
- 3.Математическая Энциклопедия. Ред. Коллегия: И. М. Виноградов (глав. ред.) [и др..] Т. 1 – М., «Советская Энциклопедия», 1977 т. 1. А-Г. 1977.
- 4.Проблема Гольдбаха. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Проблема_Гольдбаха
- 5.Рахмонов Ф. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга–Гольдбаха со сдвинутыми простыми числами: автореф. дис. ... канд. Физ.-мат. наук: 16.12.2011/ Рахмонов Фируз Заруллович; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова механико-математический факультет. – Москва, 2011. –14 с.
- 6.Теорема Лагранжа. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Лагранжа_о_сумме_четырёх_квадратов
- 7.Теорема Ферма-Ейлера. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Ферма_—_Эйлера

УДК 519.8 : 517.9

Сльота О. Л. (студ.)

Науковий керівник – доц. Овсієнко Ю. І.

Полтавський державний аграрний університет (Полтава, Україна)

ПОБУДОВА Й АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РОСТУ ЧИСЕЛЬНОСТІ НАСЕЛЕННЯ МІСТА ПОЛТАВА

Облік населення, планування зміни його чисельності, демографічні прогнози – все це є актуальними питаннями, що впливають на соціальний та економічний розвиток людства.

Саме прогнозування чисельності населення країн і міст допомагає уникати проблем, пов'язаних із перенаселенням і перерозподілом ресурсів.

Метою дослідження є побудова й аналіз інтерполяційної формули (ІФ) зміни чисельності населення на прикладі міста Полтава.

Побудова ІФ виконувалася засобами MS Excel за алгоритмом, представленим у джерелах [1, с. 117-139]. Статистичні дані було зібрано за 20 років: із 2001 по 2021 (табл. 1) [3].

Таблиця 1.

Статистичні дані

Роки		2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Кількість наявного населення (тис. осіб)		308,4	318	315,27	312,4	310	308,5	306,2	303,60	300,5	300,5
2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	
298,87	297,59	296,85	295,95	294,96	294,02	291,96	289,54	288,32	286,65	283,40	

Можливості табличного процесора MS Excel дозволяють одержувати кілька видів ІФ (рис. 1, 2).

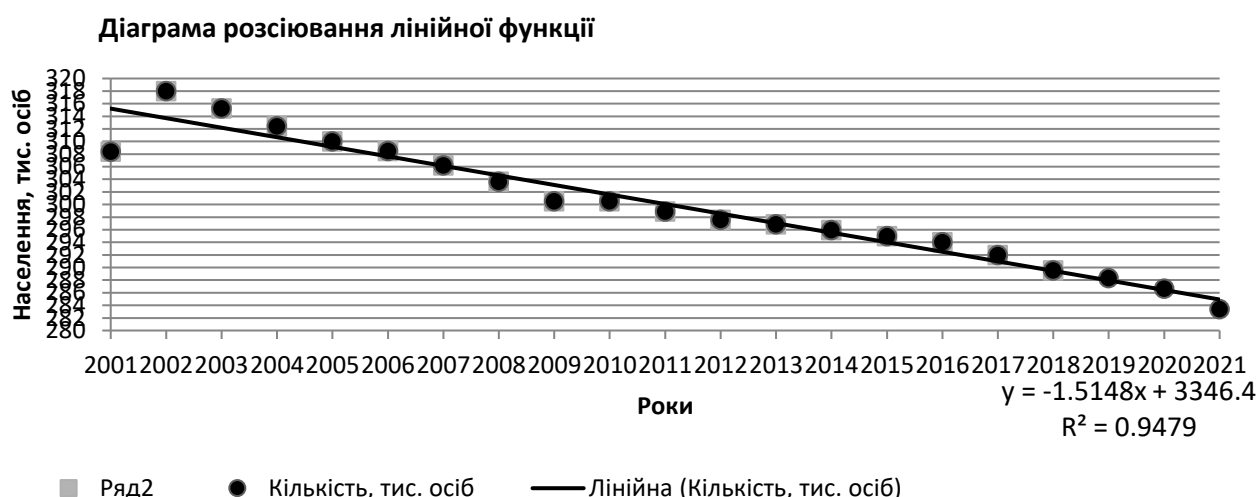


Рисунок 1. Діаграма розсіювання та інтерполяційна формула лінійної залежності

Задачами дослідження є: вибір найбільш точної ІФ, що описує зміну чисельності населення міста Полтава; пошук і співставлення виду ІФ із відомими математичними моделями росту популяцій [2, с. 49-50; 4].

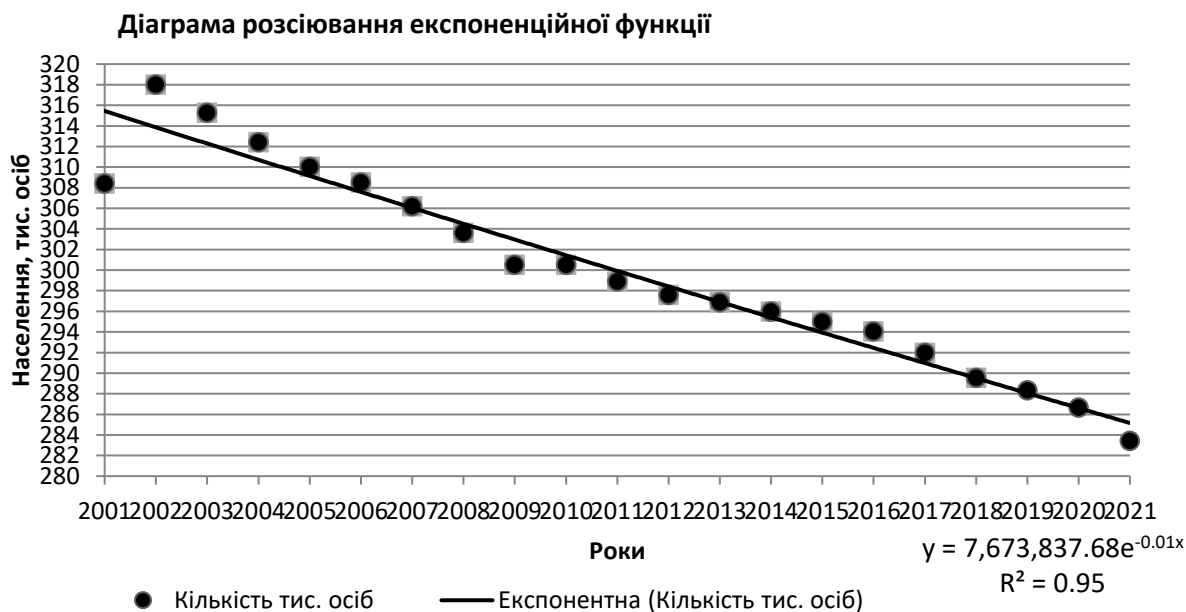


Рисунок 1. Діаграма розсіювання та інтерполяційна формула експоненційної залежності

Аналіз побудов ліній тренду (рис.1, 2) свідчить, що вони з певною точністю підтверджують наявність зв'язків між y_i і x_i . Аналізуємо рівняння ліній тренда і числові значення коефіцієнтів R^2 , заповнюємо таблицю (табл. 2).

Таблиця 2

Рівняння ІФ із коефіцієнтами достовірності апроксимації (R^2)

Тип моделей тренду	Рівняння моделей тренду	R^2
лінійна	$Y_2 = -1,52x + 3,4 \cdot 10^3$	0,948
експоненційна	$Y_1 = 7,7 \cdot 10^6 \cdot e^{-0,01x}$	0,95
логарифмічна	$Y_3 = -2995 \ln(x) + 23084$	0,9195
поліном 2-го порядку	$Y_4 = 0,0079x^2 - 33,37x + 35328$	0,92
степенева	$Y_5 = 1,01 \cdot 10^{34} x^{-10,149}$	0,951
поліном 3-го порядку	$Y_6 = 0,008x^3 - 46,491x^2 + 93405,1x - 6,3 \cdot 10^7$	0,931

Вибираємо два типи моделей, що найбільш точно описують залежність y_i від x_i : лінійну й експоненційну.

Для вибору найбільш якісної математичної моделі, що описується ІФ, обчислюємо середню похибку апроксимації відносних відхилень розрахункових значень досліджуваного фактора – чисельності жителів від його емпіричного значення по кожному із років: $A_i = \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - Y_i}{y_i} \right| \cdot 100\%$, де

$\bar{A}_i = \frac{A_i}{n}$, $i = 1, 2, \dots, 20$, – середнє значення y_i – емпіричне значення досліджуваної ознаки (кількість осіб, які проживають у місті Полтава) в i -ому спостереженні (у конкретному році). Модель якісна за умови, що середня похибка апроксимації не перевищує 8-10 %. Для зручності аналізу ІФ зведемо результати у таблицю (табл. 3) [1, с. 162-170].

Таблиця 3

Експериментальні, теоретичні і розрахункові дані

№ з/п	x_i	y_i	Y_1	A_1	Y_2	A_2
1	2001	308,4	314,842	2,089	313,650	1,702
2	2002	318	313,327	1,470	312,070	1,865
3	2003	315,268	311,812	1,096	310,498	1,513
4	2004	312,4	310,297	0,673	308,934	1,110
5	2005	310	308,782	0,393	307,378	0,846
6	2006	308,5	307,267	0,400	305,830	0,866
7	2007	306,2	305,752	0,146	304,289	0,624
8	2008	303,597	304,237	0,211	302,756	0,277
9	2009	300,5	302,722	0,740	301,231	0,243
10	2010	300,5	301,207	0,235	299,714	0,262
11	2011	298,871	299,692	0,275	298,204	0,223
12	2012	297,589	298,177	0,198	296,702	0,298
13	2013	296,852	296,662	0,064	295,207	0,554
14	2014	295,95	295,147	0,271	293,720	0,754
15	2015	294,962	293,632	0,451	292,241	0,923
16	2016	294,02	292,117	0,647	290,769	1,106
17	2017	291,963	290,602	0,466	289,304	0,911
18	2018	289,544	289,087	0,158	287,847	0,586
19	2019	288,324	287,572	0,261	286,400	0,669
20	2020	286,649	286,057	0,207	284,954	0,591
21	2021	283,402	284,542	0,402	283,519	0,041
Сума				10,852		15,963
$\bar{A}_i$				0,543		0,798

Результати досліджень не суперечать існуючим моделям росту популяцій. Так, у моделі Мальтуса, або Мальтузіанській моделі, чисельність популяції змінюється експоненційно: $N(t) = N_0 \cdot e^{\beta t}$, де N_0 – початкова кількість представників популяції, β – швидкість приросту популяції. У його математичній моделі теоретизовано, що людське суспільство, як і природа, за умови наявності нескінченної кількості ресурсів, буде продовжувати розширюватися, доки зростання не зупиниться через хвороби, голод, війну, відсутність їжі тощо [2, с. 49-50].

Таким чином, чисельність популяції росте експоненційно (за геометричною прогресією), а виробництво їжі – за арифметичною прогресією, тому рано чи пізно геометрична прогресія «обжене» арифметичну, і тоді настане голод. Саме його модель стала базисом для майбутніх математичних моделей біологічних популяцій [2, с. 154-165].

Результатом дослідження є інтерполяційна формула зміни чисельності населення у місті Полтава. Серед різних видів рівнянь ліній тренду найбільш якісними є лінійна й експоненційна моделі, що не суперечить загальновідомим моделям зміни чисельності популяцій.

Анотація. У дослідженні представлено процес побудови й аналіз якості інтерполяційної формули зміни чисельності населення на прикладі міста Полтава.

Ключові слова: інтерполяційна формула, лінія тренду, рівняння моделі тренду.

Література

1. Прикладна економетрика : навч. посібник : у двох частинах. Частина 1. [Л. С. Гур'янова, Т. С. Клебанова, С. В. Прокопович та ін.]. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. - 235 с.
2. Ладогубець Т. С., Фіногенов О. Д. Математичне моделювання: комп'ютерний практикум з дисципліни Математичне моделювання : навч. посіб. для студ. спеціальності 113 Прикладна математика / Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. - 58 с.
3. Головне управління статистики у Полтавській області, офіційний сайт. URL: <http://www.pl.ukrstat.gov.ua/>.
4. Mathematical Models in Biology - Bio-Nica.info : сайт. URL: <http://www.bionica.info/biblioteca/muller2004mathematicalmodelsinbiology.pdf>.

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦІЇ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ РЕАЛІЗАЦІЯ У СКЛАДНИХ ПРИСТРОЯХ

Різницеві рівняння, як і диференціальні рівняння, застосовуються для математичного опису природних явищ. Різницеві рівняння описують дискретні процеси, в той час як диференціальні рівняння – неперервні.

В 19 сторіччі та у першій половині 20 сторіччя вважалося, що майже усі природні явища описуються диференціальними рівняннями. Внаслідок цього диференціальні рівняння вивчаються у курсі вищої математики усіх технічних вишів. Наприкінці 20 сторіччя широке розповсюдження комп'ютерів та пов'язаних з ними дискретних процесів (наприклад, процесів роботи цифрових пристроїв) зробило актуальним для інженерів вивчення теорії різницевих рівнянь. У 21 сторіччі ця тенденція посилилася.

Лінійне різницеве рівняння

Означення. Лінійне різницеве рівняння (ЛРР) n -го порядку з сталими коефіцієнтами має вид

$$a_0 x(k+n) + a_1 x(k+n-1) + \dots + a_{n-1} x(k+1) + a_n x(k) = b(k) \quad (15)$$

Числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ називаються коефіцієнтами, послідовність $b(k)$ - вільним членом (або правою частиною) рівняння (5).

Означення. Якщо $b(k) = 0$ для довільного $k \in Z_0$, рівняння (5) називається **однорідним**, а у протилежному випадку – **неоднорідним**.

Приклади. Рівняння

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = 0 \quad (16)$$

є лінійним різницеvim рівнянням другого порядку,

$$x(k+3) + 5x(k+1) + 7x(k) = 2^k \quad (17)$$

є лінійним різницеvim рівнянням третього порядку, а рівняння

$$x(k+2) \cdot x(k+1) + x(k) = 0$$

не є лінійним різницеvim рівнянням.

Означення. Послідовність $X = g(k)$ називається **розв'язком** різницевого рівняння (5), якщо підстановка $x(k) = g(k)$ перетворює це рівняння у тотожність.

В подальшому будемо розглядати тільки лінійні різницеві рівняння з сталими коефіцієнтами.

Розв'язання лінійного однорідного різницевого рівняння.

За означенням лінійне однорідне різницеве рівняння має вид

$$a_0 x(k+n) + a_1 x(k+n-1) + \dots + a_{n-1} x(k+1) + a_n x(k) = 0 \quad (18)$$

Позначимо через $Lx(k)$ ліву частину цього рівняння:

$$Lx(k) = a_0 x(k+n) + a_1 x(k+n-1) + \dots + a_{n-1} x(k+1) + a_n x(k) \quad (19)$$

Тепер однорідне рівняння (18) можна записати так:

$$Lx(k) = 0 \quad (20)$$

а неоднорідне рівняння (5) – так:

$$Lx(k) = b(k).$$

Теорема 1 (лінійність операції L). Для довільних послідовностей $x(k)$, $x_1(k)$, $x_2(k)$ та довільної сталої C маємо

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & L(Cx(k)) = CLx(k) \\ \text{d)} \quad & L(x_1(k) + x_2(k)) = Lx_1(k) + Lx_2(k) \end{aligned} \quad (21)$$

Означення. Многочлен

$$M(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

називається **характеристичним многочленом** рівняння (5), а рівняння

$$M(p) = 0$$

тобто

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (22)$$

називається **характеристичним рівнянням** для рівняння (5).

Теорема 2 (про розв'язок лінійного однорідного різницевого рівняння).

Якщо $p_1, \dots, p_n$ - корені характеристичного рівняння (12), то для довільних сталих $C_1, \dots, C_n$ послідовність

$$x_{\text{з.о.}}(k) = C_1 p_1^k + \dots + C_n p_n^k \quad (23)$$

є розв'язком лінійного однорідного різницевого рівняння (20).

Теорема 3 (про структуру розв'язку ЛНРР). Загальний розв'язок ЛНРР має вид

$$x(k) = x_{\text{з.о.}}(k) + x_{\text{чн}}(k) \quad (24)$$

де $x_{\text{з.о.}}(k)$ - загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (формула (13)), а $x_{\text{чн}}(k)$ - будь-який (частинний) розв'язок ЛНРР.

Доведення. Ми доведемо тільки те, що формула (24) дає розв'язок ЛНРР (5). За означенням $x_{\text{з.о.}}(k)$ та $x_{\text{чн}}(k)$ маємо: $Lx_{\text{з.о.}}(k) = 0$, $Lx_{\text{чн}}(k) = b(k)$. Тому

$$Lx(k) = L(x_{\text{з.о.}}(k) + x_{\text{чн}}(k)) = Lx_{\text{з.о.}}(k) + Lx_{\text{чн}}(k) = 0 + b(k) = b(k),$$

тобто $x(k)$ є розв'язком ЛНРР (5).

Теорема 4 (принцип суперпозиції для ЛНРР). Розв'язком рівняння

$$Lx(k) = b_1(k) + b_2(k) \quad (25)$$

є сума $x_1(k) + x_2(k)$, де $x_1(k)$ - розв'язок рівняння $Lx(k) = b_1(k)$, а $x_2(k)$ - розв'язок рівняння $Lx(k) = b_2(k)$.

Доведення. За умовою $Lx_1(k) = b_1(k)$ та $Lx_2(k) = b_2(k)$. Додаємо ці рівності та використовуємо рівність (11): $L(x_1(k) + x_2(k)) = b_1(k) + b_2(k)$, тобто $x_1(k) + x_2(k)$ - розв'язок рівняння (25).

Теорема 4 очевидним чином узагальнюється на випадок суми довільної кількості доданків.

Наслідок. Загальний розв'язок ЛНРР (25) має вид

$$x(k) = x_{\text{з.о.}}(k) + x_1(k) + x_2(k),$$

де $x_{\text{з.о.}}(k)$ - розв'язок однорідного рівняння (20), $x_1(k)$ - розв'язок рівняння $Lx(k) = b_1(k)$, а $x_2(k)$ - розв'язок рівняння $Lx(k) = b_2(k)$.

Приклад. Розв'язати ЛНРР:

$$x(k+2) - 3x(k+1) - 4x(k) = 6 \cdot 2^k + 4 \cdot (-3)^k.$$

Відповідне однорідне рівняння

$$x(k+2) - 3x(k+1) - 4x(k) = 0$$

має характеристичний многочлен $M(p) = p^2 - 3p - 4$, корені якого $p_1 = -1$, $p_2 = 4$. Тому його розв'язок за (13) є

$$x_{з.о.}(k) = C_1(-1)^k + C_2 4^k.$$

Знаходимо частинні розв'язки рівнянь з правою частиною $6 \cdot 2^k$ та з правою частиною $4 \cdot (-3)^k$:

$$x_1(k) = \frac{6 \cdot 2^k}{M(2)} = \frac{6 \cdot 2^k}{2^2 - 3 \cdot 2 - 4} = -2^k$$

$$x_2(k) = \frac{4 \cdot (-3)^k}{M(-3)} = \frac{4 \cdot (-3)^k}{(-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 4} = \frac{2}{7}(-3)^k.$$

За теоремою 4 та наслідком маємо

$$x(k) = C_1(-1)^k + C_2 4^k - 2^k + \frac{2}{7}(-3)^k.$$

Література

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей.- М.: Наука, 1967. – 400 с.
2. Фудзисава Т, Касами Т. Математика для радиоинженеров: Теория дискретных структур. М.: Радио и связь, 1984. – 240 с.

УДК 519.171.4

Хайчіна М. О. (студ., 1 курс)
Науковий керівник - доц. Черненко В. П.
Вище професійне училище № 7 (Кременчук, Україна)

ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ МАХІМА ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

XXI століття, покоління Z, діджиталізація суспільства, автоматизація життя, саме так характеризуються нинішні часи. Ми не уявляємо свого життя без гаджетів. З них починається день та ними і завершується. Перехід дороги, зняття коштів, навіть звичайних похід до лікаря, – автоматизовані.

Інформаційний світ, який нас оточує, щодня створює величезні масиви цифрових даних, які потребують обробки, зберігання та аналізу. Світ умовно можна розділити на дві категорії: *users* and *engineers*. *Engineers* – це ті обслуговувачі ПК, програмісти, кодери, банківські працівники, які є фахівцями ІТ-галузі. За статистикою кожен третій обирає професію пов'язану з сучасними технологіями, та, майже, в кожній вони використовуються. Для опанування таких професій треба певний набір вмінь та навичок.

Автори роботи [1] підкреслюють, що «підготовка фахівців у галузі математики, комп'ютерних та технічних наук, учителів природничо-математичних спеціальностей передбачає вивчення різних розділів сучасної математики, серед яких теорія графів займає особливе місце в силу своєї затребуваності у різних галузях людської діяльності (транспортні і комп'ютерні мережі, будівельне проектування, молекулярне моделювання тощо)». Г. Бобрицька зазначає, що «у сучасному технологічному світі теорія графів широко застосовується для аналізу соціальних комп'ютерних мереж на наявність зв'язків між людьми, на особисті вподобання для цільової реклами, для аналізу зв'язків між інтернет-сторінками з метою створення оптимальної пошукової системи» [2]. Отже, доскональне вивчення саме теорії графів є одним із ключових скілів фахівця ІТ-галузі.

Теорія графів у дискретній математиці займається вивченням особливого виду математичних структур – графів, що використовуються для моделювання парних відношень між об'єктами. Враховуючи, що набір вершин можна використовувати для абстрагування будь-якого типу комп'ютерних даних, теорія графів глибоко вивчає взаємозв'язок між ними та дає відповіді на ряд питань: розташування, налаштування мережі, оптимізації, узгодження та інше. Метою теорії графів є представлення занадто численних, або складних даних, для їх адекватного опису в тексті або алгоритмі. Забезпечення чіткості та коректності опису даних у графах надають ефективності використання графів. Отже, графи – це метод візуальної ілюстрації даних та відношень між ними, а, значить, виникає потреба застосовувати сучасні системи комп'ютерної математики під час вивчення теорії графів.

Наприклад, автори у роботі [3] розглянули можливості використання системи комп'ютерної математики Maple для розв'язування задач теорії графів і зробили висновок, що дана система сприяє чергуванню різних видів робіт і збереженню високої працездатності студентів. Дійсно, система Maple корисна для візуалізації графів, перевірки правильності виконаних над ними дій, але ця система не є безкоштовною.

Водночас, під час вибору системи комп'ютерної математики для супроводу освітнього процесу слід враховувати не тільки її вартість, а і доступність програмного засобу [4]. Тому під час розв'язування задач теорії графів нами використовується безкоштовна, зрозуміла і легка у використанні система Maxima, в арсеналі якої для роботи з графами призначений пакет *graphs* зі спеціальними функціями [5].

Під час вивчення теорії графів здобувачам освіти ІТ-спеціальностей пропонується така прикладна задача професійного спрямування.

Постановка задачі. Вище професійне училище № 7 встановлює сервер, який дозволить передавати інформацію між п'ятьма кабінетами, в яких проходить навчання здобувачів освіти з комп'ютерних наук. П'ять комп'ютерів викладачів пов'язані між собою. Мережа можливих електронних зав'язків між викладачами подана у вигляді графу (рис. 1), протяжність комунікацій в метрах відмічена на дугах. Яку найменшу кількість кабелі треба, щоб створити таку локальну мережу, та де влучніше встановити сервер?

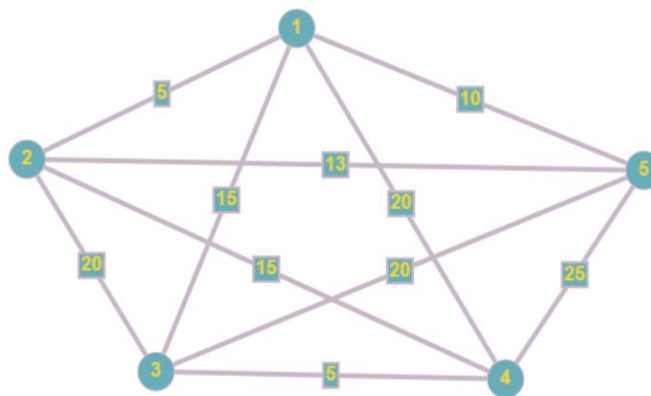


Рис. 1. Граф з вихідними даними до задачі

Розв'язання. Розглянемо процес розв'язування наведеного вище прикладу з використанням системи комп'ютерної математики Махіма. Задання графу та виведення відомостей про нього зображено на рис. 2. Використовуючи команду *minimum_spanning_tree(gr)*, яка виділяє мінімальне основне дерево графу *gr*, знаходимо остовне дерево мінімальної довжини на неорієнтовному повному графі.

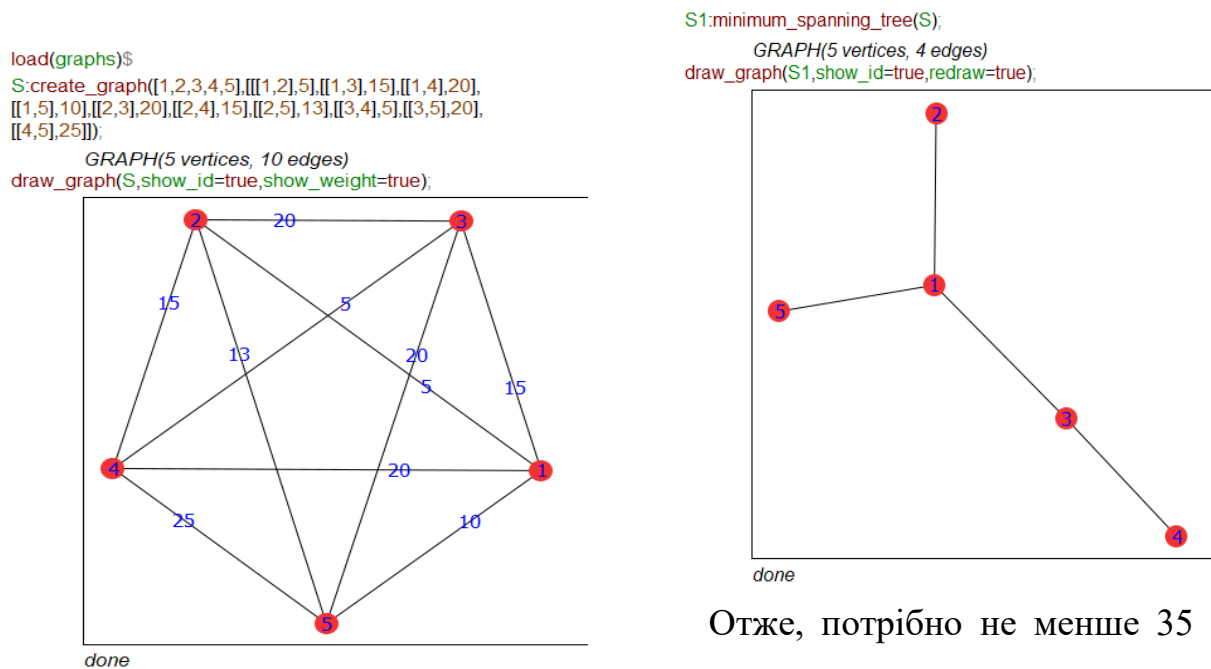


Рис. 2 Створення графу

Отже, потрібно не менше 35 м кабелі, при цьому сервер влучніше встановити в першому кабінеті.

У роботі розглянуті можливості використання системи комп'ютерної математики Махіма під час розв'язування прикладних задач теорії графів. У результаті дослідження з'ясовано, що система Махіма надає можливість майбутнім фахівцям ІТ-галузі набувати спеціальних фахових компетентностей під час вивчення теорії графів. Також необхідно зазначити, що ефективність використання системи Махіма, залежить не тільки від опанування здобувачами освіти основних команд даної системи щодо роботи з графами, а й від ступеню володіння ними символічних перетворень без використання комп'ютера.

Анотація. У даному дослідженні розглядаються актуальні питання автоматизації розрахунків під час вивчення майбутніми фахівцями ІТ-галузі розділів фахових навчальних дисциплін. На прикладі застосування системи комп'ютерної математики Махіма під час вивчення теорії графів показано

вдале поєднання комп'ютера і розв'язування прикладних задач професійного спрямування. Головна мета такого поєднання – це формування у здобувачів освіти ІТ-спеціальностей спеціальних фахових компетентностей.

Ключові слова: дискретна математика, теорія графів, ІТ-галузь, система комп'ютерної математики Maxima.

Література

1. Друшляк М. Г., Лукашова Т. Д., Скасків Л. В. Навчання майбутніх вчителів математики розв'язувати задачі теорії графів із використанням GEOGEBRA. *Фізико-математична освіта*. 2019. Випуск 1(19). - С. 35-40.
2. Бобрицька Г. С. Прикладне застосування теорії графів у різних сферах життя суспільства та окремої особистості. *Фізико-математична освіта*. 2017. Випуск 3(13). – С. 26-30.
3. Оніщенко Г.О., Соницька Н.Л. Використання систем комп'ютерної математики в процесі вивчення теорії графів. Матеріали міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції «Проблеми математичної освіти: виклики сучасності (2020)». [Електронне мережне наукове видання] : збірник матеріалів. Вінниця: ВНТУ, 2020. - С. 146-148.
4. Кобильник Т. П., Когут У. П. Методичні аспекти використання системи Maxima у процесі навчання дослідження операцій. *Інформаційні технології в освіті*. 2016. - № 2 (27). - С. 67-80.
5. Клековкин, Г. А. Теория графов. Среда Maxima: учеб. пособие для СПО. Москва: Издательство Юрайт, 2018. - 133 с.

Щербініна Ю. В.н- (студ., 2 курс),

Харченко С. Д. (студ., 2 курс)

Науковий керівник – доц. Пташний О. Д.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

ІНТЕГРУВАННЯ ТЕСТІВ В ОБОЛОНКУ «MOODL»

У зв'язку з поширенням останнім часом дистанційної форми навчання, серед методів діагностування провідне місце набуває тестовий контроль. У поєднанні з використанням платформи Moodle у навчальному процесі він стає все більш популярним. Це пов'язано, з одного боку, з численними перевагами цієї форми контролю, а з іншого - з тим, що вказана платформа являє собою інтегровану систему для створення навчального середовища з елементами персоналізації, та надає здобувачам та викладачам ряд зручностей та можливостей при організації навчального процесу. Проте, справедливо відмічається певна «недружність» цієї платформи. Користувачам часто доводиться звертатися за консультаціями та проходити спеціальне навчання

для оволодіння її можливостями та опціями. Зокрема, це стосується саме створення тестів та проведення тестування. У роботі розглядаються питання створення тестів для інтегрування їх у платформу Moodle.

Тестовий контроль у поєднанні з використанням платформи Moodle у навчальному процесі стає все більш популярним. Це пов'язано, з одного боку, з численними перевагами цієї форми контролю, а з іншого - з тим, що вказана платформа являє собою інтегровану систему для створення навчального середовища з елементами персоналізації, та надає здобувачам і викладачам ряд зручностей та можливостей при організації навчального процесу. Проте, справедливо відмічається певна «недружність» цієї платформи. Користувачам часто доводиться звертатися за консультаціями та проходити спеціальне навчання для оволодіння її можливостями та опціями.

З іншого боку, при переході на дистанційне навчання однією з головних проблем є значне послаблення зворотного зв'язку зі здобувачами, починаючи з перевірки фізичної присутності на занятті, перевірки степені розуміння та засвоєння матеріалу у ході заняття, перевірки факту та якості відпрацювання студентами навчального матеріалу.

І чи не єдиним засобом підтримування та здійснення зворотного зв'язку у цій ситуації залишається онлайн – автоматизоване тестування – у синхронному або відкладеному режимі. Зразу констатуємо, що застосування вже готових, пророблених та інтегрованих, скажімо у Moodle, тестів дає змогу

- звільнити викладача від рутини перевірок контрольних робіт;
- налагодити та, певною мірою, автоматизувати облік успішності та засвоєння матеріалу;
- зробити контроль регулярним, а «покарання» за неякісне навчання – невідворотнім;
- нарешті, просто активізувати студентів.

Але сама розробка тестів – дуже трудомісткий процес, який при серйозному підході призводить до необхідності взаємоадаптації тестів та навчального курсу. А саме, скажімо, лекція традиційно містить ідеї, підходи,

міркування. А для успішного проходження тесту потрібен ще концентрований виклад, де містяться основні факти та положення. Раніше таку обробку конспекту робили саме студенти, а тепер, у зв'язку з майбутнім тестуванням, все більше викладачів самі готують так звані «Короткі теоретичні відомості», які при умові застосування комп'ютеру, можуть трансформуватися, наприклад, у презентації. Ці презентації налаштовані під тестування, а тестування налаштоване під них. Звісно, такі короткі теоретичні відомості мають на меті й підготовку до практичних занять з відповідної теми.

Вплив тестування на якість підготовки, звісно, пов'язаний, у першу чергу, з його регулярністю та всеосяжністю. Але дуже важливою є «якість» питань. Під якістю питання розуміється, у першу чергу, конкретність, прив'язка до навчального матеріалу, мінімізація можливості вгадування відповідей, багатоплановість. Наприклад, питання типу: «Дані два вектори. Якщо вони колінеарні, знайти їх суму, якщо ортогональні, - скалярний добуток суми на різницю, у іншому випадку – векторний добуток» Формат відповіді запланувати таким чином, щоб, по можливості, уникати вибору з запропонованих варіантів на користь введення числового значення. Наприклад «у відповідь дати суму координат вектору».

При проведенні тестування можна ставити акцент не на контролі, а на підвищенні якості засвоєння матеріалу. Наприклад, у дистанційних курсах деяких викладачів є своєрідні «післялекційні» тести, оформлені як питання до лекції. За них не нараховується багато балів, але вони активізують студентів, спонукають їх переглядати конспекти лекцій, та працювати над ними. Домогтися підвищення якості підготовки можна й за допомогою вимоги отримання балу не нижче вказаного, стимулювати здобувачів проходити тести повторно.

Основною проблемою підвищення якості навчання за допомогою автоматизованого тестування є саме наявність банку тестів, достатньо повного, якісного та прилаштованого під курс, інтегрованого у систему дистанційного навчання. Як вже було відмічено, створення такого банку - це

дуже кропітка та трудомістка робота, виконати яку можливо тільки колективно, розподіливши її між викладачами. Координація, звісно, необхідна, зокрема для того, щоб при розробці тестів дотримуватись єдиних принципів та вимог, забезпечити всеосяжність тестів та адаптованість їх до курсу.

Основою для створення банку тестів є аналіз навчальної програми обов'язкової частини курсу ВМ, після якого визначаються напрями розробки уніфікованих шаблонів тестових завдань, тобто створюється своєрідний проект банку тестів. На його основі у подальшому викладачами кафедри, можливо із залученням студентів проводитиметься створення тестів. Задачею розробників буде «розгортання шаблонів» у достатню кількість варіантів, забезпечення «надійності» відповідей та необхідної рандомізації питань при інтегруванні тестів у систему дистанційного навчання, розробка тренувальних варіантів завдань та «Коротких теоретичних відомостей», про які йшла мова вище.

Розглянемо для прикладу кілька розділів з робочої програми першого семестру, у якій позначено теми практичних занять та визначені навички та вміння, які потрібно сформувані у здобувачів.

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри. Необхідними вміннями тут є обчислення визначників другого та третього порядків, знання їх властивостей, виконання основних операцій над матрицями, розв'язання систем лінійних рівнянь. Важливий пріоритет при формуванні завдань постає у тому, що формат відповідей повинен виключити вгадування варіантів. Тому тут і майже всюди ми обрали не вибір із запропонованих варіантів, а відкриту відповідь у формі числа. Якщо, наприклад, результатом розв'язання задачі є матриця, то у відповідь ми пропонуємо вводити якусь комбінацію з її елементів, скажімо їх сума.

Вирішувати, якою кількістю балів оцінювати те чи інше завдання, а також скільки часу відводити на їх розв'язання, ми вважаємо повинен сам викладач, який буде застосовувати ці тести.

Тест № 1. Визначники другого порядку

1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$.

У завданнях 1-3 у відповідь дати отримані значення.

4. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x+2 & 0 \\ 12 & x+5 \end{vmatrix} = 0$.

Якщо корінь єдиний (простий чи кратний), дати його у відповідь.

Якщо корені два, у відповідь дати їх суму.

5. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} x-12 & x+5 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} \leq 0$

У відповідь дайте найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності.

Тест № 2. Визначники третього порядку

Дано визначник $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1. Обчислити його за правилом Саррюса.

2. Знайти мінор елемента a_{23} .

3. Знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{31} .

4. Знайти значення виразу $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$.

5. Знайти значення виразу $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$.

Тест № 3. Властивості визначників

Чому дорівнює визначник третього порядку, або як він зміниться, якщо має вказані особливості, або у ньому виконати наступні дії? У відповідь дайте номер із запропонованих варіантів.

- а) перший й третій рядки пропорційні з коефіцієнтом k .
- б) другий рядок помножити на число k .
- в) перший стовпчик замінити на його суму із другим.
- г) усі елементи помножити на число k .
- д) поміняти місцями перший та другий рядки.

Варіанти відповідей:

- 1. Не зміниться.
- 2. Змінить свій знак.
- 3. Помножиться на число k .
- 4. Поділиться на число k .
- 5. Помножиться на число k^3 .
- 6. Збільшиться на k .
- 7. Дорівнює, або дорівнюватиме нулю.
- 8. Інша відповідь.

Тест № 4. Операції над матрицями

Дані матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Виконати наступні дії (у

відповідь дати суми елементів отриманих матриць):

- 1. $3A + 2B - 4E$.
- 2. ABE .
- 3. A^3 .
- 4. $3A^T + BA - E^2$.

Тест № 5. Системи лінійних рівнянь

Дана система лінійних рівнянь
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 4 \\ 2x_1 - 7x_2 = 3 \end{cases}$$

1. Записати розширену матрицю системи (у відповідь дати суму її елементів).
2. Знайти головний визначник системи Δ .
3. Розв'язати систему за правилом Крамера (у відповідь дати значення виразу $(x_1 + x_2) \Delta$)

Розділ 2. Елементи векторної алгебри. Основними навичками та вміннями тут є виконання операцій над векторами, заданими у ортонормованому базисі, визначення факту колінеарності чи ортогональності векторів. Питання типу «чи є дані вектори ортогональними, або колінеарними» припускають дві відповіді – «так», чи «ні». Так поставлені питання дають можливість вгадати відповідь з п'ятидесятивідсотковою ймовірністю. Тому ми вирішили прив'язати ці питання до обчислюваних, які виконуються у залежності від того чи іншого варіанту відповіді.

Тест № 6. Елементи векторної алгебри

1. Дано вектори $\vec{a}(2;3;1)$ та $\vec{b}(2;-3;1)$.

Якщо вони колінеарні, знайдіть вектор $2\vec{a} - 3\vec{b}$,

а якщо не колінеарні – вектор $3\vec{a} + 2\vec{b}$

У відповіді вкажіть суму координат знайденого вектора!

2. Дано вектори $\vec{a}(-1;3;0)$ та $\vec{b}(3;1;1)$.

Якщо ці вектори ортогональні, знайдіть площу S трикутника, побудованого на них, а якщо не ортогональні – площу S паралелограма.

У відповідь вкажіть значення S^2

3. Дано чотири точки: $A(4;6;0), B(6;9;1), C(8;11;-2), D(6;8;-3)$.

Якщо вони належать одній площині, знайдіть відстань d між точками A та B . *У відповідь дайте значення d^2*

Якщо вони не належать одній площині, знайдіть об'єм V піраміди $ABCD$. *У відповідь дайте значення $6V$.*

Розділ 3. Елементи аналітичної геометрії. На цей фундаментальний розділ, на жаль, відведено дуже мало часу, тому він фактично містить дві теми

– «Пряма на площині» та «Пряма та площина у просторі». Таке питання, як «скласти рівняння» дуже важко провести у формі тесту, бо неоднозначність відповіді не дає можливості застосувати числову відповідь. Звичайно, можна було б вимагати приведення рівнянь до якоїсь однозначної форми, наприклад, до нормованого рівняння прямої чи площини. Але це не передбачено програмою та потребує додаткового часу. Тому у тестах на перший план виходять питання взаємного розташування прямих та площин.

Тест № 7. Пряма на площині

1. Чи є прямі $2x + y - 4 = 0$ та $x - 2y + 1 = 0$
 - а) паралельними;
 - б) перпендикулярними;
 - в) співпадаючими;
 - г) такими, що не виконуються умови а, б, в ?
2. Чи є прямі $\frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{2}$ та $\frac{x-4}{5} = \frac{y+1}{0}$
 - а) паралельними;
 - б) перпендикулярними;
 - в) співпадаючими;
 - г) такими, що не виконуються умови а, б, в ?
3. Чи є прямі $x - 6y - 1 = 0$ та $\frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{2}$
 - а) паралельними;
 - б) перпендикулярними;
 - в) співпадаючими;
 - г) такими, що не виконуються умови а, б, в ?
4. Дано дві точки $A(1;1)$, $B(4;0)$ та пряма $(L): 3x - y + 2z - 10 = 0$.
Чи є прямі AB та (L)
 - а) паралельними;
 - б) перпендикулярними;

в) співпадаючими;

г) такими, що не виконуються умови а, б, в ?

Тест № 8. Пряма та площина у просторі

1. Чи є площини $x + 3y + 5z - 1 = 0$ та $5x - y + z + 1 = 0$

а) паралельними;

б) перпендикулярними;

в) співпадаючими;

г) такими, що не виконуються умови а, б, в ?

2. Чи є прямі $\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 4 = 0 \end{cases}$ та $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z}{-10}$

а) паралельними;

б) перпендикулярними;

в) такими, що не виконуються умови а, б ?

3. Дано дві точки $A(2; 4; 3)$, $B(5; 3; 5)$ та площина $-3x + y - 2z - 10 = 0$.

Чи є пряма AB

а) перпендикулярною до площини;

б) паралельною площині;

в) такою, що належить площині;

г) такою, що не виконуються умови а, б, в ?

Висновки. Розглянуті принципи та приклади можуть бути застосовані для створення викладачами банку тестових завдань. Викладачі, які працюватимуть над створенням банку тестів, повинні розмножити завдання, перевірити надійність відповідей, створити тренувальний варіант з розв'язанням та відповіддю, який можна розміщувати на сайті перед виконанням тестів.

Інтегрування тестів у систему Moodle дозволяє ефективно використовувати тестовий контроль у навчальному процесі. Наявні опції та

можливості цієї платформи сприяють більш повній реалізації основних принципів побудови тестів.

Література

1. Дорошенко Ю.О., Ротаєнко П.А. Достовірність комп'ютерного тестування: Навчально-методичний посібник. – К. Педагогічна думка, 2007. – 176 с.
2. Лукіна Т.О. Технології діагностики та оцінювання навчальних досягнень: Навчально-методичні матеріали. – К., 2007. – 62 с.

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОФЕСІЙНО-ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Бабаєва А. О. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – доц. Пташний О. Д.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

РЕФЛЕКСІЯ У ІГРАХ

Предметом вивчення теорії ігор є математичні методи оптимізації стратегій в іграх. Під грою розуміється процес, в якому беруть участь дві або більше сторін, які ведуть боротьбу за реалізацію своїх інтересів. Кожна зі сторін має свою мету і використовує деяку стратегію, яка може вести до виграшу або програшу - залежно від поведінки інших гравців. Теорія ігор допомагає вибрати найкращі стратегії з урахуванням уявлень про інших учасників, їх ресурсах та їх можливих вчинках.

Розглянемо можливі стратегії сторін конфлікту, кожна з яких породжує відповідну концепцію рівноваги, тобто визначає, в якому сенсі стійким повинен бути прогнозований результат гри. Паралельно будемо обговорювати ту інформованість, яка необхідна для реалізації рівноваги.

Рівновага в домінантних стратегіях (домінантна стратегія – це стратегія, яка дає агенту більший виграш, ніж будь-яка інша, незалежно від дій опонентів). Якщо для деякого агента множина

$$BR_i(\theta, x_{-i}) = \text{Arg max } f_i(\theta, x_i, x_{-i}), \quad i \in N \quad (1)$$

де BR (best response) – найкраща відповідь, $x_{-i} \in X_{-i}$ - обстановка гри, $\theta \in \Omega$ - стан природи, незалежний від обстановки, то вона становить безліч його домінантних стратегій (сукупність домінантних стратегій агентів називається рівновагою в домінантних стратегіях - РДС). Якщо у кожного з агентів існує домінантна стратегія, то вони можуть приймати рішення незалежно, тобто вибирати дії, не маючи ніякої інформації і не роблячи ніяких припущень про обстановку. На жаль, РДС існує далеко не у всіх іграх.

Максимінна рівновага. Відповідно до принципу максимального гарантованого результату (МГР) гарантоване значення цільової функції i -го агенту визначається наступним чином:

$$x_i^e \in \text{Arg} \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} \min_{\theta \in \Omega} f_i(\theta, x_i, x_{-i}), \quad i \in N \quad (2)$$

Це припущення означає, що агент вважає, що внаслідок гри реалізується найгірша для нього обстановка, і вибором своєї стратегії максимізує гарантоване значення цільової функції $f_i(\theta, x_i, x_{-i})$

Слід зазначити, що використання принципу МГР дає агенту песимістичну оцінку результату гри, що не завжди доцільно.

Рівновага Неша.

Рівновагою Неша при стані природи θ (точніше - параметричною рівновагою Неша) називається точка

$$x^*(\theta) \in X', \quad \text{яка задовольнить такій умові:} \\ x^*(\theta) \in BR(\theta, x^*(\theta)) \quad (3)$$

тобто нікому з агентів не вигідно змінювати свою стратегію, за умови, що інші агенти не змінюють своїх стратегій.

Суб'єктивна рівновага. Розглянуті види рівноваги є окремими випадками суб'єктивної рівноваги, яка визначається як вектор дій агентів, кожна компонента якого є найкращою відповіддю агента на ту обстановку гри, яка може реалізуватися з його суб'єктивної точки зору.

Припустимо, що i -ий агент розраховує на реалізацію обстановки гри $\hat{x}_{-i}^b$ (b(beliefs) – припущення) та стан природи $\hat{\theta}_i$, тоді він обере

$$x_i^b \in BR_i(\hat{\theta}_i, \hat{x}_{-i}^b), \quad i \in N \quad (4)$$

Вектор x^b є точковою суб'єктивною рівновагою.

Відзначимо, що при такому визначенні «рівноваги» не потрібно обґрунтованості припущень агентів про дії опонентів, тобто може виявитися, що $\hat{x}_{-i}^b \neq x_{-i}^b$. Обґрунтована суб'єктивна рівновага, тобто така, що $\hat{x}_{-i}^b = x_{-i}^b$, є

рівновагою Неша (для цього, зокрема, досить, щоб всі параметри гри були загальним знанням, і щоб кожен агент при побудові $\hat{x}_{-i}^b$ моделював раціональну поведінку опонентів). В окремому випадку, якщо найкраща відповідь кожного агента не залежить від припущень про обстановку, то суб'єктивна рівновага є рівновагою в домінантних стратегіях

Отже, можна зробити висновок про те, що концепція рішення гри тісно пов'язана з поінформованістю агентів. Такі концепції рішення, як РДС і рівновага Неша, є, в певному сенсі, граничними випадками - перша вимагає мінімальної інформованості, друга - нескінченності рангу інформаційної рефлексії всіх агентів. Тому нижче ми опишемо інші («проміжні») випадки інформованості агентів - ієрархії уявлень - і побудуємо відповідні їм рішення гри. Для наочності та простоти опису ми будемо розглядати біматричні ігри.

Біматрична гра - це скінченна гра, в якій беруть участь двоє агентів.

В біматричних іграх, в яких не існує рівноваги Неша, або в яких при існуючій рівновазі Неша агенти вибирають суб'єктивні гарантуючи стратегії, виграш кожного з агентів залежить як від його рангу рефлексії, так і від рангу рефлексії опонента. Крім того необмежене збільшення рангу стратегічної рефлексії не призводить до збільшення виграшу. Перейдемо до формального опису.

Розглянемо біматричну гру, в якій виграш агентів задається матрицею виграшів.

Матриця виграшів — матриця, строками якої є стратегії першого гравця, стовпцями — стратегії другого гравця, а елемент на перетині строки і стовпця — виграші гравців в ситуації, утвореній відповідними стратегіями.

Виграші першого і другого агентів задаються матрицями $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ розмірності $n \times m$ відповідно. Позначимо $I = \{1, 2, \dots, n\}$ – множина дій першого агента (вибирає рядок), $J = \{1, 2, \dots, m\}$ - множина дій другого агента (вибирає стовець).

У розглянутій грі гарантуючі стратегії агентів наступні:

$$i_0 \in \text{Arg} \max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij}; \quad j_0 \in \text{Arg} \max_{j \in J} \min_{i \in I} b_{ij} \quad (5)$$

Введемо наступні припущення. Нехай матриці виграшів такі, що кожна дія кожного агента є найкращою відповіддю на деяку дію опонента, і нехай, крім того, найкраща відповідь на кожну дію опонента єдина.

Позначимо

$$a_0 = \max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij} \quad b_0 = \max_{j \in J} \min_{i \in I} b_{ij} \quad (6)$$

- максимальні гарантовані результати (МГР) першого і другого агентів відповідно.

Визначимо рефлексивну біматричних гру MG_{kl} (matrix game) як біматричних гру з матрицями A і B , в якій перший і другий агенти мають ранги рефлексії, рівні k і l відповідно, $k, l \in N$ - безліч натуральних чисел.

Пояснимо, що буде розумітися під **рангом рефлексії** (точніше - під рангом стратегічної рефлексії) в біматричних іграх. У біматричних (і не тільки біматричних іграх) вибір дій агентами може здійснюватися на підставі знання рангів рефлексії опонента. Ранги рефлексії визначаються наступним чином. «Агент має нульовий ранг рефлексії, якщо він знає тільки матрицю платежів. Агент має перший ранг рефлексії, якщо він вважає, що його противники мають нульовий ранг рефлексії, тобто знають тільки матрицю платежів. Взагалі, агент з k -им рангом рефлексії передбачає, що його супротивники мають $k-1$ -й ранг рефлексії. Він проводить за них необхідні міркування щодо вибору стратегії і вибирає свою стратегію на основі знання матриці платежів і екстраполяції дій своїх супротивників. Наведемо ілюстративний приклад.

Приклад 1. Гра в хованки. Перший агент ховається в одній з декількох кімнат різної освітленості, а другий агент повинен вибрати ту кімнату, де буде його шукати. Ступені освітленості відомі обом агентам. Стратегії агентів наступні. Той, хто шукає, за інших рівних умов краще шукатиме там, де світліше (там простіше знайти). Тому, що ховається, зрозуміло, що в більш темній кімнаті шансів знайти його менше, ніж в освітленій. Зростання рангу

рефлексії означає, що агенту стає зрозуміло, що це зрозуміло і його противнику, і т.д. Уявімо ранги рефлексії агентів і відповідні дії по вибору кімнат у вигляді таблиці

Ранг рефлексії агента	0	1	2	3	4
Кімната, у якій агент ховається	Най-темніша	Будь-яка, окрім най-світлішої	Будь-яка, окрім най-темнішої	Най-світліша	Най-темніша
Кімната, у якій агент шукає	Най-світліша	Найтемніша	Будь-яка, окрім най-світлішої	Будь-яка, окрім най-темнішої	Найсвітліша

Можна бачити, що після другого рангу рефлексії вичерпується вся множина допустимих дій, а після третього рангу рефлексії стратегії вибору кімнат починають повторюватися. Цей факт був ілюстрацією того, що в грі двох осіб збільшення рангів рефлексії вище певного об'єктивно не дає нічого нового, хоча суб'єктивне наростання складності може тривати. Невідповідність рангів рефлексії успішності діяльності полягає в наступному. Нехай той, що ховається, має 0-й ранг (ховається в найтемнішій кімнаті). Якщо при цьому той, що шукає, має 1-й ранг, то він завжди виграє. Але якщо той, що шукає, має 3-й ранг (шукає в будь-якій кімнаті, крім найтемнішої), то він завжди програє опоненту з 0-м рангом, оскільки той, як ми пам'ятаємо, не міркує про те, що думає противник, і ховається саме в цій найтемнішій кімнаті, куди агент, що шукає, провівши серію рефлексивних міркувань, ніколи не загляне.

Таким чином, неможливо однозначно стверджувати, що більш високий ранг рефлексії краще нижчого. Перевага того чи іншого рангу визначається його взаємодією з рангом рефлексії противника.

Так як в біматричних іграх передбачається, що кожен агент має якесь переконання про ранг рефлексії опонента, то це дозволяє використовувати поняття суб'єктивної гарантуючої стратегії. Визначимо суб'єктивні гарантуючі стратегії в біматричних грі MG_k :

$$i_k = \arg \max_{i \in I} a_{ij_{k-1}} \quad j_l = \arg \max_{j \in J} a_{i_{l-1}j} \quad k, l \in N \quad (7)$$

Таким чином, гра MG_{00} збігається з вихідною грою, а «рівновагою» в грі $MG_{kl} \in a_{i_k j_l}; b_{i_k j_l}, k, l \in N$. Відзначимо два цікавих факта. По-перше, виграш будь-якого агента в грі MG_{kl} при $k \geq 1, l \geq 1$ може виявитися менше максимального гарантованого. По-друге, приписування кожним агентом опонентові рангу рефлексії на одиницю менше його власного суперечливо, так як в грі MG_{kl} при $k \geq 1, l \geq 1$ це означає, що має одночасно виконуватися $l = k - 1$ і $k = l - 1$, що, очевидно, неможливо. Отже, рівновага в рефлексивній грі є істотно суб'єктивною, і апіорі агенти не знають в яку гру вони грають (ранги рефлексії обох агентів не можуть бути загальним знанням, так як це суперечило б самому визначенню рангу рефлексії). Тому перспективним напрямком майбутніх досліджень є вивчення інформаційної рефлексії щодо рангів рефлексії агентів в біматричних іграх.

Якщо одному агенту (або обом агентам) невідомий ранг рефлексії опонента, то доцільний розгляд гри $MG_{\infty\infty}$, в якій кожен агент обчислює гарантований результат за рангом рефлексії опонента. Введемо гарантуючі стратегії, відповідні повній невизначеності щодо рангу рефлексії опонента:

$$i_{\infty} = \arg \max_{i \in I} \min_{j \in J_{\infty}} a_{ij} \quad j_{\infty} = \arg \max_{j \in J} \min_{I \in I_{\infty}} b_{ij} \quad (8)$$

Аналогічно можна визначити гарантуючі стратегії в рамках інформації про те, що ранг рефлексії опонента не перевищує відомої величини (тобто перший агент вважає, що ранг рефлексії другого не вище L , а другий - що ранг рефлексії першого не вище K):

$$i^L = \arg \max_{i \in I} \min_{j \in J_L} a_{ij} \quad j^K = \arg \max_{j \in J} \min_{I \in I_K} b_{i_k j} \quad (9)$$

Відзначимо, що в (9), на відміну від (7), стратегія кожного з агентів не залежить від його власного рангу рефлексії, а визначається інформацією про ранг рефлексії опонента. Вирази (7) - (9) не вичерпують усього різноманіття можливих ситуацій, так як, наприклад, перший агент може припустити, що другий вибере j_{∞} , і тоді його найкращою відповіддю буде $\arg \max_{i \in I} a_{ij_{\infty}}$, і

т.д. Крім того, хоча до збільшення рангу рефлексії здатні лише «сильні» агенти, інтуїтивно зрозуміло, що при зростанні цього рангу, тобто при подовженні ланцюжка міркувань «я думаю, що він думає, що я думаю ...» є небезпека «перемудрувати» . Сильний агент з високим рангом рефлексії переоцінює противника, припускаючи, що у нього ранг рефлексії теж високий. Але, якщо ранг суперника насправді низький, це призводить до програшу слабшому противнику - див. Приклад «Гра в хованки». Отже, необхідно систематичне дослідження співвідношення виграшів агентів в залежності від типу гри. Наведемо результати цього дослідження. Істотним для нашого розгляду є наявність або відсутність рівноваги Неша, а так само вибір агентами гарантуючих стратегій або дій, рівноважних по Нешу. Таким чином, можливі наступні чотири ситуації.

Варіант 1 (рівновага Неша в чистих стратегіях існує, і агенти орієнтуються на рівноважні по Нешу дії). Позначимо $(i^* ; j^*)$ - номери рівноважних Нешу чистих стратегій. Тоді, якщо за аналогією з (7) вважати, що в рефлексивній грі кожен агент вибирає свою найкращу відповідь на вибір опонентом відповідної компоненти рівноваги, то виходить, що $i_k = i^*, j_l = j^*, k, l \in N$ тобто в рамках варіанту 1 стратегічна рефлексія безглузда.

Варіант 2 (рівновага Неша в чистих стратегіях існує, але агенти вибирають гарантуючи стратегії (7)).

Якщо гарантуючи стратегії утворюють рівновагу Неша (як це має місце в антагоністичних іграх з сідловою точкою), то потрапляємо в умови варіанту 1. Отже, стратегічна рефлексія має сенс, тільки якщо в рамках варіанту 2 рівновага Неша не збігається з рівновагою в гарантуючих стратегіях (i_0, j_0) .

Варіант 3 (рівноваги Неша в чистих стратегіях не існує, і агенти орієнтуються на рівноважні по Нешу змішані стратегії). Якщо агенти при вирішенні питання щодо його найкращих відповідей по аналогії розраховують на те, що опонент вибере рівноважні по Нешу змішані стратегії, то легко показати, що максимум очікуваного виграшу кожного агента буде досягатися при виборі їм також відповідної рівноважної по Нешу змішаної стратегії.

Отже, в рамках варіанту 3 будь-яка рівновага збігається з рівновагою Неша в змішаних стратегіях, тобто стратегічна рефлексія в цьому випадку не має сенсу.

Варіант 4 (рівноваги Неша в чистих стратегіях не існує, і агенти орієнтуються на гарантуючі стратегії (7)). У четвертому варіанті аналіз рефлексії, очевидно, має сенс. Таким чином, розглянувши всі чотири можливих варіанти поведінки агентів, отримуємо, що обґрунтована справедливність наступного твердження.

Твердження 1. Стратегічна рефлексія в біматричних іграх має сенс, якщо агенти використовують суб'єктивні гарантуючі стратегії (7), які не є рівноважними по Нешу. Позначимо

$$\begin{aligned} K_{\min} &= \min \{K \in N \mid I_K = I_{\infty}\}, \\ L_{\min} &= \min \{L \in N \mid J_L = J_{\infty}\}, \end{aligned} \quad (10)$$

де $K_{\min}$ і $L_{\min}$ - мінімальні ранги рефлексії першого і другого агентів, при яких їх множина суб'єктивних рівноважних дій збігається з максимально можливими в даній грі множинами суб'єктивних гарантуючих стратегій.

Якщо ранг рефлексії першого і другого агентів не перевищує K і L відповідно, то множина суб'єктивних гарантуючих стратегій першого і другого агентів з точки зору опонента рівні I_{L-1} і J_{K-1} відповідно. Значить, збільшення рангів рефлексії може призводити до розширення множини суб'єктивних гарантуючих стратегій, якщо

$$L - 1 < K_{\min}, \quad K - 1 < L_{\min} \quad (11)$$

Відзначимо, що з даної точки зору максимальний доцільний ранг рефлексії першого агента залежить від властивостей суб'єктивних гарантуючих стратегій другого агента і навпаки. З іншого боку, агенту не має сенсу збільшувати ранг своєї рефлексії, якщо він вже «вичерпав» власну множину можливих суб'єктивних рівноважних дій. З цієї точки зору збільшення рангів рефлексії може призводити до розширення множини суб'єктивних гарантуючих стратегій, якщо

$$K < K_{\min}, \quad L < L_{\min} \quad (12)$$

Об'єднуючи (11) і (12) отримуємо, що першому агенту не має сенсу збільшувати свій ранг рефлексії вище

$$K_{\max} = \min \{K_{\min}, L_{\min} + 1\} \quad (13)$$

а другому агенту не має сенсу збільшувати свій ранг рефлексії вище

$$L_{\max} = \min \{L_{\min}, K_{\min} + 1\} \quad (14)$$

Позначимо

$$R_{\max} = \max \{K_{\max}, L_{\max}\} \quad (15)$$

Таким чином, доведена справедливість наступного твердження.

Твердження 2. Використання агентами в біматричній грі рангів стратегічної рефлексії вище, ніж (13) і (14), не має сенсу. Твердження 2 дає можливість у кожному конкретному випадку кожному агенту обчислити максимальні доцільні ранги стратегічної рефлексії обох агентів. Так як величини (13) - (14) залежать від гри (матриць виграшів), то отримаємо оцінки залежності цих величин від розмірності матриць виграшів (очевидно, що $|I_{\infty}| \leq |I| = n$, $|J_{\infty}| \leq |J| = m$, де m, n – розмірність матриці).

Твердження 3. В біматричних іграх $n \times m$ максимальні доцільні ранги стратегічної рефлексії першого і другого агентів задовольняють наступним нерівностям:

$$\begin{aligned} K_{\max}(n, m) &\leq \min \{n, m + 1\}, \\ L_{\max}(n, m) &\leq \min \{m, n + 1\}, \\ L_{\max}(n, m) &\leq \max \{ \min \{n, m + 1\}, \min \{m, n + 1\} \}, \end{aligned} \quad (16)$$

Наслідок 1. В біматричних грі $n \times n$, $n \geq 2$, максимальний доцільний ранг стратегічної рефлексії будь-якого агента $R_{\max}(n, n) \leq n$.

Наслідок 2. В біматричній грі 2×2 максимальний доцільний ранг рефлексії не перевищує двох.

Приклад 2. ("Prisoners 'Dilemma" (Дилема ув'язненого)). Розглянемо біматричних гру: у кожного з двох ув'язнених - співників є дві дії: «Н» - «Не зізнаватися в скоєнні злочину» і «З» - «зізнатися в скоєнні злочину». Якщо зізнаються обидва агента, то вони отримують покарання - їх виграш є вектор $(1; 1)$. Якщо перший зізнається, а другий ні, то перший виходить на свободу, а

другий отримує значне покарання - вектор виграшів (результат) - (9; 0). Симетричним чином йде справа, якщо зізнається другий агент і несознається перший. І, нарешті, якщо не зізнаються обидва, то обидва отримують невелике покарання, кожен отримає виграш рівний 5, тобто менший, ніж якби він вийшов на свободу. Матриця виграшів приведена у таблиці

Дії	Н	З
Н	(5;5)	(0;9)
З	(9;0)	(1;1)

(відзначимо, що дія «З» у обох агентів домінує над дією «Н»). Єдиною рівновагою Неша є («З»; «З»), яка складається з гарантуючих стратегій агентів і дає їм відповідно виграші $a_0 = 1$ і $b_0 = 1$. Отже, $i_0 = i_1 = i_2 = \dots i_\infty = \text{«З»}$, $j_0 = j_1 = j_2 = \dots j_\infty = \text{«З»}$, і розгляд рефлексії в даній грі не має сенсу (принаїмні, жодне з визначень (7) - (9) не дає «нової» рівноваги, в тому числі, не дозволяє обґрунтувати стійкості Парето-ефективного результату (при якому значення кожного приватного показника, що характеризує систему, не може бути покращено без погіршення інших) - («Н»; «Н»), що є однією з тестових проблем теорії ігор.

Анотація: У роботі розглядається використання рефлексії у іграх, побудова ігрових стратегій, залежність рангу рефлексії від матриці платежів та виду рівноваги.

Ключові слова: Рефлексія, ранг рефлексії, ігрова стратегія, рівновага, матриця виграшів, максимальний доцільний ранг рефлексії.

Література

1. Смолян Г. Л. Исследование операций – инструмент эффективного управления. М., «Знание», 1967. – 64 с.
2. Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. — М.: МГУ, 2005. – 272 с.
3. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения. «Лань», 2010. – 446 с.
4. Новиков Д. А., Чхатишвили А. Г. Рефлексивные игры «Синтез» 2003. – 160 с.

Безцінна К. Н. (студ., 1 курс),
 Кобзар В. С. (студ., 1 курс)
 Науковий керівник – доц. Гадецька С. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Розглянуто наступну задачу оптимізації транспортних перевезень.

Фермерське господарство займається вирощуванням трьох видів ранніх овочів – капусти, томатів, паприки. Щотижня заготовляється відповідно 50, 30 та 20 т овочів, які необхідно відправити на реалізацію в чотири магазини B_1, B_2, B_3, B_4 . Магазини щотижня роблять замовлення на овочі в кількості 30, 30, 10 та 20 т відповідно. Вартість перевезення 1 т овочів від господарства до магазинів задано тарифною матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Визначити такий план перевезення овочів до магазинів, за якого загальні витрати фермерського господарства будуть найменшими.

На початку розв'язання занесемо дані задачі в матрицю перевезень (таблиця 1).

Таблиця 1

Матриця перевезень за даними задачі

м аг. овочі	30	30	10	20
50	2	3	4	2
30	5	7	1	4
20	9	4	3	2

Перевіримо умову балансу. Оскільки

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 50 + 30 + 20 = 100, \quad \sum_{j=1}^4 b_j = 30 + 30 + 10 + 20 = 90,$$

умова балансу не виконується.

Введемо фіктивний пункт споживання із попитом $b_5 = 100 - 90 = 10$.

Вартість переведення однієї тони овочів до фіктивного споживача дорівнює нулю.

Перший опорний план побудуємо методом північно-західного кута і покажемо це в наведеній нижче таблиці 3, виходячи з якої, перевіримо $\overline{X_1}$ на оптимальність методом потенціалів. Для цього знайдемо потенціали з системи рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 2, \\ \alpha_1 + \beta_2 = 3, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 7, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 1, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 4, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 2, \\ \alpha_3 + \beta_5 = 0. \end{cases}$$

Таблиця 2

Перший опорний план задачі

маг. овочі	30	30	10	20	10	α_i
50	2 30	3 20	4	2	0	$\alpha_1 = 0$
30	5	7 10	1 10	4 $\uparrow 10-\Delta$	0 $\Delta \downarrow$	$\alpha_2 = 4$
20	9	4	3	2 $\leftarrow 10+\Delta$	0 $10-\Delta$	$\alpha_3 = 2$
β_j	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	$\beta_3 = -3$	$\beta_4 = 0$	$\beta_5 = -2$	

Перевіримо виконання умови оптимальності для вільних клітин:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha_1 + \beta_3 \leq 4, & 0 - 3 \leq 4, \\
 \alpha_1 + \beta_4 \leq 2, & 0 + 0 \leq 2, \\
 \alpha_1 + \beta_5 \leq 0, & 0 - 2 \leq 0, \\
 \alpha_2 + \beta_1 \leq 5, & 4 + 2 \leq 5 \text{ — не виконується,} \\
 \alpha_2 + \beta_5 \leq 0, & \text{або } 4 - 2 \leq 0 \text{ — не виконується,} \\
 \alpha_3 + \beta_1 \leq 6, & 2 + 2 \leq 9, \\
 \alpha_3 + \beta_2 \leq 4, & 2 + 3 \leq 4 \text{ — не виконується,} \\
 \alpha_3 + \beta_3 \leq 4, & 2 - 3 \leq 4.
 \end{array}$$

Умова оптимальності не виконується для трьох клітин – (2; 1), (2; 5), (3; 2). Для них маємо:

$$\Delta_{21} = 4 + 2 - 5 = 1,$$

$$\Delta_{25} = 4 - 2 - 0 = 2,$$

$$\Delta_{32} = 2 + 3 - 4 = 1.$$

В клітині (2; 5) значення Δ_{ij} – максимальне ($\Delta_{25} = 2$), тому в цю клітину спрямовуємо перевезення Δ і будуємо цикл перерозподілу вантажу (показано в попередній таблиці 2). Одержуємо новий опорний план і перевіряємо його на оптимальність. Продовжуючи аналогічно застосування метода потенціалів, одержуємо нарешті третій опорний план

$$\overline{X}_3 = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевірка умови оптимальності для третього опорного плану підтверджує його оптимальність.

Значення цільової функції на третьому опорному плані зменшилося і становить $F = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 230$ грн.

$$\text{Отже, } X_{opt} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}, F_{min} = 230 \text{ ум. од.}$$

Метою наведеного розв'язування було дослідження логіки аналітичного алгоритму вирішення транспортної задачі за наступними класичними кроками:

- 1) знаходження початкового опорного плану (наприклад, методом мінімального елемента);
- 2) знаходження оптимального плану (методом потенціалів).

***Анотація.** Класична задача оптимізації є актуальною проблемою в логістичних дослідженнях і може бути розглянута як одна з провідних при побудові оптимального плану транспортних перевезень. Однією із затребуваних формулювань відповідної постановки проблеми є транспортна задача, яка вимагає як запровадження теоретичних засад, так і автоматизаційної реалізації. В роботі здійснено вирішення задачі логістичної оптимізації транспортних перевезень із застосуванням інструментарію середовища електронних таблиць MS EXCEL.*

***Ключові слова:** математична модель, оптимізація, математичне програмування, транспортна задача, метод потенціалів.*

Література

1. Математичні методи дослідження операцій: підручник / Є.А. Лавров, Л.П. Перхун, В.В. Шендрік та ін. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212 с.
2. Іваницька О. В. Транспортна задача лінійного програмування / О.В Іваницька, Н.В. Рощина, Р.С. Сербул // Агросвіт. - 2015. - № 14. - С. 35-40.
3. Кузьмичов А.І. Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel: навчальний посібник / А.І. Кузьмичов. — Київ: Ліра-К, 2015. — 215 с.

Бутенко Д. С. (студ.2 курсу)

Науковий керівник – доц. Ємельянова Т. В.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕЯКИХ СИСТЕМ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

В силу об'єктивних причин математична підготовка сучасних абітурієнтів, які вступають до технічних університетів, виявляється досить слабкою, але класичні математичні дисципліни, як базові математичні дисципліни, вимагають певного рівня сформованості шкільної математичної компетентності.

В технічному університеті основу базової математичної підготовки складає дисципліна Вища математика. Викладання цієї дисципліни починається з розділу Елементи лінійної алгебри. Матриці, визначники, системи лінійних рівнянь. Знання з цього розділу необхідні здобувачам дорожньо-будівельних спеціальностей таких, як «Будівництво та експлуатація автомобільних доріг», «Проектування доріг», «Технологія дорожньо-будівельних матеріалів» тощо.

Одним із напрямів подолання труднощів формування та розвитку математичних компетентностей студентів перших курсів є інтеграція математичних знань та компетентностей майбутніх професій. Основу такого підходу становить використання в навчальному процесі, як на лекціях, так і на практичних заняттях, професійно-орієнтованих математичних задач.

У статті наведено деякі приклади професійно-прикладних завдань за розділом «Елементи лінійної алгебри. Матриці, визначники, системи лінійних рівнянь» з банку професійно-орієнтованих завдань, який був підібрано здобувачами дорожньо-будівельних спеціальностей університету..

Приклад 1. Для дорожнього покриття вулиць міста підприємство виробляє асфальтобетон трьох видів: P_1 - щебеновий, P_2 - гравійний, P_3 - піщаний, використовує різного типу сировину: K_1 - крупнозернисту та K_2 - дрібнозернисту. Норми витрати сировини характеризуються матрицею витрат

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \text{ кожний елемент } a_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2) \text{ показує, скільки одиниць}$$

продукції j -ого типу витрачається на виробництво продукції i -ого типу. План виробництва продукції задано у вигляді матриці $C = \begin{vmatrix} 100 & 80 & 130 \end{vmatrix}$, вартість

одиниці кожного типу сировини (од. вартості) - матрицею $B = \begin{vmatrix} 30 \\ 50 \end{vmatrix}$.

Визначити витрати сировини, що необхідно для планового виробництва асфальтобетону, та загальну вартість сировини.

Розв’язання. Витрати сировини крупнозернистого типу при виробництві асфальтобетону складають

$$K_1 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730 \text{ од.}$$

Отже, витрати кожного типу сировини при плановому виробництві асфальтобетону записуємо у вигляді матриці, яка є добутком матриць С та А

$$K = C \cdot A = \begin{vmatrix} 100 & 80 & 130 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 730 & 980 \end{vmatrix}.$$

Загальна вартість сировини Q, необхідної при плановому виробництві асфальтобетону, обчислюємо як добуток матриці-витрат K та матриці-вартості B

$$Q = K \cdot B = \begin{vmatrix} 730 & 980 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 30 \\ 50 \end{vmatrix} = 70900 \text{ од.}$$

Відповідь. Для планового виробництва асфальтобетону слід витратити 730 од. крупнозернистої сировини (1-ого типу) та 980 од. дрібнозернистої сировини (2-ого типу). Загальна вартість витраченої сировини складає 70900 од.

Приклад 2. Підприємство виробляє для дорожнього покриття асфальтобетон трьох видів: P_1 - щебеневе, P_2 - гравійне, P_3 - піщане, використовує різного типу сировину: K_1 – крупнозернисту, K_2 – дрібнозернисту, K_3 – піщану. Норми витрати сировини та її запаси задані у таблиці. Визначити план виробництва асфальтобетону, при якому повністю витрачається сировина.

	P_1	P_2	P_3	Запаси сировини
K_1	1	1	2	190
K_2	2	0	2	180
K_3	2	1	0	160

Розв’язання. Нехай три види продукції виробляються в кількості x_1, x_2, x_3 . Згідно з умовами задачі отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 190 \\ 2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 180 \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 160 \end{cases}$$

Розв’язуємо систему методом Гаусса. Записуємо розгорнуту матрицю системи та перетворюємо її до ступінчастого вигляду

$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 2 & 0 & 2 & 180 \\ 2 & 1 & 0 & 160 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 0 & -2 & -2 & -200 \\ 0 & -1 & -4 & -220 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & -4 & -220 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & -3 & -120 \end{array} \right].$$

Ступінчаста розгорнута матриця дозволяє записати відповідну систему рівнянь, розв’язок якої є розв’язком системи рівнянь, отриманої за умовами задачі

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 190 \\ x_2 + x_3 = 100 \\ -3x_3 = -120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 60 \\ x_3 = 40 \end{cases}.$$

Відповідь. План виробництва продукції: $x_1 = 50$ од., $x_2 = 60$ од., $x_3 = 40$ од.

Приклад 3. У відповідності з програмою реконструкції доріг Харкова встановлено, що для планового ремонту дорожнього покриття доріг різних районів Харкова необхідно придбати додатні одиниці техніки спеціального призначення: дорожні фрези (1), асфальтоукладачі (2), машини для трамбування та ущільнення ґрунту (3): а) для Шевченківського району – 2 одиниці першого типу і 3 одиниці другого типу; б) для Московського району – 3 одиниці першого типу, 2 одиниці другого типу і одну одиницю третього типу; в) для Київського району – 2 одиниці другого типу.

Норма витрат паливно-мастильних матеріалів кожної одиниці техніки задана у таблиці. Визначити витрати паливно-мастильних матеріалів у кожному районі.

Тип техніки	Норми витрат паливно-мастильних матеріалів	
	Поливо	Масило
1	5	2
2	20	10
3	50	10

Розв’язання. Запишемо дані таблиці у вигляді матриці A вихідних даних за типом техніки та матриці B норм витрат паливно-мастильних матеріалів

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 20 & 10 \\ 50 & 10 \end{pmatrix}.$$

Витрати паливно-мастильних матеріалів у кожному районі визначаємо як суму добутків кількості одиниць техніки на нормативні витрати кожного типу матеріалів, отже

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 20 & 10 \\ 50 & 10 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 20 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 10 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 50 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10 \\ 1 \cdot 20 & 1 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 34 \\ 105 & 36 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Відповідь. У Шевченківському районі витрати на паливо дорівнює 70 од., витрати на мастило – 34 одиниці; у Московському районі – 105 одиниць і 36 одиниць; у Київському районі – 20 одиниць і 10 одиниць.

ГЕОМЕТРИЧНА ВЛАСТИВІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНИХ КРИВИХ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальні рівняння мають велике прикладне значення. Це пояснюється лише тим, що часто закони, яким підпорядковуються ті чи інші явища чи процеси, записуються саме у формі диференціального рівняння. Наприклад, закони механіки Ньютона зводять завдання про опис руху системи матеріальних точок або твердого тіла до математичної задачі про знаходження рішення диференціального рівняння. Дослідження системи на стійкість, течії хімічних реакцій – досліджується шляхом моделювання процесу, динаміка якого описується диференціальними рівняннями чи системами.

Математичні моделі можуть бути представлені лінійними, нелінійними диференціальними рівняннями, рівняннями в частинних похідних та їх системами, залежно від складності явищ, що моделюються. Багато питань виникає у разі моделювання процесів диференціальними рівняннями за заданими інтегральними кривими. У зв'язку з цим виникає потреба детального вивчення властивостей інтегральних кривих.

Метою даної роботи було вивчення геометричних властивостей інтегральних кривих лінійного диференціального рівняння першого порядку.

Лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку називається рівняння лінійне відносно функції та її похідної y, y' вигляду

$$y' + p(x)y = f(x),$$

де $p(x)$ і $f(x)$ – відомі неперервні функції на проміжку $x \in [a, b]$

Якщо y_1 і y_2 – два частинні розв'язки лінійного рівняння першого порядку, то загальний розв'язок може бути записано у вигляді [1]

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1)$$

Нехай y_3 - частинний розв'язок, відмінний від нуля. В такому разі y_3 міститься в загальному розв'язку при певному значенні сталої $C = C_1$:

$$y_3 = y_1 + C_1(y_2 - y_1).$$

З цієї рівності отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} y_3 - y_1 &= C_1(y_2 - y_1), \\ y_2 - y_3 &= y_2 - y_1 + C_1(y_2 - y_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_2 - y_3 &= (y_2 - y_1) - C_1(y_2 - y_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_2 - y_3 &= (1 - C_1)(y_2 - y_1), \end{aligned}$$

з яких випливає зв'язок між відрізками ординат інтегральних кривих y_1, y_2, y_3

$$\frac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1} = \frac{(1 - C_1)(y_2 - y_1)}{C_1(y_2 - y_1)} = \frac{1 - C_1}{C_1} = \overline{C_1}. \quad (1)$$

Висновок 1. Деяка інтегральна крива лінійного рівняння першого порядку ділить в постійному відношенні відрізок ординати між будь-якими інтегральними кривими цього рівняння (рис.1).

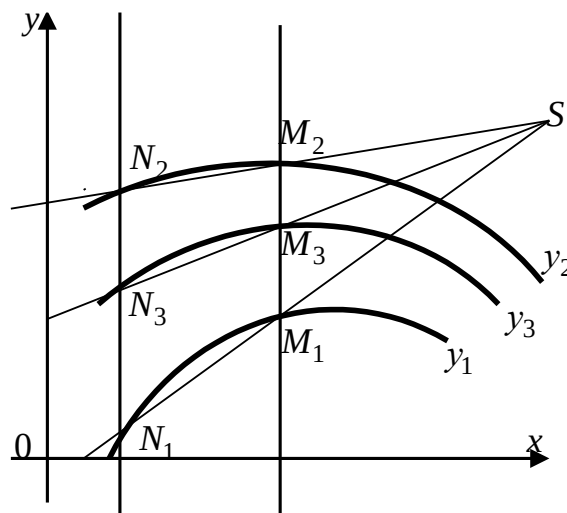


Рис.1

На рис.1 зображено інтегральні криві $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $y_3 = y_3(x)$ лінійного рівняння та відрізки ординат N_3N_2 , N_1N_3 , M_3M_2 , M_1M_3 , між якими існує постійне відношення

$$\frac{M_3M_2}{M_1M_3} = \frac{N_3N_2}{N_1N_3} = \overline{C_1}. \quad (2)$$

З співвідношення (2) випливає, що січні N_2M_2 , N_3M_3 , N_1M_1 повинні чи перетинатися в одній точці, чи бути паралельними. При необмеженому наближенні відрізка N_1N_3 до відрізка M_1M_3 ці січні стають дотичними до інтегральних кривих у точках M_1 , M_3 , M_2 .

Висновок 2. Дотичні до інтегральних кривих лінійного рівняння, що проведені в точках перетину прямої, яка паралельна осі ОУ, будуть паралельними чи перетинатися в одній точці.

Приклад 1. Перевірити виконання висновку 2 для рівняння $y' = y$.

Розв'язання. Загальним розв'язком цього рівняння є $y = Ce^{-x}$

Отже, три частинних розв'язків мають вигляд

$$y_1 = e^{-x}; y_2 = 2e^{-x}; y_3 = \frac{4}{3}e^{-x}.$$

Перевіримо виконання співвідношення

$$\frac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1} = \frac{2e^{-x} - \frac{4}{3}e^{-x}}{\frac{4}{3}e^{-x} - e^{-x}} = \frac{\frac{2}{3}e^{-x}}{\frac{1}{3}e^{-x}} = 2.$$

Отже, співвідношення (1) виконується, стала $\overline{C_1}$ дорівнює 2.

Побудуємо дотичні до інтегральних кривих, заданих частинними розв'язками

$$y_1 = e^{-x}; y_2 = 2e^{-x}; y_3 = \frac{4}{3}e^{-x} \quad \text{в точках перетину з віссю ОУ (рис.2).}$$

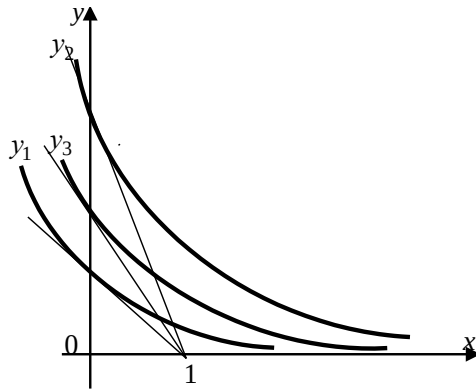


Рис.2

Побудуємо дотичні до інтегральних кривих, заданих частинними розв'язками

$$y_1 = e^{-x}; y_2 = 2e^{-x}; y_3 = \frac{4}{3}e^{-x} \quad \text{в точках перетину з віссю ОУ (рис.2).}$$

Рівняння дотичних до кожної кривої в точках перетину з віссю ОУ:

$$y_1 : y - 1 = -x,$$

$$y_2 : y - 2 = -2x,$$

$$y_3 : y - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}x.$$

Ці дотичні перетинаються в одній точці (1,0) осі ОХ.

Відповідь. Висновок 2 виконується, оскільки дотичні до інтегральних кривих лінійного рівняння, що проведені в точках перетину прямої, яка паралельна осі ОУ, перетинаються в одній точці.

Приклад 2. Перевірити виконання висновку 2 для рівняння

$$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = x \cdot \operatorname{tg} x + 1.$$

Розв'язання.

Загальним розв'язком цього рівняння є $y = x + C \cdot \cos x$.

Кут нахилу дотичних до всіх інтегральних кривих заданого рівняння визначається похідної від загального розв'язку

$$y' = (x + C \cdot \cos x)' \Rightarrow y' = 1 + C \cdot \sin x.$$

В точках перетину інтегральних кривих з віссю ОУ кут нахилу дотичних до них в цих точках складає 45^0

$$y'(0) = 1 + C \cdot \sin 0 \Rightarrow y'(0) = 1.$$

Відповідь. Висновок 2 виконується, оскільки дотичні до інтегральних кривих лінійного рівняння, що проведені в точках перетину прямої, яка паралельна осі ОУ, паралельні.

Література

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, 3-е издание, исправленное и дополненное. – М.: Высшая школа, 1967. – 565 с.

Головань О. О. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – ст. викл. Мороз І. І.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ ДИНАМІКИ ГІДРОПРИВОДА ТРАКТОРА

На теперішній час системи об'ємного гідропривода (ОГП) рульового керування використовуються практично на всіх самохідних машинах спеціального призначення [1], до яких відносяться будівельні та дорожні машини, трактори, різноманітні сільськогосподарські та інші машини. Для забезпечення якості таких систем рульового керування весь час ведуться роботи по їх вдосконаленню [2] та модернізації їх основного вузла – насоса-дозатора.

В данній статті аналізується система рульового керування вдосконаленої гідросистеми колісного трактора ХТЗ-17021. Для проведення аналізу динамічних процесів в силовому контурі рульової системи розроблено розрахункову схему ОГП трактора, яку наведено на рис. 1. Гідравлічна схема містить дві системи – систему рульового керування з блоком насоса-дозатора НД та систему керування навісними агрегатами (блок Р). Обидві системи живляться від одного насоса Н.

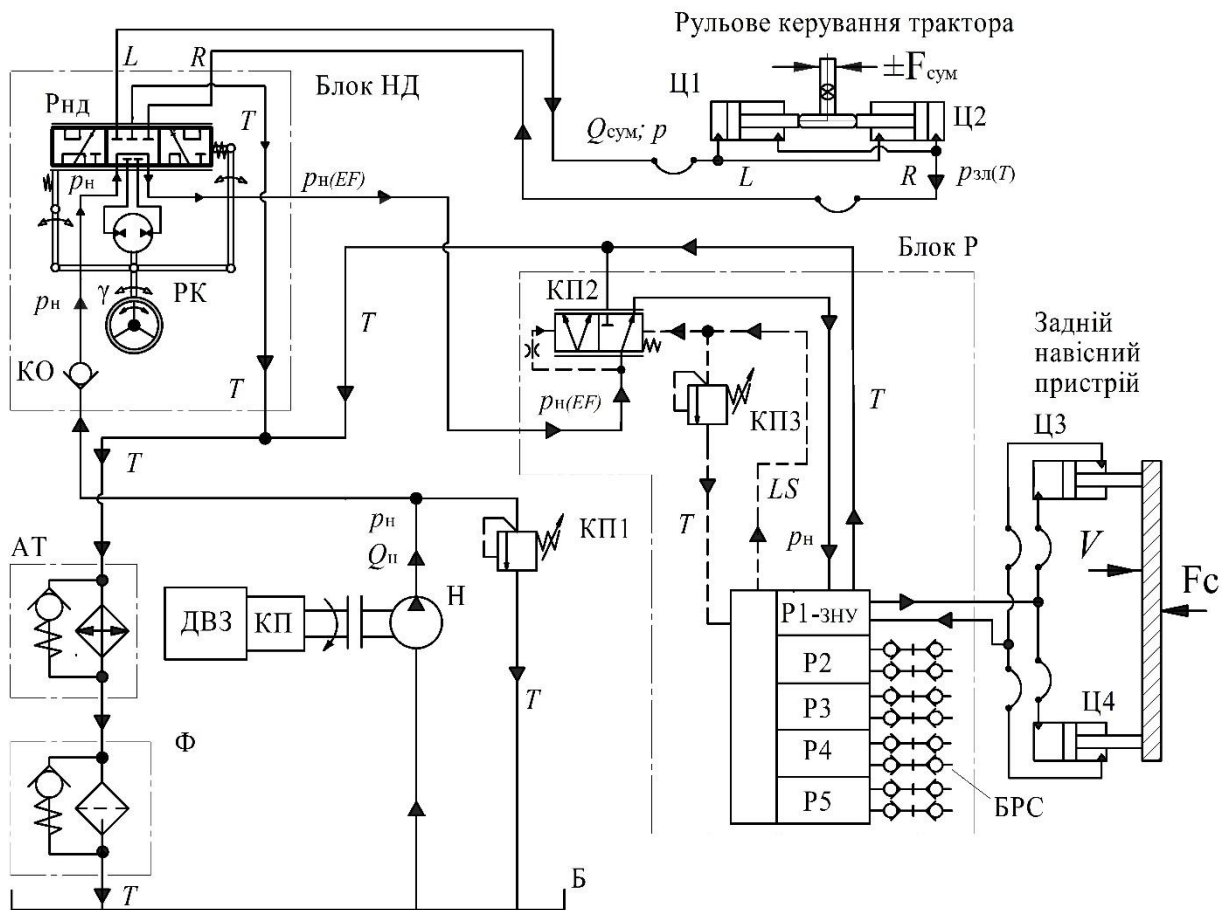


Рис. 1. Розрахункова схема динаміки ОГП системи рульового керування

Насос живлення Н з приводом від коробки передач КП та двигуна внутрішнього згоряння ДВЗ нагнітає РР під тиском p_n до вхідного каналу НД, де вона через зворотний клапан КО потрапляє на вхід гідророзподільника Рнд.

Особливість розглядаємої системи рульового керування полягає в тому, що в ній використовується насос-дозатор фірми *Lifam* моделі *SUB 400-S1* з вбудованим пріоритетним клапаном. Тому крім основних вихідних каналів L і R , цей насос-дозатор НД містить додатковий, який є вихідним каналом $p_n(EF)$ вбудованого пріоритетного клапана, і до якого підключена система керування навісними агрегатами. Вхідний напірний канал p_n насоса-дозатора НД з'єднано з виходом насоса живлення Н, а зливний канал T

з'єднується зі зливною магістраллю всієї гідросистеми трактора, звідки РР потрапляє в гідробак Б через оливаохолоджувач АТ та фільтр Ф.

Вмонтована в гідророзподільник Рнд функція пріоритету за лінією $p_n(EF)$ забезпечує подачу частини витрати насоса $Q_{\text{сум}}$ в першу чергу до системи рульового керування в кількості, що визначається швидкістю обертання керма, а решта відводиться до системи керування навісними агрегатами.

Система гідропривода рульового керування містить насос-дозатор НД, золотник розподільного вузла якого безпосередньо з'єднаний з рульовим колесом РК (кермом), поворот якого на кут γ задає керуючу дію цій системі. Основні вихідні канали L і R насоса-дозатора НД з'єднані з порожнинами виконавчих гідроциліндрів Ц1 і Ц2, штоки яких підключені зустрічно до сошки, від якої через систему важелів задають кут повороту керованим колесам. Тиск в каналі підведення РР до гідроциліндрів на схемі позначено p , а $p_{\text{зл}}$ в каналі відведення РР.

Система керування навісними агрегатами містить багатосекційний розподільник (блок Р), в комплекті з яким застосовується запобіжний клапан непрямої дії – основний запобіжний клапан КП1 та допоміжний (пілотний) КП2.

Для заднього навісного пристрою (ЗНУ) використовується гідророзподільник Р1-зну, а для інших навісних агрегатів трактора використовуються розподільники Р2...Р5 з швидкокороз'ємними з'єднаннями БРС.

Далі постало питання аналізу динамічних процесів в гідроциліндрах системи повороту коліс при різних величинах витрати $Q_{\text{сум}}$ від насоса-дозатора НД та різних значеннях зустрічного зовнішнього навантаження $F_{\text{сум}}$. Для проведення такого дослідження використаємо методику імітаційного

математичного моделювання, розглядаючи зміну тиску в порожнинах гідроциліндрів та переміщення їх штоків.

Вихідним параметром насоса-дозатора є витрата $Q_{\text{сум}}$, яка може змінюватися за своїм значенням залежно від швидкості обертання рульового колеса. Іншою складовою дії на гідроциліндри є зовнішнє навантаження з боку коліс трактора $F_{\text{сум}}$, для подолання якого створюється необхідний тиск РР.

При побудові математичної моделі силової частини системи гідрооб'ємного рульового керування приймаємо наступні припущення [3]:

- щільність РР (ρ) приймаємо постійною;
- нехтуємо витоками крізь поршневі та штокові ущільнення в гідроциліндрах;
- не враховуємо хвильові процеси в трубопроводах з причини їх невеликої довжини;
- розглядаємо додання системою значних навантажень, при яких тиск на виході з гідроциліндрів $p_{\text{зл}}$ незначний і їм можна знехтувати.

Математична модель розглядаємої системи з урахуванням прийнятих припущень для режиму повороту може бути представлена у наступному вигляді.

Сумарна витрата робочої рідини $Q_{\text{сум}}$, що подається з вихідних каналів насоса-дозатора, підводиться до поршневої порожнини гідроциліндра Ц1 та штокової гідроциліндра Ц2 (умовно розглядаємо поворот коліс наліво). На основі рівняння нерозривності РР баланс витрат для цієї ділянки можна записати у виді

$$Q_{\text{сум}} = Q_{1\text{п}} + Q_{2\text{ш}} + Q_{\text{деф}}, \quad (1)$$

де $Q_{1\text{п}}$ і $Q_{2\text{ш}}$ – витрати РР на вході в поршкову порожнину гідроциліндра Ц1 та штокову порожнину гідроциліндра Ц2;

$Q_{\text{деф}}$ – витрати РР на її деформацію.

Складові рівняння (1) визначаються залежностями

$$Q_{\text{сум}} = V_{\text{нд}} \times n_{\text{к}}; Q_{1\text{п}} = S_{1\text{п}} \times v; Q_{2\text{ш}} = S_{2\text{шт}} \times v, \quad (2)$$

де $V_{\text{нд}}$ – робочий об’єм дозуючого вузла насоса-дозатора;

$n_{\text{к}}$ – швидкість обертання керма;

$$S_{1\text{п}} = \frac{p \times D_{\text{п}}^2}{4} \quad \text{і} \quad S_{2\text{шт}} = \frac{p}{4} (D_{\text{п}}^2 - d^2) - \text{площі поршня діаметром } D_{\text{п}} \text{ та ефективна}$$

площа штокової порожнини гідроциліндра при діаметрі штоку d , відповідно;

v – швидкість переміщення штоків гідроциліндрів.

Деформаційна вирата визначається як

$$Q_{\text{деф1}} = [(V_{01} + S_{1\text{п}}) / E] (dp / dt); Q_{\text{деф2}} = [(V_{02} + S_{2\text{шт}}) / E] (dp / dt), \quad (3)$$

де p – тиск в порожнинах гідроциліндрів Ц1 і Ц2 (приймаємо однаковим згідно закону Паскаля для РР);

V_{01} і V_{02} – початкові об’єми в поршневій (для Ц1) та штоковій (для Ц2) порожнинах, відповідно (надалі приймаємо $V_{\text{сум}} = V_{01} + V_{02}$);

E – модуль пружності РР.

Після перетворень формула для балансу витрат РР для ділянки вихідного каналу насоса-дозатора приймає вид

$$Q_{\text{сум}} = n \frac{p}{4} (2D_{\text{п}}^2 - d^2) + \frac{V_{\text{сум}} + y \frac{p}{4} (2D_{\text{п}}^2 - d^2)}{E} \times \frac{dp}{dt}. \quad (4)$$

Після перетворення до форми Коші відносно похідної dp / dt одержимо наступне рівняння

$$\frac{dp}{dt} = E \frac{Q_{\text{сум}} - n \frac{p}{4} (2D_{\text{п}}^2 - d^2)}{V_{\text{сум}} + y \frac{p}{4} (2D_{\text{п}}^2 - d^2)}, \quad (5)$$

і після його інтегрування визначаємо зміну тиску в часі в гідроциліндрах системи рульового керування

$$p = \int_0^t E \frac{Q_{\text{сум}} - n \frac{p}{4} (2D_{\text{п}}^2 - d^2)}{V_{\text{сум}} + y \frac{p}{4} (2D_{\text{п}}^2 - d^2)} dt. \quad (6)$$

Рівняння руху штоків навантажених гідроциліндрів Ц1 і Ц2, виходячі з принципу Даламбера, має вид

$$a = \frac{dn}{dt} = \frac{1}{m} (S_{1\text{п}} + S_{2\text{п}} - S_{2\text{шт}})p - F_1 - F_2 - F_{1\text{ж.тр}} - F_{2\text{ж.тр}} - F_{1\text{тр}} - F_{2\text{тр}}, \quad (7)$$

де m – маса, що підлягає повороту;

$F_1 + F_2 = F_{\text{сум}}$ – сумарне зовнішнє зусилля (навантаження), що долається двома гідроциліндрами;

$F_{1\text{ж.тр}}$ і $F_{2\text{ж.тр}}$ – рідинне тертя в гідроциліндрах Ц1 і Ц2, відповідно;

$F_{1\text{тр}}$ і $F_{2\text{тр}}$ – напівсухе тертя поршнів та штоків гідроциліндрів Ц1 і Ц2, відповідно.

Зробимо припущення про постійність тертя в обох гідроциліндрах Ц1 і Ц2

$$F_{\text{ж.тр}} = F_{1\text{ж.тр}} + F_{2\text{ж.тр}} = \text{const}; F_{\text{тр}} = F_{1\text{тр}} + F_{2\text{тр}} = \text{const}, \quad (8)$$

та з урахуванням $S_{1\text{п}} = S_{2\text{п}}$ отримаємо таку форму запису рівняння (7)

$$a = \frac{dn}{dt} = \frac{1}{m} (2S_{1\text{п}} - S_{2\text{шт}})p - F_{\text{сум}} - F_{\text{ж.тр}} - F_{\text{тр}}. \quad (9)$$

Після двох послідовних інтегрувань цього рівняння маємо вирази для швидкості та переміщення штоків гідроциліндрів при повороті трактора

$$n = \int_0^t \frac{1}{m} (2S_{1\text{п}} - S_{2\text{шт}})p - F_{\text{сум}} - F_{\text{ж.тр}} - F_{\text{тр}} dt; y = \int_0^t n dt. \quad (10)$$

Для проведення динамічного аналізу роботи розглядаємої системи скористаємося обчислювальними блоками пакету VisSim [4] з урахуванням використання блоків Variable. При моделюванні системи рульового керування з двома гідроциліндрами аналізуються перехідні процеси в системі і її вихід на сталий режим. При розрахунках за допомогою цих блоків задаємо лінійний

закон зміни сили зовнішнього навантаження та витрати РР або задаємо їх числовими значеннями.

Для вирішення рівнянь математичної моделі скористаємося чисельним методом Рунге-Кутта четвертого порядку з дискретністю $D = 0,001$ с.

Результати досліджень отримані у вигляді розрахункових осцилограм.

Література

1. Сучасні тенденції розвитку систем гідрооб'ємного рульового керування / М. І. Іванов, О. М. Переяславський, С. А. Шаргородський, О. О. Моторна // Промислова гідрравліка і пневматика – 2011. – 4(34). – С. 109–112.
2. Модернизация объемных гидроприводов навесного оборудования колесных тракторов ПАО «ХТЗ им. С. Орджоникидзе» / Г. А. Аврунин, В. И. Аносов, В. Н. Рулев, В. Б. Самородов // Промислова гідрравліка і пневматика – 2014. – №4(46). – С. 71–89.
3. Расчет, проектирование и эксплуатация объемного гидропривода / З. Л. Финкельштейн, О. М. Яхно, В. Г. Чебан, З. Я. Лурье, І. А Чекмасова – Киев: НТУУ «КПІ» ВПИ ВПК «Политехника», 2006. – 216 с.
4. Лурье З. Я. Динамика двухмерной системы управления мехатронного гидроагрегата навесным оборудованием трактора / З. Я. Лурье, Е. Н. Цента, А. И. Панченко. – Промислова гідрравліка і пневматика, 2017, №3(57), с. 29–46.

УДК 004.942

Градовський А. С.(студ.)

Науковий керівник – доц. Гриб'юк О. О.

Міжнародний науково-технічний університет (Київ, Україна)

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ГРИ «АЕРТОРІЯ» З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ ОБ'ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Навчання програмування відповідає ідеям дослідницького навчання (навчання технологій, які будуть потрібні в майбутньому) і дозволяє залучити учнів різного віку до процесу інноваційної та науково-технічної творчості [1].

Враховуючи результати досліджень [2], [3], зазначимо основну мету та завдання впровадження освітньої робототехніки у навчальний процес закладів освіти, а саме: формування та розвиток в учнів інтересу до природничих і точних наук, науковотехнічної творчості, що відповідає ідеям ІТ-освіти; формування в учнів навичок роботи з технічними пристроями та умінь

практичного вирішення актуальних інженерно-технічних проблем [5]; формування якостей особистості, яка здатна самостійно ставити цілі, проектувати шляхи їх реалізації, контролювати й оцінювати свої досягнення; формування в учнів умінь працювати з різними джерелами інформації, оцінювати їх і на цій основі формулювати власну думку, судження, оцінку, ініціювати та створювати власні розробки [6]; реалізація метапредметних зв'язків між інформатикою, математикою, фізикою та технологіями; формування в учнів наукового світогляду як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; формування та розвиток в учнів стійкої мотивації до навчання ООП [8]; інтелектуальний розвиток особистості [4], [7], зокрема розвиток в учнів логічного, алгоритмічного та креативного мислення при розв'язуванні прикладних задач [9], інформаційної культури, пам'яті, уваги, наукової інтуїції.

```
enum ItemTypes
{
    more_items,
    //Weapon
    item_stone_sword, //одноручний
    item_bow, //двуручний
    item_yatagan, //одноручний
    item_soul_sword, //двуручний
    item_frost_mourning, //двуручний, уменьшает защиту
    item_demonic_saber, //меч выпадает только из Королей демонов, необходимо убить 9 чтобы сделать с каждым убийством босса он улучшается по урону и хп
    item_magic_pistol, // одноручный
    //Food
    item_apple,
    item_bread,
    item_pie,
    //Ammo
    ammo_magic_bullet, // урон x2 при попадании, шанс попадания 20%
    ammo_arrow,
    //Magic
    magic_damage,
    magic_damage2,
    magic_damage3,
    //Armor
    armor_
};
```

```
int search(World* w) {
    if (w->player != NULL) {
        if (w->player->room != NULL) {
            int rn = rand() % 200 + 1;
            if (rn <= 20) {
                std::cout << "Слизень!" << endl;
            }
            else if (rn <= 40) {
                std::cout << "Оборотень!" << endl;
            }
            else if (rn <= 60) {
                std::cout << "Гарпия!" << endl;
            }
        }
    }
}
```

```

class ViewPlayer : public view {
public:
    void print(World* w) {
        std::cout << "Информация о игроке " << w->player->name << endl;
        if (w->player->inv->items.size()) {
            std::cout << "В рюкзаке что-то есть" << endl;
            ViewInventory::print(w->player->inv);
        }
    }
};

```

ООП є ефективним інструментом для навчання через проектну діяльність, в якій програмування, технічна творчість інтегруються в один проект [1]. Навчання ООП надає учням та студентам можливості за допомогою моделювання та конструювання досліджувати, як технології працюють в реальному житті [10].

```

class Weapon : public Item {
public:
    Weapon() {
        name = "оружие";
    }
};

class Food : public Item {
public:
    // std::string name =
    Food() {
        name = "Еда";
    }
};

class Ammo : public Item {
public:
    // std::string name =
    Ammo() {
        name = "Стрель";
    }
};

class Magic : public Item {
public:
    Magic() {
        name = "Магия";
    }
};

```

В Україні розвиток ООП в рамках освітнього процесу відбувається епізодично на предметному рівні, у навчанні інформатики та ООП, в позашкільній освіті, але на цей час відсутній системний підхід. Тому впровадження ООП в освітній процес середніх і вищих навчальних закладів як одного з напрямків ІТ-освіти, розробка відповідних навчальних програм має важливе значення [1]. Метою програми вивчення ООП є засвоєння учнями цілісної системи теоретичних знань із ООП та супутніх їй галузей знань як науки про методи та засоби автоматизації технічних систем, а також пізнання ними основних принципів

наукової роботи та стимулювання самостійної практичної наукової діяльності.

Анотація. Програмування є одним з інструментів підготовки фахівців майбутнього, здатних креативно мислити та створювати інновації. У дослідженні розглядається ООП як основний інструмент для розвитку та виховання майбутнього інженера.

Ключові слова: об'єктно-орієнтоване програмування, дослідницьке навчання, варіативні моделі, нейронні мережі, комп'ютерне моделювання.

Література

1. Гриб'юк О. О. Дослідницьке навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з використанням комп'ютерно орієнтованих методичних систем / О. О. Гриб'юк. Монографія. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019.

2. Гриб'юк О.О. Комп'ютерне моделювання та робототехніка в навчально-виховному процесі сучасного навчального закладу. / Гриб'юк О.О. // Сьома міжнародна науково-практична конференція FOSS Lviv-2017: Збірник наукових праць, 27-30 квітня 2017 року, м. Львів.: 38-43.

3. Hrybiuk O. Improvement of the Educational Process by the Creation of Centers for Intellectual Development and Scientific and Technical Creativity. In: Hamrol A., Kujawińska A., Barraza M. (eds) *Advances in Manufacturing II. MANUFACTURING 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2019.: 370-382. Springer, Cham Online.

4. Гриб'юк О.О. Рівнева модель дослідницького навчання учнів математики з використанням комп'ютерно орієнтованої методичної системи: дидактичні аспекти та перспективи. *The Variativ Model for Research Training for Math Students Using Computer-oriented Methodical System*. Vol 77 N3 (2020). Pp. 39-65.

5. Гриб'юк О.О. Імерсивні технології в освіті: особливості когнітивного розвитку дитини у віртуальному середовищі в процесі дослідницького навчання. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: збірник наукових праць. Київ-Вінниця: ТОВ Фірма «Планер», 2020.

6. Гриб'юк О.О. Перспективи впровадження варіативних моделей комп'ютерно орієнтованого середовища навчання предметів природничо-математичного циклу у загальноосвітніх навчальних закладах України. Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. Випуск 22: Дидактичні механізми дієвого формування компетентнісних якостей майбутніх фахівців фізико-технологічних спеціальностей. С. 184-190.

7. Гриб'юк О. Дослідження розвитку інтелекту: Особливості дослідницького навчання учнів з різними рівнями розвитку інтелекту в закладах загальної середньої освіти України та Польщі. *Технології розвитку інтелекту: відкритий наукометричний журнал* / О.О. Гриб'юк, Й. Шафран. Том 4, No 3 (28), 2020 ISSN: 2223-0521.

8. Hrybiuk O. Mathematical modeling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry // *Proceedings of the First International conference on Eurasian scientific development*. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH. Vienna. 2014. P. 46-53.

9. Hrybiuk O. Problems of expert evaluation in terms of the use of variative models of a computer-oriented learning environment of mathematical and natural science disciplines in schools, [w:] *Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Seria: Organizacja i Zarządzanie, Zeszyt Nr 79*, Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej (WPP), 2019.: 101-119. ISSN 0239-9415.

10. Гриб'юк О.О. Психофізіологічні аспекти феномену присутності дитини у віртуальному середовищі у процесі дослідницького навчання: результати емпіричного дослідження. *European potential for the development of pedagogical and psychological science: Collective monograph*. Riga, Latvia: "Baltija Publishing", 2021.: 147-187.

Груніна С. Б. (студ., 2 курс)
Науковий керівник - проф. Ярхо Т. О.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ОСНОВНІ ДИДАКТИЧНІ АСПЕКТИ САМОСТІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ З МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН ОЧАМИ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Відомо, що впровадження у вітчизняну вищу освіту принципів Європейської освітньої системи спричинило необхідність перегляду традиційних складових навчальних планів професійної підготовки фахівців у вишах.

Сучасне соціально-економічне середовище висуває до майбутніх фахівців будь-якої галузі вимоги приймати рішення у складних професійних умовах [1]. Тому у сучасній вищій освіті головною має стати така професійна підготовка особистості, яка формує майбутнього фахівця, здатного до самостійної організації й творчої професійної діяльності. Ефективним структурним елементом навчального процесу ЗВО у цьому відношенні є самостійна підготовка здобувачів. Адже знання, отримані самостійно, з подоланням посильних труднощів засвоюються здобувачами міцніш, ніж ті, що у готовому вигляді подаються викладачами [2]. Саме такі знання є діяльними знаннями, що забезпечують формування здатностей до ефективного здійснення майбутньої професійної діяльності.

Самостійна робота здобувачів даної форми навчання як невід'ємна складова планів їхньої підготовки становить майже половину всього передбаченого обсягу годин, відведеного для вивчення навчальних дисциплін. Природно, що ефективність самостійної роботи здобувачів у значній мірі впливає на їхню успішність.

У системі підготовки здобувачів ЗВО заочної форми навчання самостійна робота є основним структурним елементом навчального процесу, доля якого практично співпадає із загальним обсягом передбачених на

дисципліну годин. На наш погляд, у цьому випадку саме ефективність самостійної роботи здобувачів визначає якість їхньої професійної підготовки.

У зазначених умовах великої долі самостійної роботи у загальному обсязі передбачених на дисципліну годин, услід за Г. Карповою [2] особливо важливим вважаємо керований тип самостійної роботи: планування викладачем її змісту і організації, регламентацію, консультативну підтримку, упровадження ряду новітніх дидактичних засобів. У першу чергу, це стосується найскладніших математичних дисциплін. У роботі [3] підкреслено, що організація самостійної роботи здобувачів у різних циклах вищої освіти має відбуватися з різним ступенем підтримки з боку викладачів. Ми згодні, що у першому циклі (бакалавраті) така підтримка має бути особливо структурованою, спланованою і, найголовніше – дидактично обґрунтованою.

Вважаємо, що в основу самостійної підготовки з математики здобувачів бакалаврату мають бути покладені наступні дидактичні принципи фундаменталізації базової математичної підготовки [4]:

- генералізації знань;
- проблемності;
- системності;
- єдності теоретичного і прикладного знання;
- ІКТ- супроводження;
- доступності;
- особистісного підходу в навчанні;
- управління пізнавальною діяльністю тих, хто навчається.

Принцип генералізації знань передбачає чітке виокремлення базової основи змісту математичних курсів, яка має скласти предмет самостійної роботи здобувачів.

Принцип проблемності природно являє собою підґрунтя самостійної підготовки здобувачів із математичних дисциплін. Адже, за своєю сутністю, більшість завдань з математики є свого роду проблемами, вирішення яких вимагає певних роздумів тих, хто навчається.

Принцип системності вважаємо ключовим принципом ефективної самостійної роботи здобувачів. Цей принцип, за характеристикою класиків дидактики [4], виражає впорядкованість опанування навчального матеріалу, його раціональне поділення на змістовні фрагменти та поступове їхнє вивчення. Так, здобувачі спочатку мають оволодіти математичною термінологією та засвоїти певний мінімум базової інформації з математичних дисциплін. Це надає змогу подальшого опанування навчального матеріалу із поступовим збільшенням ступеня його докладності, обґрунтованості та загального обсягу.

Вважаємо, що у зазначений процес опанування має бути впровадженим *принцип єдності теоретичного і прикладного знання*. За висновками дослідження [4], взагалі цей принцип передбачає у викладі класичних математичних курсів проведення обов'язкового аналізу відомих практичних задач, які призводять до необхідності введення у розгляд відповідних математичних об'єктів, та створення теорій щодо цих об'єктів. Указане вивчення має знайти продовження у набутті навичок розв'язання нескладних завдань з техніки математичних перетворень та обчислень, набутті здатностей розв'язувати типові, стандартні, а також окремі нестандартні задачі. Спираючись на загальне трактування принципу єдності теоретичного і прикладного знання, вважаємо, що його впровадження у самостійну роботу здобувачів має обов'язково вплинути на правильну організацію цієї роботи. Вона повинна починатися з розбору практичних задач, що мотивують введення у розгляд нових аспектів математики. Виконанню практичних завдань типової розрахункової роботи здобувачів денного відділення або домашньої контрольної роботи здобувачів заочної форми навчання має передувати ретельне вивчення і з'ясування необхідних теоретичних положень та зразків обґрунтованого розв'язання відповідних практичних задач. Впровадження у самостійну роботу здобувачів ЗВО принципу єдності теоретичного і прикладного знання також передбачає використання ними інформаційно-комунікаційних технологій у розв'язанні професійно-

прикладних задач. Особливо це стосується завдань з опрацювання статистичних даних. Отже, із дидактичним принципом єдності теоретичного і прикладного знання є тісно пов'язаним *принцип ІКТ-супроводження*.

На наш погляд, з точки зору цього принципу, у самостійній роботі здобувачів, особливо заочної форми навчання, надзвичайно важливою є можливість здійснення самоконтролю поточного стану математичної підготовки здобувачів. Зазначимо, що сучасні математичні дистанційні курси-ресурси супроводжено значною кількістю автоматизованих тестів самоперевірки рівня засвоєння знань з найважливіших розділів дисциплін, а також з усього курсу в цілому. Ми згодні з автором роботи [5] у тому, що комп'ютерні засоби самоконтролю засвоєння математичної інформації та набуття здатностей її практичного застосування надають можливість здобувачам своєчасно коригувати свою самостійну навчальну діяльність.

На думку здобувачів ЗВО, математика є однією з важких для засвоєння базових дисциплін професійної підготовки. Це пов'язано з високою абстрактністю цієї науки, тісним взаємозв'язком усіх її понять і фактів, який нелегко підтримувати здобувачам перших-других курсів, особливо з низьким рівнем шкільної математичної підготовки. Отже, у виклад математичного матеріалу, а надалі – в організацію самостійної роботи здобувачів має бути покладений важливий і відомий дидактичний *принцип доступності*. Цей класичний дидактичний принцип вимагає, щоб зміст, обсяг матеріалу, що вивчається, а також методи навчання відповідали б рівню розвитку тих, хто навчається, та їхнім можливостям засвоїти пропонований матеріал [4]. Отже, за своєю суттю, вказаний принцип є безпосередньо пов'язаним з дидактичним принципом *особистісного підходу в навчанні*. Вважаємо доцільним упровадження обох зазначених принципів у самостійну роботу здобувачів ЗВО в наступному сенсі. Самостійна робота, спланована і керована викладачами, відповідно до дидактичного принципу *управління пізнавальною діяльністю тих, хто навчається*, на нашу думку, має включати загальну, обов'язкову компоненту та певну множину додаткових індивідуальних

траєкторій різного рівня. Важливою задачею викладача є підбір та пропонування індивідуальної траєкторії самостійної роботи кожному здобувачеві, залежно від рівня його математичної підготовки та особистісних здатностей.

Висновок. Стосовно визначення дидактичних аспектів самостійної підготовки здобувачів ЗВО з математичних дисциплін переконані у доцільності та надзвичайної важливості зустрічних досліджень здобувачів та викладачів. На жаль, науково-методичних розвідок здобувачів із зазначеної теми у даний час замало. Тому актуальним вважаємо подальші публікації здобувачів ЗВО стосовно оцінки новітніх наукових дидактичних і методичних пропозицій педагогів, а також за власними ідеями.

Література

- 1.Сурякова М. В. Роль самостійної роботи у професійній підготовці фахівця / М. В. Сурякова // Вісник Дніпропетровського університету імені Альфреда Нобеля. Серія «Педагогіка і психологія». – 2011. – № 2(2). – С. 154 – 159.
- 2.Карпова Г. С. Інноваційні підходи до організації самостійної роботи студентів / Г. С. Карпова // Фізико-математична освіта. – 2018. – Випуск 1(15). – С. 232 – 235.
- 3.Ярхо Т. О. Актуалізація та розвиток самостійної пізнавальної діяльності здобувачів ЗВО в процесі фундаменталізації математичної підготовки / Т. О. Ярхо, Т. В. Ємельянова, Д. В. Легейда, О. Д. Пташний. // Наукові записки. Серія: Педагогічні науки. – 2019. – № 183. – С. 46 – 50.
4. Ярхо Т. О. Фундаменталізація математичної підготовки майбутніх фахівців технічного профілю у вищих навчальних закладах: монографія. Х: ФОП Гончаренко В. Ю., 2016. - 284 с.
5. Колгатіна Л. С. Специфіка самостійної роботи студентів з дисциплін природничо-математичного циклу в умовах змішаного навчання. / Л. С. Колгатіна, Н. С. Пономарева // Новітні комп'ютерні технології. Спецвипуск «Хмарні технології навчання». – 2019. – Т. XVII. – С. 140 – 151.

ВИКОРИСТАННЯ ВІРТУАЛЬНОЇ ІНТЕРАКТИВНОЇ ДОШКИ НА ЗАНЯТТЯХ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Дослідженню використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні дисциплін природничо-математичного циклу присвячено роботи багатьох вітчизняних та зарубіжних науковців. Всі вони вказують, що застосування інформаційно-комунікаційних технологій в освіті спрямовується на всебічний гармонійний розвиток особистості, формування творчості та інноваційності, критичного мислення, уміння розв'язувати проблеми, набувати інформаційно-цифрової компетентності в інноваційному освітньому середовищі [1]. У своїх роботах вони акцентують увагу на важливості впровадження у навчальний процес ІКТ, які виступають зовнішнім ресурсом й відіграють позитивну роль в активізації навчально-пізнавальної діяльності усіх суб'єктів навчання, таких, як наочність, емоційність, індивідуалізація навчання [2]. Як один із елементів використання ІКТ в освітньому процесі, я пропоную розглянути використання віртуальної інтерактивної дошки на заняттях з вищої математики.

Інтерактивна дошка є однією з найсучасніших засобів навчання. Вона дозволяє зробити процес навчання яскравим, наочним і динамічним. Використання віртуальної інтерактивної дошки дає можливість:

- інтелектуально розвинути студентів;
- підвищити їх інтерес до предмету за допомогою різноманіття видів і форм організації діяльності;
- підготувати до самостійного засвоєння матеріалу, оволодіння конкретними знаннями, необхідними для застосування у практичній діяльності;
- розширити види спільної роботи студентів, що забезпечує отримання ними комунікативного досвіду.

Переваги використання інтерактивних дошок на заняттях з вищої математики:

- простота освоєння, зручність в застосуванні;
- більш широке і яскраве візуальне представлення досліджуваного матеріалу;
- надання можливості заощадити час і зробити заняття динамічним;
- майданчик для реалізації творчих здібностей викладача при підготовці і під час проведення занять.

На відміну від традиційних аудиторних занять, заняття коли ІКТ може слугувати допоміжним засобом проведення елементу заняття, на мою думку, більш наочне і цікаве. Пропоную розглянути програмне забезпечення Padlet, як варіант віртуальної інтерактивної дошки для планування занять з вищої математики. Padlet має зручний інтерфейс, легкий та інтуїтивно зрозумілий для звичайного користувача. Віртуальна інтерактивна дошка Padlet в процесі планування заняття дозволяє: використовувати вже готові шаблони, які допоможуть легко організувати інформацію у потрібному вигляді; переглядати вже готові дошки, створені іншими користувачами; приєднувати готові розробки з інших додатків; приєднуватися до інших дошок тощо. Простий інтерфейс програми дозволяє додавати дописи (посилання, файли, зображення тощо) на стіну за допомогою кнопки у нижньому правому кутку дошки або подвійним кліком лівої кнопки миші у будь-якому місці дошки. В «Налаштуваннях» можна змінити назву та опис дошки, обрати шпалери, налаштувати параметри дописів, змінити параметри публікації та співпраці. Додаткові параметри дозволяють копіювати дошку, тобто виконати «Ремейк», запрошувати інших учасників до співпраці, поширювати, поділитися розробкою, експортувати та роздруковувати дошку, змінювати її тип розміщення матеріалів, очищувати від дописів та видаляти. Дошка має вебадресу, за якою її можна додавати на блоги, сайти та надсилати електронною поштою. Описані можливості віртуальної інтерактивної дошки Padlet дозволяють скомпонувати всі необхідні для проведення заняття

матеріали в одному місці: лабораторні роботи, матеріали для розв'язування задач, завдання контролю знань, розроблені в інших додатках (наприклад, Learning apps) тощо.

Для того щоб забезпечити ефективність використання інтерактивної дошки в навчальному кабінеті, необхідна наявність ряду умов. По-перше, повинен бути забезпечений доступ до інтерактивної дошки, щоб викладач міг працювати з нею постійно. По-друге, дошка повинна використовуватися не тільки викладачем, але і студентами, тим більше, що інтерактивна дошка надає більше можливостей для участі в колективній роботі, розвитку особистих і соціальних навичок. По-третє, необхідно пам'ятати про те, що викладачу, в умовах нестачі готових електронних навчальних посібників для роботи з інтерактивною дошкою, потрібно чимало часу на підготовку до заняття, щоб створити власний конспект в програмі дошки. Ця діяльність викладача - інноваційна, експериментальна. Крім того, викладачу необхідна навчально-методична та технічна підтримка, щоб звести до мінімуму можливі проблеми, що виникають при освоєнні і використанні нового технічного засобу. Інтерактивна система надає користувачам необмежені можливості при демонстрації презентацій та проведенні уроків, тренінгів, навчальних семінарів. Використання інтерактивної дошки дає викладачу безліч переваг, що дозволяють зробити заняття ефективніше і цікавіше для студентів. Результатом такої роботи стане: для викладача - пошук нових підходів до навчання, стимулювання професійного зростання, для студентів - розвиток творчої активності, впевненості в собі, і, як наслідок, підвищення мотивації до навчання.

Отже, використовуючи інструменти веб-ресурсу Padlet можна оформити дошку й наповнити її даними, організувати спільний доступ користувачів до неї, експортувати дошку в різні формати, розмістити її в соціальних мережах або у власному блозі, що сприятиме кращому сприйманню навчального матеріалу, підвищенню інтересу до предмета, формуванню вмінь як самостійної, так і спільної роботи тощо.

Віртуальні інтерактивні дошки загалом, можна використовувати: як майданчик для організації групової роботи під час проведення «мозкового штурму», узагальнення й систематизації знань, рефлексії; для розміщення навчальної інформації або завдань для її пошуку; для організації спільного виконання домашнього завдання; як місце розміщення ідей для проектів та їх обговорення; як інструмент для організації кооперативної спільної діяльності суб'єктів навчання на занятті або в позанавчальний час [3].

Анотація. Використання віртуальної інтерактивної дошки Padlet при плануванні занять з вищої математики. У статті розглянуто програмне забезпечення Padlet, як сучасний засіб створення структури заняття.

Ключові слова: віртуальна інтерактивна дошка, інформаційно-комунікаційні технології, вища математика.

Література

1. Морквян І. В., Хміль Н. А. Методика використання віртуальної інтерактивної дошки Padlet в освітньому процесі / Інформаційні технології в школі. Інтернет-додаток до журналів Видавничої групи «Основа». [Електронний ресурс]. URL: http://osnova.com.ua/items/item-november2016/index_3.html.

2. Суховірська Л. П. Навчальний програмний засіб з фізики як зовнішній ресурс активізації потенціальних можливостей особистості учня під час розв'язування задач. Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Серія : Педагогічна. 2015. - Вип. 21. - С. 285-288.

3. Хмаро орієнтовані освітні середовища у навчанні фізики та інформатики: монографія / М. І. Садовий та ін.- Кропивницький, 2019. - 372 с.

УДК 517.93

Занфіров Р. Р. (студ.)

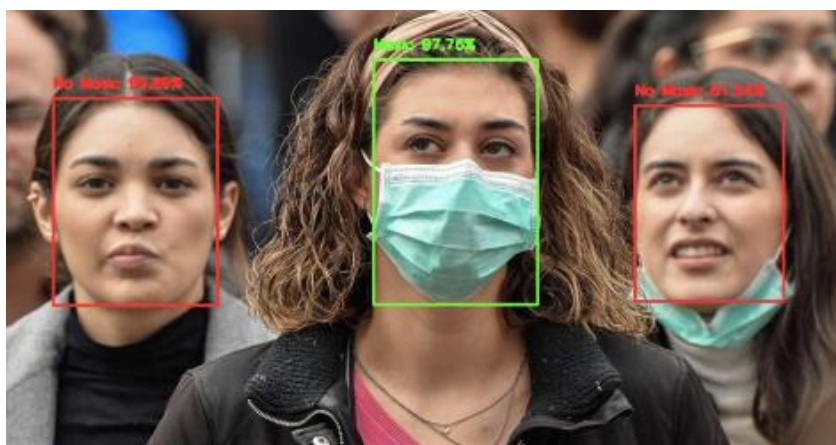
Науковий керівник – доц. Гриб'юк О. О.

Міжнародний науково-технічний університет (Київ, Україна)

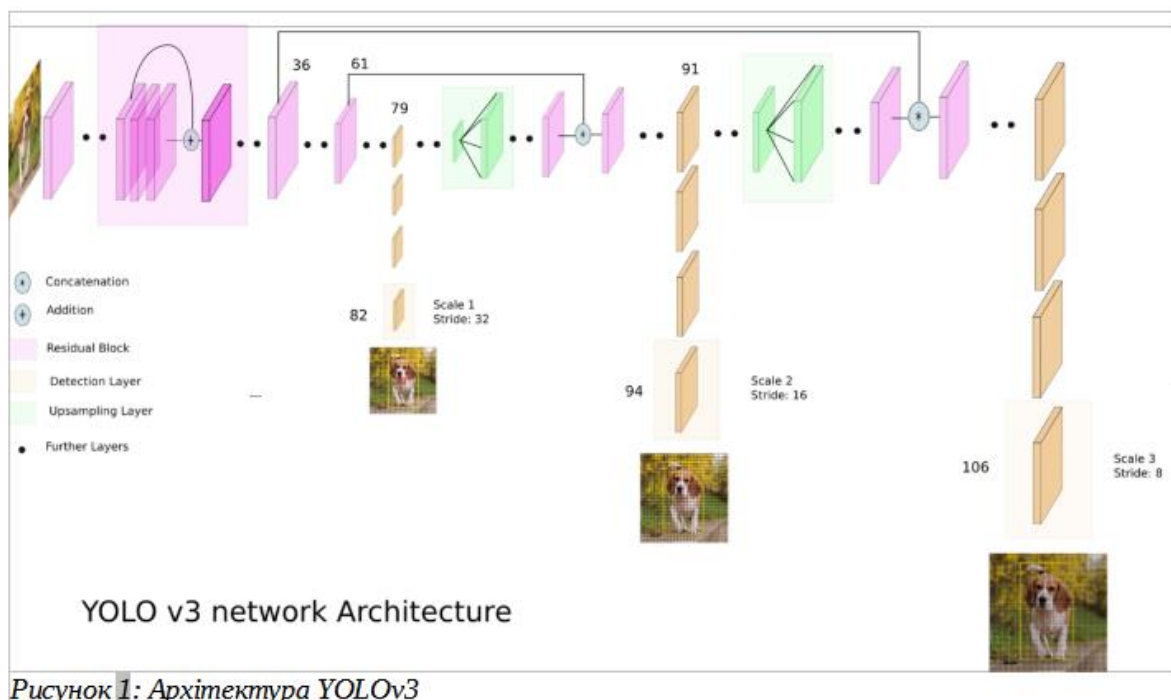
ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМИ РОЗПІЗНАВАННЯ ЛИЦЬОВИХ МАСОК НА ОБЛИЧЧІ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

У період пандемії набирає популярності проведення контролю режиму використання лицьових масок на підприємствах, громадських місцях та державних установах. Людина не завжди може встигати контролювати кожного відвідувача або працівника в наявності медичної маски на її обличчі, особливо коли у людей багато і всі вони не бажають чекати поки їх "перевірять". У громадських місцях ця проблема може спричинити

невдоволення покупців/відвідувачів, які не бажають стояти в чергах, щоб їх допустили до приміщення [1].



За останні 10 років набирають популярності неймережі в контексті вирішення, ґрунтовної автоматизації практично будь-якого поставленого людиною завдання [8]. Неймережі активно використовують на підприємствах, у сферах логістики та інших галузях. Для вирішення цієї проблеми найкраще підходить створення нейронної мережі, яка здатна буде в автоматичному режимі визначати наявність у людини медичної маски на обличчі чи ні. І залежно від результату – пускати його до приміщення чи ні [9]. Неймережа має виявляти медичні маски на обличчі з точністю не менше 98%. Після успішного виявлення маски допускається вхід до приміщення в автоматичному режимі [10]. У разі негативного результату доступ до приміщення закрито. Мережа може застосовуватись при контролі доступу до приміщення. В контексті поставленого завдання було використано алгоритм виявлення об'єктів YOLOv3 (див. Рис. 1), який базувався на згортковій нейронній мережі – Darknet [2].



```

net = cv2.dnn.readNet("yolov3_training_last.weights", "yolov3_testing.cfg")
classes = ["mask"]

images_path = glob.glob(r"*.jpg")
layer_names = net.getLayerNames()
output_layers = net.getUnconnectedOutLayersNames()
colors = (110, 70, 253)
blob = cv2.dnn.blobFromImage(img, 0.00392, (416, 416), (0, 0, 0), True, crop=False)
net.setInput(blob)
outs = net.forward(output_layers)
...

for out in outs:
    for detection in out:
        scores = detection[5:]
        class_id = np.argmax(scores)
        confidence = scores[class_id]
        if confidence > 0.2:
            # Об'єкт обнаружен
            print(class_id)
            center_x = int(detection[0] * width)
            center_y = int(detection[1] * height)
            w = int(detection[2] * width)
            h = int(detection[3] * height)

            # Координаты для прямоугольника
            x = int(center_x - w / 2)
            y = int(center_y - h / 2)

            boxes.append([x, y, w, h])
            confidences.append(float(confidence))
            class_ids.append(class_id)

```

```

for out in outs:
    for detection in out:
        scores = detection[5:]
        class_id = np.argmax(scores)
        confidence = scores[class_id]
        if confidence > 0.2:
            # Об'єкт обнаружен
            print(class_id)
            center_x = int(detection[0] * width)
            center_y = int(detection[1] * height)
            w = int(detection[2] * width)
            h = int(detection[3] * height)

            # Координати для прямокутника
            x = int(center_x - w / 2)
            y = int(center_y - h / 2)

            boxes.append([x, y, w, h])
            confidences.append(float(confidence))
            class_ids.append(class_id)

```

Код для розпізнавання та візуалізації був написаний на Python. Було завантажено натреновану модель в форматі .weights та її файл конфігурації. Циклічно перевірено всі зображення на приналежність до класу, які були записані в змінну classess. Для візуалізації та перевірки працездатності було взято декілька зображень. При показнику впевненості мережі 0.2 результат був обведений спеціальним маркером на виведений на екран. В контексті альтернативних рішень до нашого проекту використовувалися реалізовані проекти (див. Рис. 2, 3).



Рисунок 2: Комерційний проект з детекцією маски

Обидва рішення мають декілька переваг, а саме більш висока точність результату і можливість відслідковувати маски різних кольорів. Перевага

нашого проекту в тому, що він Open Source та має досить велику продуктивність і швидкість детекції об'єктів [3], [4].

У процесі тестування алгоритм показував до 50 кадрів в секунду в HD якості. Апробована модель оперативно інтегрується з мобільним за стосунком.

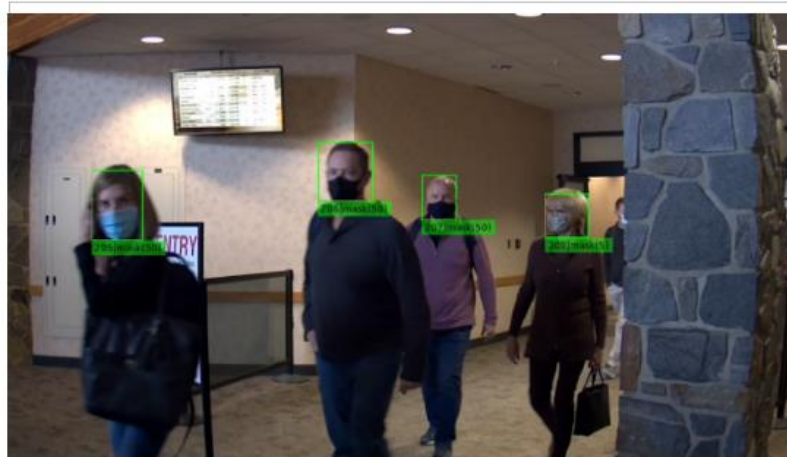


Рисунок 3: Open Source проект з детекцією маски

У процесі дослідження було розроблено модель нейронної мережі, з використанням якої вдалося ефективно вирішити поставлені дослідницькі завдання [5].

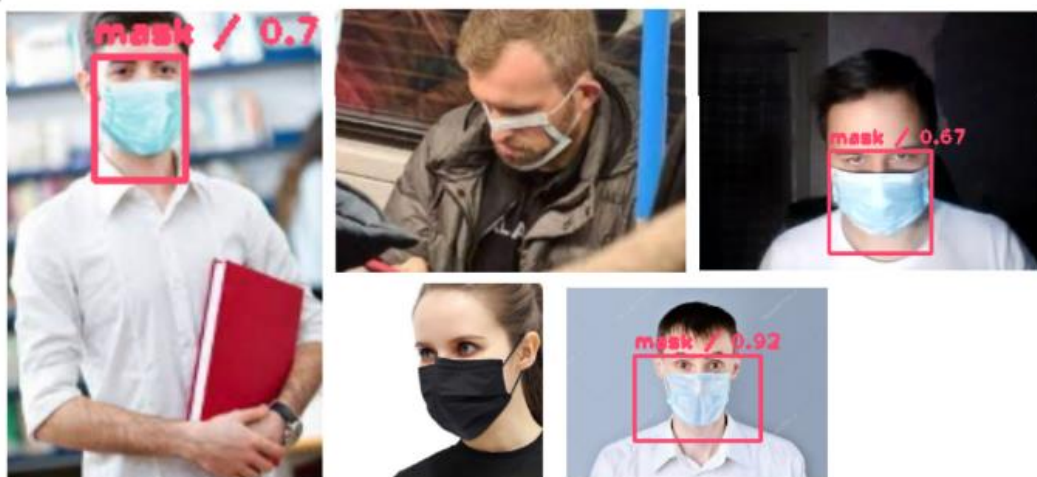


Рисунок 4: Результати роботи мережі

Модель можна модифікувати, виправити деякі недоліки, які отримали в результаті навчання нейронної мережі, а саме додати можливість детекції маски різних кольорів та в різних ракурсах. Для цього потрібно підібрати більш різноманітніший датасет та дотренувати мережу [6].

Усеможливі зв'язки комп'ютерного моделювання з іншими методами пізнання продемонстровано в експериментальному дослідженні [2], [5]. Висновки враховуються з метою покращення методики експериментального вивчення об'єкта дослідження, розвитку математичної моделі та удосконалення комп'ютерної моделі. Дослідження соціальних і економічних процесів вирізняються неможливістю повністю використання експериментальних методів [5]. Результати дослідження свідчать про можливе та доцільне використання таких програм у поєднанні з традиційними методами проектування і програмування, причому отримуємо можливість ефективно використовувати час без перевантаження.

***Анотація.** Розглядаються технологічні аспекти та перспективи використання комп'ютерного моделювання, в тому числі з виваженням та вмотивованим використанням нейронних мереж.*

***Ключові слова:** комп'ютерне моделювання, система розпізнавання, варіативна модель, комп'ютерно орієнтована методична система, нейронні мережі.*

Література

- 1.Bhadeshia H. K. D. H. Neural Networks in Materials Science. ISIJ International, 1999.: 39(10): 966–979.
- 2.Hrybiuk O. Improvement of the Educational Process by the Creation of Centers for Intellectual Development and Scientific and Technical Creativity. In: Hamrol A., Kujawińska A., Barraza M. (eds) *Advances in Manufacturing II. MANUFACTURING 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2019.: 370-382. Springer, Cham Online.
- 3.Hrybiuk O. Mathematical modeling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry // *Proceedings of the First International conference on Eurasian scientific development*. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH. Vienna. 2014. P. 46-53.
- 4.Hrybiuk O. Engineering in Educational Institutions: Standards for Arduino Robots as an Opportunity to Occupy an Important Niche in Educational Robotics in the Context of Manufacturing 4.0: ICT in Education, Research, and Industrial Applications. *Proc. 16 th Int. Conf. ICTERI 2020. Volume II: Workshops*. Kharkiv, Ukraine, October 6-10, 2020, CEUR-WS.org, online. Sokolov, O., Zholtkevych, G.(Eds.). Pp.770-785. Vol-2732.
- 5.Гриб'юк О. О. Дослідницьке навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з використанням комп'ютерно орієнтованих методичних систем / О. О. Гриб'юк. Монографія. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019.
- 6.Hrybiuk O. System of dynamic mathematics of GeoGebra as a means of supporting general and special abilities of students in the process of research learning: practical work experience. *Physical and Mathematical Education*. 2020. Issue 2(24). P. 37-51.
- 7.Hrybiuk O. Problems of expert evaluation in terms of the use of variative models of a computer-oriented learning environment of mathematical and natural science disciplines in schools, [w:] *Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Seria: Organizacja i Zarządzanie, Zeszyt Nr 79*, Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej (WPP), 2019.: 101-119.
- 8.Xabier Basogain Olabe. *Redes Neuronales Artificiales y sus Aplicaciones* Formato

Impreso: Publicaciones de la Escuela de Ingenieros, 1998.

9. Минский М., Пейперт С. Перцептроны. М.: Мир, 1971.

10. Терехов В. А., Ефимов Д. В., Тюкин И. Ю. Нейросетевые системы управления: Учеб. Пособие для вузов – М.: Высш. школа, 2002.

Ксенофонов Є. Р. (студ., 2 курс)

Науковий керівник – доц. Плашний О. Д.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університеті
(Харків, Україна)*

МОДЕЛЬ КОНФЛІКТУ У РЕФЛЕКСИВНІЙ ГРІ

Конфліктні ситуації різної природи можуть бути охарактеризовані з більш загальної точки зору та стати об'єктом математичного дослідження

У класичній теорії ігор розглядається антагоністична гра, або гра з нульовою сумою, яка задається платіжною матрицею, кожному рядку якої відповідає стратегія першого гравця, а кожній колонці - стратегія другого гравця. У клітці матриці, що знаходиться на перетині i -го рядка і j -го стовпця, записуються два числа x_{ij} і y_{ij} , відповідні «виграшу» першого гравця і «виграшу» другого гравця:

	β_1	β_2	$\dots$	β_j	$\dots$	β_m
α_1						
α_2						
$\vdots$						
α_i				x_{ij} y_{ij}		
$\vdots$						
α_n						

Слово «виграш» ми уклали в лапки, так як можливий випадок, коли гравець не отримує, а платить, - тоді його «виграш» негативний. Найбільш вивченими є гри, коли виграш одного гравця в точності дорівнює програшу іншого. Такі ігри називають іграми з нульовою сумою.

В іграх з нульовою сумою в платіжній матриці зазвичай пишуть одне значення. За домовленістю виграші гравця 1 читаються з тим знаком, з яким вони входять в матрицю, а виграші гравця 2 - з протилежним знаком

Якщо в ігровій матриці існує значення виграшу x_{ij} , що є максимальним серед мінімальних по всіх рядках i , та одночасно мінімальним серед максимальних за всіма стовпцями j , то стратегії i та j є найкращими для кожного гравця з точки зору досягнення ними гарантованого результату і подібна матриця має сідлову точку. Це означає, що в розпорядженні гравця 1 немає нічого кращого, ніж α_i , а гравець 2 надійде самим розсудливим чином, якщо вибере β_j . Обрані таким чином стратегії гравців називаються мінімаксними.

	β_1	β_2
α_1	3	1
α_2	2	4

У матриці сідлової точки немає; для гравця 1 найкращою стратегією, точніше найкращою з найгірших, є α_2 , для гравця 2 - β_1 . Гравець 1 переконаний в тому, що гравець 2 обере відповідно до принципу мінімакса стратегію β_1 , так як β_1 - краща відповідь на α_2 . Але в цьому випадку гравцеві 1 краще вибирати β_1 , ніж α_2 .

Якщо ж гравець 2 зуміє повторити це міркування, то він, очевидно, вибере β_2 , а не β_1 . Тоді гравцеві 1 слід вибрати α_2 і обидва гравця будуть рухатися по колу.

Вихід з цієї ситуації полягає в тому, що гравцям доцільно вибирати стратегії випадковим чином. Отримані в результаті стратегії називаються змішаними, вони визначають найкращий результат гри для кожного гравця. В іграх з ненульовою сумою в кожену клітину матриці ми повинні помістити не одне, а два значення платежів: x_{ij} і y_{ij} . якщо гравець 1 вибрав стратегію α_i , а гравець 2 - β_j , то перший отримує виграш x_{ij} , а другий - y_{ij} . Природно інтерпретувати негативні значення виграшів як програші.

Особливий інтерес представляють експериментальні психологічні дослідження конфлікту в автономних групах (виробничі колективи, екіпажі, спортивні команди і т. п.). Внутрішньо-групові зв'язки (операційні, інформаційні, емоційні) перетворюють групу в інтегрований організм.

Розглядаючи таке складне явище, як конфлікт, математик, логік, психолог, дослідник операцій і полководець будуть дивитися на об'єктивну картину конфлікту своїми очима. Вони, природно, будуть виділяти в ньому ті сторони, які їх цікавлять і які піддаються «вилученню» за допомогою тих специфічних методів дослідження, якими вона володіє. При цьому кожен фахівець користується тією сукупністю уявлень про об'єкт (в нашому випадку - про конфлікт), які склалися в тій чи іншій галузі знання. Важливість правильного вибору вихідного уявлення об'єкта, як системи, як цілого, навіть усередині однієї галузі, обумовлюється тим, що це дозволяє застосовувати найбільш ефективний науковий і математичний апарат. Щоб дослідити конфлікт за допомогою апарату теорії ігор, необхідно його схематизувати: виділити гравців і набори стратегій, якими користуються гравці, визначити платежі гравців, віднісши їх до певних стратегій. Підсумком такої схематизації і є платіжна матриця.

Говорячи про матеріальну основу конфлікту і різних моделях конфліктних ситуацій, не можна не сказати про шахи, хоча б тому, що немає нічого легшого, як уявити собі конфлікт на шахівниці. Дослідники прямо зіставляють оперативне мислення людей в ігрових ситуаціях, характерних для функціонування великих автоматизованих систем управління, з мисленням шахіста. У шахах протистоять один одному не білі і чорні фігури, а шахіст А, який грає білими, і шахіст Б, який грає чорними. Роблячи хід «а», гравець змушує противника відповісти ходом «б» (бо всі інші ходи в комбінації або форсованому варіанті відразу програють), але хід «б» дає можливість зробити хід «в», на який противник вимушений відповісти ходом «г» і т. д. до останнього ходу. Противник, розгадавши комбінацію, бачить, що кожен крок наближає його до програшу, але цього кроку він не може не зробити. Шахіст,

що ставить пастку партнеру або просто розраховує варіант, відображає на своєму «уявному планшеті» не тільки особливості даної позиції, але і те, як ці особливості відображаються противником на його (противника) планшеті. Тобто конфліктуючі сторони вступають в своєрідну рефлексивну гру, де кожна зі сторін прагне отримати можливість перехитрити один одного. Таке зображення конфлікту, як інтелектуальної взаємодії сторін, є важливим системним поданням конфлікту, який відкриває нові резерви в оптимізації рішень, що приймаються в конфліктній ситуації.

***Анотація.** У роботі розглядається моделювання конфлікту при і дослідженні конфліктної ситуації. на основі імітації міркувань учасників конфлікту, які є гравцями у рефлексивній грі.*

***Ключові слова:** імітація міркувань, рефлексивна гра, побудова стратегії, платіжна матриця.*

Література

1. Шейнов, Виктор. Управление конфликтами / Виктор Шейнов. - М.: Питер, 2014. - 576 с.
2. Льюис Р.Д., Райфа Х. Игры и решения, 1961. – 68 с.
3. Костевич Л. С. Исследование операций Теория игр: Учебное пособие «Минск: Вышэйшая школа», 2008. – 368 с.
4. Лефевр, В. А. Алгебра конфликта / В. А. Лефевр, Г. Л. Смолян. - М.: КомКнига, 2009. - 831 с.
5. Анцупов, А. Я. Конфликтология. Учебник / А. Я. Анцупов, А. И. Шипилов. - М.: Питер, 2015. – 528 с.
6. Смолян Г. Л. Исследование операций – инструмент эффективного управления. М., «Знание», 1967. – 64 с.

Літвінєнко А. В. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – доц. Бобрицька Г. С.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

РОЗРАХУВАННЯ ВІДСОТКОВОЇ СТАВКИ

У даній статті розглянуто нарахування відсотків у певних видах аналізу. Проаналізовано формули за якими нараховуються ці відсотки, наприклад з кредиту, ставки, тощо. Також досліджено види процентів та якими способами вони нараховуються.

Відсоткова ставка або ж норма процента — кількісне вираження відсотків як економічної категорії. Розраховується як взаємовідношення річного доходу, отриманого на позичковий капітал, до суми наданого кредиту, помноженого на 100 відсотків.

Розмір процента регулюється переважно відношенням попиту і пропозиції позичкового капіталу. Норма процента лежить у визначеній залежності від норми прибутку: за звичайних умов середня норма прибутку є максимальною межею для норми процента.

Однак на рівень процентної ставки впливають також багато різноманітних факторів.

Процентна ставка — сума, зазначена в процентному вираженні до суми кредиту, яку платить одержувач кредиту за користування ним в розрахунку на певний період (місяць, квартал, рік).

З позиції теорії грошей, процентна ставка — це ціна грошей як засобу заощадження.

У практиці інвестиційного аналізу «темپ приросту» грошових засобів прийнято називати відсотком, ставкою відсотка або нормою прибутку. Процес, в якому при заданих величинах первинної суми і темпу її зростання необхідно знайти майбутню вартість інвестиційних засобів, називається процесом зростання. Економічний сенс операції зростання — поетапне збільшення первинної суми шляхом приєднання до неї процентних платежів. При проведенні фінансово-економічних розрахунків, пов'язаних з інвестуванням коштів, процеси зростання вартості можуть здійснюватися як за простими, так і за складними процентами.

Процент — сума доходу від даного капіталу або плата за користування позичковим капіталом у всіх його формах.

Простий процент — сума доходу, яка нараховується за основною сумою капіталу в кожному інтервалі часу і згодом виплачується.

Складний процент – сума доходу, яка нараховується за основною сумою капіталу за визначений період часу, яка не виплачується, а додається до основної суми капіталу.

При розрахунку суми простого відсотка в процесі нарощування вартості використовується наступна формула:

$$I = P \times n \times i \quad (1)$$

де I - сума відсотка за обумовлений період часу в цілому;

P - первісна сума (вартість) коштів;

n - кількість інтервалів, по яких здійснюється розрахунок відсоткових платежів у загально обумовленому періоді часу;

i - ставка відсотка, що застосовується при розрахунках, виражена десятковим дробом.

У цьому випадку майбутня вартість коштів (S) з урахуванням нарахованої суми відсотків визначається за формулою:

$$P = S \times \frac{1}{1+ni} \quad (2)$$

Множник $(1 + ni)$ називається коефіцієнтом нарощування суми простих відсотків. Його значення завжди більше одиниці.

А для того щоб розрахувати майбутню вартість коштів у процесі їх нарощування за складними відсотками використовується формула:

$$S = P \times (1 + i)^n \quad (3)$$

Оскільки процес інвестування, як правило, має велику подовженість у часі, в практиці аналізу ефективності капітальних вкладень, зазвичай, приходить мати справу не з одиничними грошовими сумами, а з потоками грошових засобів.

Використання нарощеної і дисконтованої сум грошових засобів в цьому випадку виконується шляхом використання формул, які ми розглянули раніше для кожного елемента грошового потоку.

Актуалізується питання щодо накопичення відсотків під час оформлення кредиту щодо подальшого його погашення.

Існують різні способи нарахування відсотків від надання грошей у борг у будь-якій формі. Відповідно застосовують різні види процентних ставок.

Відсотки розрізняють за базою їхнього нарахування. Застосовується постійна і послідовно змінювана база для розрахунку. В останньому випадку за базу приймається сума, отримана на попередньому етапі нарощення або дисконтування.

При постійній базі використовують прості відсотки, при змінній — складні процентні ставки.

Простий відсоток розраховується за формулою (1), де I — відсотки за весь термін позики; P — початкова сума боргу; i — ставка нарощення (десятковий дріб); n — термін позики (в роках).

Загальну суму виплат (наприкінці терміну) з урахуванням усіх відсотків можна розрахувати за формулою:

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni) \quad (4)$$

$$n = \frac{t}{K} \quad (5)$$

де t — кількість днів позики;

K — кількість днів у році.

Якщо відсотки не виплачуються відразу ж після їхнього нарахування, а приєднуються до основної суми, для розрахунку зростання застосовуються формули складних відсотків. База для їх нарахування збільшується з кожним періодом виплат.

Формула (3) використовується для розрахунку зростаючої суми наприкінці повного року за умови, що відсотки нараховуються один раз на рік, де P — початковий розмір боргу; i — ставка нарощення за складними відсотками; n — кількість років нарощення.

Відсотки за цей же період (n років) визначаються за формулою:

$$I = S - P = P(1 + i)^n - P = P((1 + i)^n - 1) \quad (6)$$

Величина $(1 + i)^n$ називається множителем зростання за складними відсотками, а формула є основною формулою складних відсотків. Відсотки за кожний наступний рік збільшуються.

Отже, безперервне нарахування відсотків залежить від багатьох економічних, математичних, фінансових факторів. Ці проценти можуть нараховуватися в різних випадках (кредит, капітал, ставка). Особливо зараз, коли люди постійно накопичують, інвестують свої кошти чи беруть кредит нараховується відсоток який потрібно виплатити чи який виплатять їм.

Література

- 1.https://studopedia.su/4_33235_naroshchuvannya-i-diskontuvannya-groshovih-potokiv.html
- 2.Круш П. В., Клименко О. В. Економіка (розрахунки фінансово-інвестиційних операцій в Excel): Навч. посіб. К.: Центр навчальної літератури, 2006. — 264 с.
- 3.Рогач І. Ф., Сендзюк М. А., Антонюк В. А. Інформаційні системи у фінансово-кредитних установах: Навч. посіб. для ВНЗ. — К.: КНЕУ, 2001. — 239 с.
- 4.Мозговий О. М. Фондовий ринок: Навч. посібник. _ - К.: 1999. - С. 6-15.
- 5.Шелудько В. М. Фінансовий ринок: Навч. посібник . – К.: Знання-Прес, 2006. - 167 с..

УДК 331.108.26

Матушкін Д. П. (студ., 1 курс),

Цимбал Д. В. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – доц. Гадецька С. В.

Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЯК ПРОБЛЕМА ЛОГІСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Організація і планування виробництва часто потребують вирішення проблем оптимізаційного характеру, коли із багатьох варіантів обирають з певної точки зору найкращий. В таких задачах намагаються отримати максимум або мінімум заздалегідь встановленого показника, який в деякому сенсі характеризує виробничу діяльність [1-3]. Оскільки оптимізаційні задачі виникають в основному через обмеженість наявних ресурсів, оптимальний план обирають серед тих можливих, які не порушують встановлені обмеження. Все це потребує знань і вмінь в області математичного програмування, що є основою оптимального планування. Одна з класичних оптимізаційних задач – транспортна задача – є однією з важливих задач логістичної оптимізації.

Транспортна задача (ТЗ) – це задача лінійного програмування, яка виникла як задача визначення оптимальних планів (схем) перевезень [1]. На сьогодні – це одна з найбільш важливих і розроблених задач лінійного програмування. Для її розв’язування можна застосувати симплекс-метод, але завдяки деяким особливостям ТЗ вдалося створити спеціальні методи, які виявилися більш ефективними у порівнянні з симплексним.

Сформулюємо в загальному вигляді задачу, яку називають транспортною задачею за критерієм вартості перевезень.

В пунктах $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m$ зберігається однорідний вантаж. Пункти $A_i (i = \overline{1, m})$ назвемо пунктами зберігання. Запаси вантажу, обмежені в кожному пункті, складають $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m$ умовних одиниць відповідно. Цей вантаж споживається в пунктах $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_n$. Пункти $B_j (j = \overline{1, n})$ назвемо пунктами споживання. Потреби вантажу в кожному пункті споживання складають $b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_n$ умовних одиниць відповідно. З будь-якого пункту зберігання і будь-який пункт споживання можливе транспортування вантажу. Тарифи перевезень задаються тарифною матрицею $c=(c_{ij})$, де c_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу з i -го пункту зберігання в j -й пункт споживання. Потрібно скласти такий план перевезень, за якого виконуються наступні умови:

- а) увесь вантаж з пунктів зберігання A_i буде вивезено;
- б) попит споживачів буде повністю задоволений;
- в) сумарні транспортні витрати при цьому будуть мінімальними.

1. Введемо змінні

$$x_{ij} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (1)$$

які означають кількість вантажу, який буде перевезено з i -го пункту зберігання в j -й пункт споживання. За умовою задачі $x_{ij} \geq 0$.

2. Загальну вартість перевезень, яку треба мінімізувати, виразимо функцією $m \times n$ змінних:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} . \quad (2)$$

3. Система обмежень даної задачі складається з рівнянь двох видів:

а) горизонтальні рівняння (обмеження на запаси вантажу в пунктах зберігання):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (3)$$

б) вертикальні рівняння (обмеження на потреби вантажу в пунктах споживання):

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (4)$$

Таким чином, математична модель сформульованої задачі має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (5)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}), \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}), \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (6)$$

Функція (5) називається цільовою функцією транспортної задачі, або вартістю перевезень. Умови (6) називаються обмеженнями транспортної задачі. Будь-який набір змінних, що визначається матрицею (1) і задовольняє системі обмежень (6), називається планом транспортної задачі, або планом перевезень. Значення змінних $x_{ij} \geq 0$ називаються перевезеннями.

План, що надає цільовій функції (5) мінімального значення, називається оптимальним планом (оптимальним планом перевезень), або розв'язком транспортної задачі.

Як і будь-яка задача лінійного програмування, транспортна задача не обов'язково має один розв'язок. В деяких задачах існує нескінченна кількість розв'язків, а деякі задачі взагалі їх не мають.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість запасів вантажу в пунктах зберігання дорівнює загальній кількості потреб в пунктах споживання, то таку транспортну задачу називають збалансованою. З теорії відомо [1], що збалансованість ТЗ є необхідною і достатньою умовою, щоб ця задача мала розв'язок.

Визначення оптимального плану транспортної задачі, як і при розв'язуванні будь-якої задачі лінійного програмування, починається зі знаходження її початкового опорного плану, що можливо виконати кількома методами, серед яких, зокрема, метод північно-західного кута та метод мінімального елемента.

При знаходженні деякого опорного плану транспортної задачі завжди постає питання: чи є цей план оптимальним? Якщо це так, то задачу розв'язано, якщо ні, то його треба покращувати до знаходження оптимального плану. Одним із ефективних способів визначення оптимального плану транспортної задачі є метод потенціалів. Вперше цей метод було розроблено в 1949 році вченими Л.В. Канторовичем та М.К. Гавуріним. Пізніше на основі загальних положень лінійного програмування аналогічний метод було запропоновано вченим Дж. Данцігом.

Ідея методу потенціалів полягає у наступному. Оскільки транспортна задача є задачею лінійного програмування, то метод потенціалів можна трактувати як ітеративний процес, на кожному кроці якого розглядається опорний план, перевіряється його оптимальність, і, якщо це необхідно, визначається перехід до “кращого” опорного плану.

***Анотація.** У роботі розглядається математична модель оптимізації транспортних перевезень за наявності встановлених обмежувальних умов. Дослідження ґрунтується на класичних засадах теорії математичного програмування і передбачає вирішення задачі логістичної оптимізації транспортних перевезень на підставі логіки аналітичного алгоритму розв'язання транспортної задачі (ТЗ).*

Ключові слова: математична модель, оптимізація, математичне програмування, транспортна задача, метод потенціалів.

Література

1. Іваницька О. В. Транспортна задача лінійного програмування / О. В. Іваницька, Н. В. Рощина, Р. С. Сербул // Агросвіт. - 2015. - № 14. - С. 35-40.
2. Математичні методи дослідження операцій: підручник / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. В. Шендрик та ін. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212 с.
3. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel: навчальний посібник / А. І. Кузьмичов. — Київ: Ліра-К, 2015. — 215 с.

УДК 004.942:[373.2.016

Мяленко Я. В. (студ.)

Науковий керівник – доц. Гриб'юк О. О.

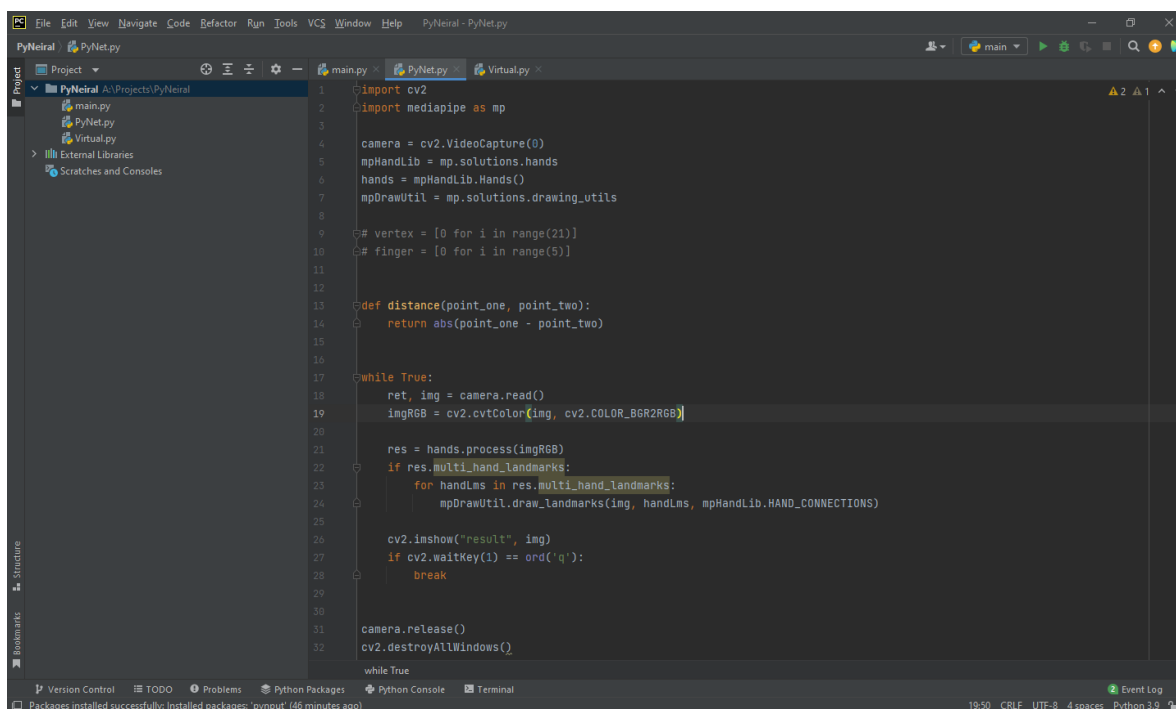
Міжнародний науково-технічний університет (Київ, Україна)

ПРОЕКТУВАННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ ЗДІЙСНЕННЯ ТРЕКІНГУ РУК З ВИКОРИСТАННЯМ ІМЕРСИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Дотепер спостерігається стрімкий розвиток імерсивних технологій не тільки в ігровому світі, але й в освітньому процесі. Віртуальна реальність вже давно перестала бути ігровою історією та активно впроваджується у всі сфери діяльності людини. При цьому використовувати віртуальну реальність у навчанні можна у будь-якому віці (як для дітей, так і для людей, які вирішили опанувати нову професію або вдосконалити наявні навички). У контексті існуючих проблем прослідковується невідповідність між цінностями щодо здоров'я людей та одночасним впливом імерсивних технологій на здоров'я. Обов'язковою умовою щодо ефективного використання у процесі навчання комп'ютерних ігор є емпіричний підхід – експериментальна перевірка позитивних і негативних впливів імерсивних технологій на розвиток людей [1].

Мета експериментального дослідження полягає в досягненні ґрунтовного розуміння присутності людини та психофізіологічного впливу імерсивних технологій у віртуальному середовищі в процесі дослідницького навчання. Для досягнення завдань дослідження використовуються експериментальні майданчики «Clever: School of Natural and Mathematical

Sciences» [2]. Особлива увага приділяється виявленню ризиків, труднощів і небезпек у віртуальному середовищі з метою виокремлення важливих тенденцій для перспективного подальшого інтелектуального розвитку людей з методично вмотивованим використанням компонентів комп'ютерно орієнтованої методичної системи дослідницького навчання (КОМСДН) [3].



```
1 import cv2
2 import mediapipe as mp
3
4 camera = cv2.VideoCapture(0)
5 mpHandLib = mp.solutions.hands
6 hands = mpHandLib.Hands()
7 mpDrawUtil = mp.solutions.drawing_utils
8
9 # vertex = [0 for i in range(21)]
10 # finger = [0 for i in range(5)]
11
12
13 def distance(point_one, point_two):
14     return abs(point_one - point_two)
15
16
17 while True:
18     ret, img = camera.read()
19     imgRGB = cv2.cvtColor(img, cv2.COLOR_BGR2RGB)
20
21     res = hands.process(imgRGB)
22     if res.multi_hand_landmarks:
23         for handLms in res.multi_hand_landmarks:
24             mpDrawUtil.draw_landmarks(img, handLms, mpHandLib.HAND_CONNECTIONS)
25
26     cv2.imshow("result", img)
27     if cv2.waitKey(1) == ord('q'):
28         break
29
30 camera.release()
31 cv2.destroyAllWindows()
32 while True:
```

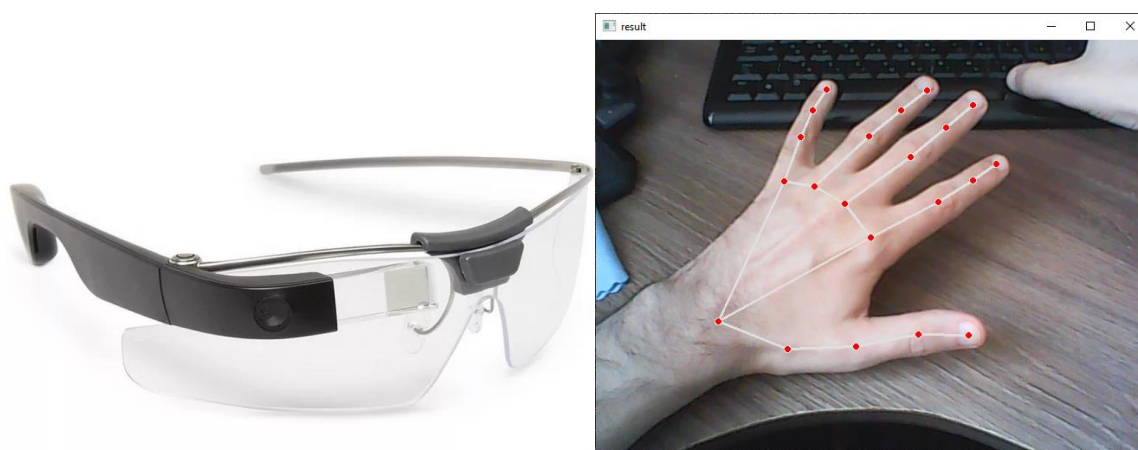
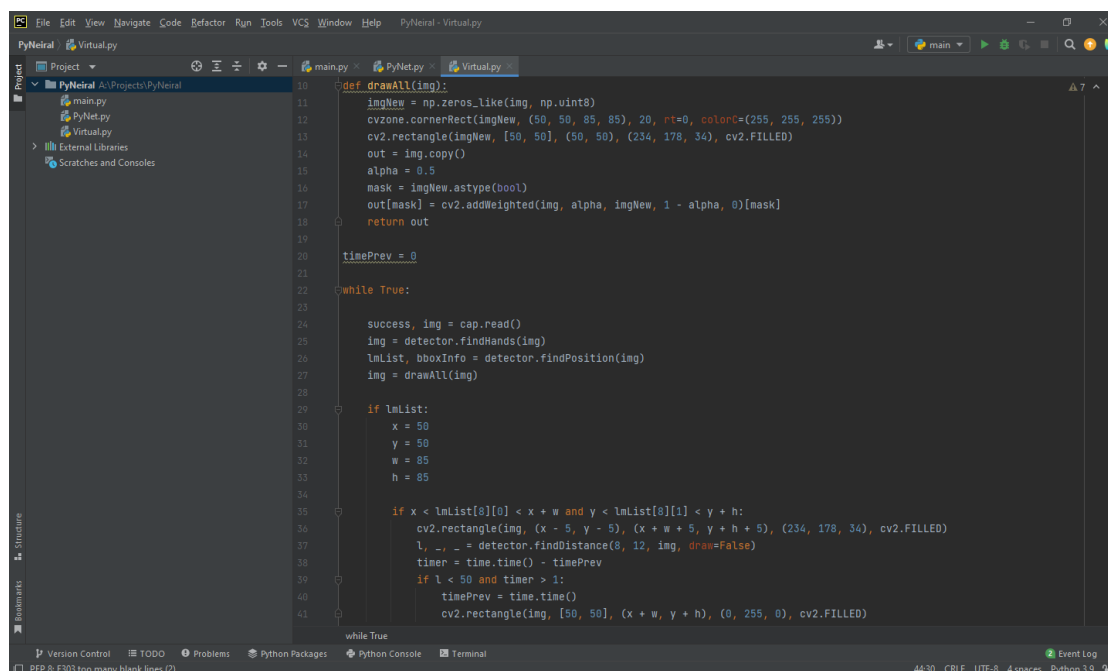


Рис. 1.

Результати експериментального дослідження з педагогічно виваженим використанням КОМСДН [4] і проєктивних методик. На підставі аналізу результатів експериментального дослідження можна зробити висновки про наявність ще однієї форми дезорієнтації дітей – так звані культи (наприклад,

комфорту і гедонізму – прагнення мати «брендовий гаджет», «модний одяг», бездумне слідування одній із численних субкультур і т.д.), демонстративний спротив повсюдному впливу ЗМІ, інформаційно-комунікаційних технологій (в т.ч. імерсивних) в контексті формування «власної точки зору» (рис. 1) [5].

Безперечно, пропоновані установки використовуються з метою деформування особистості дитини, протидіючи при цьому розвитку дружніх, доброзичливих, порядних стосунків між людьми. В сучасних комп'ютерних іграх підсвідомо (неявно) закладаються войовничі сценарії, досконало імітується тіло людини, кров і т.д., причому гравець керує процесом насилля з використанням потужних віртуальних можливостей, обираючи при цьому собі відповідну роль [6].



```
def drawAll(img):
    imgNew = np.zeros_like(img, np.uint8)
    cvzone.cornerRect(imgNew, (50, 50, 85, 85), 20, rt=0, color=(255, 255, 255))
    cv2.rectangle(imgNew, [50, 50], (50, 50), (234, 178, 34), cv2.FILLED)
    out = img.copy()
    alpha = 0.5
    mask = imgNew.astype(bool)
    out[mask] = cv2.addWeighted(img, alpha, imgNew, 1 - alpha, 0)[mask]
    return out

timePrev = 0

while True:
    success, img = cap.read()
    img = detector.findHands(img)
    lmList, bboxInfo = detector.findPosition(img)
    img = drawAll(img)

    if lmList:
        x = 50
        y = 50
        w = 85
        h = 85

        if x < lmList[8][0] < x + w and y < lmList[8][1] < y + h:
            cv2.rectangle(img, (x - 5, y - 5), (x + w + 5, y + h + 5), (234, 178, 34), cv2.FILLED)
            l, _ = detector.findDistance(8, 12, img, draw=False)
            timer = time.time() - timePrev
            if l < 50 and timer > 1:
                timePrev = time.time()
                cv2.rectangle(img, [50, 50], (x + w, y + h), (0, 255, 0), cv2.FILLED)
```

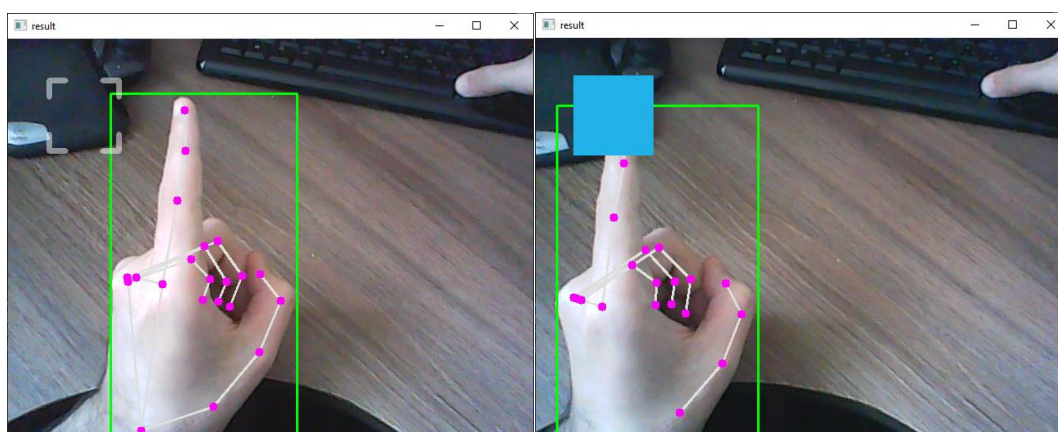


Рис.2. Результат адаптування зорових сенсорів

В процесі дослідження особлива увага зверталася на поведінку сенсорної системи дитини, яка має здатність підлаштовуватися під оточуюче середовище. Зорові сенсори адаптуються і дитина (ілюзорно) бачить те, чого раніше не помічала (рис. 2). Непомітне мерехтіння екрану комп'ютера структурується при цьому в логічний відеоряд, при цьому переформатовується не лише зорове сприйняття, а цілковито особистість дитини. В результаті у дитини формується залежність від комп'ютера. Частина інформаційних повідомлень опрацьовується свідомістю людини, а решта – залишається неопрацьованими у вигляді своєрідного подразника, до якої людина повертається щоразу аж до моменту її опрацювання. погляд дитини (зверху – ліворуч, праворуч – донизу і т.д.) спрямовується в залежності від дії сенсорів. Таким чином спрацьовуються різні сигнальні системи (зорова, слухова і т.д.) [7]. Конкретне розміщення на екрані комп'ютера об'єктів стимулює свідомість дитини, викликаючи активізацію конкретних відділів головного мозку завдяки організації руху очей (знизу на екрані – відчуття і емоції, по горизонталі – звуки, у верхній частині екрану – зорові образи) [8].

Використання в ранньому віці імерсивних технологій, не просто некорисне, але й шкідливе для здоров'я та гармонійного розвитку дитини. Доцільно активізувати роботу щодо створення комп'ютерних ігор такого змісту, щоб сприяли розвитку особистості дитини із врахуванням усіх мір з метою профілактики кібезалежності. Боротьба з комп'ютерною залежністю з використанням імерсивних технологій ефективна лише за умови спрямування ґрунтовних зусиль на причину виникнення залежності, а не наслідки [9]. Особливу увагу необхідно звернути на розроблення окремих компонентів та уточнення методичної системи дослідницького навчання (КОМСДН) з педагогічно виваженим використанням імерсивних технологій у навчально-виховному процесі [10].

***Анотація.** У статті розглянуто проблему проектування нейронних мереж для здійснення трекінгу рук, в тому числі за рахунок впровадження імерсивних технологій. Мета експериментального дослідження полягає в досягненні ґрунтового розуміння феномену присутності людини та*

психофізіологічного впливу імерсивних технологій у віртуальному середовищі в процесі проектування нейронних мереж.

Ключові слова: *нейронні мережі, варіативна модель, дослідницьке навчання, імерсивні технології.*

Література

1.Гриб'юк О. О. Дослідницьке навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з використанням комп'ютерно орієнтованих методичних систем / О. О. Гриб'юк. Монографія. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019.

2.Hrybiuk O. Improvement of the Educational Process by the Creation of Centers for Intellectual Development and Scientific and Technical Creativity. In: Hamrol A., Kujawińska A., Barraza M. (eds) Advances in Manufacturing II. MANUFACTURING 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2019.: 370-382. Springer, Cham Online.

3.Гриб'юк О. О. Психофізіологічні аспекти феномену присутності дитини у віртуальному середовищі у процесі дослідницького навчання: результати емпіричного дослідження. European potential for the development of pedagogical and psychological science: Collective monograph. Riga, Latvia : "Baltija Publishing", 2021.: 147-187.

4.Hrybiuk O. Mathematical modeling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry // Proceedings of the First International conference on Eurasian scientific development. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH. Vienna. 2014. P. 46-53.

5.Гриб'юк О. О. Математичне моделювання при навчанні дисциплін математичного та хіміко-біологічного циклів: навчально-методичний посібник для учителів / О. О. Гриб'юк. Рівне: РДГУ, 2010.

6.Гриб'юк О. Дослідження розвитку інтелекту: Особливості дослідницького навчання учнів з різними рівнями розвитку інтелекту в закладах загальної середньої освіти України та Польщі. Технології розвитку інтелекту: відкритий наукометричний журнал/ О. О. Гриб'юк, Й. Шафран. Том 4, No 3 (28), 2020 ISSN: 2223-0521.

7.Hrybiuk O. Problems of expert evaluation in terms of the use of variative models of a computer-oriented learning environment of mathematical and natural science disciplines in schools, [w:] Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Seria: Organizacja i Zarządzanie, Zeszyt Nr 79, Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej (WPP), 2019.: 101-119. ISSN 0239-9415.

8.Гриб'юк О. О. Методичні особливості організації дослідницького навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з педагогічно виваженим використанням комп'ютерно орієнтованої методичної системи: працюємо в умовах експерименту. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: збірник наукових праць. Вінниця: ТОВ ТОВ «Друк плюс», 2020. Вип. 56: 64-77.

9.Гриб'юк О. О. Рівнева модель дослідницького навчання учнів математики з використанням комп'ютерно орієнтованої методичної системи: дидактичні аспекти та перспективи. The Variativ Model for Research Training for Math Students Using Computer-oriented Methodical System. Vol 77 N3 (2020). Pp. 39-65.

10.Гриб'юк О. О. Імерсивні технології в освіті: особливості когнітивного розвитку дитини у віртуальному середовищі в процесі дослідницького навчання. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: збірник наукових праць. Київ-Вінниця: ТОВ Фірма «Планер», 2020.

Науменко А.В. (студ.)
Науковий керівник – доц. Гриб'юк О. О.
Міжнародний науково-технічний університет (Київ, Україна)

ПРОЕКТУВАННЯ ІНСТРУМЕНТАЛЬНОЇ ПРОГРАМНОЇ СИСТЕМИ В ПРОЦЕСІ СИНТЕЗУ ФОРМАЛЬНОГО ОПИСУ НЕЙРОННИХ МОДЕЛЕЙ

З використанням моделювання КОМСДН суттєво розширилось використання комп'ютера за рахунок неформалізованих раніше галузей знань і сфер діяльності (медицина, біологія, геологія, управління гнучким роботизованим виробництвом і т.д.). З використанням спеціальних формалізмів (логіко-лінгвістичних моделей) декларативних і процедурних знань, представлених в електронній формі, розв'язування задач з використанням комп'ютера здійснюється ефективніше. Галузевим фахівцям надається прямий (безпосередній) доступ до комп'ютера в діалоговому режимі з метою розв'язування професійних задач, які при цьому послуговуються професійною мовою та програмно-апаратними засобами штучного інтелекту [1].

Системи штучного інтелекту поділяються на: Інтелектуальні інформаційно-пошукові (системи «питання-відповідь»), використання яких забезпечує в процесі діалогу взаємодію кінцевих користувачів-непрограмістів з базами знань і даних професійною мовою; Обчислювально-логічні системи, з використанням яких кінцеві користувачі, які не є програмістами і фахівцями в галузі прикладної математики, розв'язують в діалоговому режимі свої задачі на комп'ютері з використанням складних математичних методів і відповідних прикладних програм; Експертні системи, з використанням яких надає можливість здійснювати ефективну комп'ютеризацію галузей, де знання можуть бути представлені в експертній описовій формі, однак використання математичних моделей, що використовуються в точних науках, сумнівне і часто неможливе [2]. Завдяки експертним системам штучний інтелект набуває стратегічного значення в розвитку науки, проектування, управління

виробництвом і т.д. Важливого значення набувають гібридні експертні системи – об'єднання традиційних експертних систем з обчислювально-логічними. Інакше кажучи, в гібридних експертних системах логіко-лінгвістичні моделі використовуються одночасно з математичними [3].

Неможливо стверджувати апіорі, з використанням якої саме моделі, алгоритму і системи програм розв'язується задача або розпізнається ситуація. Наприклад, під час використання експертної системи для встановлення медичного діагнозу неможливо заздалегідь визначити, який саме алгоритм ефективніший. Системи штучного інтелекту орієнтуються на знання, тому подальший прогрес систем штучного інтелекту і інформаційно-комунікаційних технологій пов'язаний з ефективністю вирішення основних проблем: подання знань; комп'ютерної лінгвістики, вирішення якої сприяє забезпеченню прогресу щодо здійснення автоматизованого іншомовного перекладу; комп'ютерної логіки, яка набуває важливого значення для розвитку експертних систем, оскільки її мета – моделювання людського мислення і перетворення програмування з мистецтва в науку [4].

Дослідження в галузі штучного інтелекту проводяться в таких напрямках: моделювання на ЕОМ окремих функцій творчих процесів (наприклад, ігрові задачі, - шахи, шашки .доміно тощо), автоматичне доведення теорем (англ. Automated theorem proving), автоматичний синтез програм, аналіз і синтез музичних творів та ін. [5]. Зовнішня інтелектуалізація ЕОМ [6]: фундаментальні і прикладні дослідження, що відносяться до комплексного діалогового інтерфейсу. Внутрішня інтелектуалізація ЕОМ: обчислювальні машини нової архітектури, побудовані за принципами штучного інтелекту та призначені для побудови ефективних інтелектуальних систем [7]. Цілеспрямована поведінка роботів: створення інтелектуальних роботів, які здатні автономно виконувати операції задля досягнення цілей, поставлених людиною. До роботів відносяться також автономні транспортні засоби, що призначаються для виконання роботи на землі, на воді та в повітрі [8].

Не виходячи за межі своєї предметної галузі, фахівці отримують можливість: Здійснювати пошук в базах даних (базах знань) необхідної документації і фактографічного матеріалу, не залишаючи свого робочого місця; Вирішувати проектні, планові і управлінські завдання на основі постановки та вихідних даних, не залежно від рівня складності математичних моделей цих задач та контролювати в діалоговому режимі всі стадії обчислювального процесу; Здійснювати розпізнавання і діагностику процесів в складних системах, приймати рішення, формулювати плани дій, висувати і перевіряти гіпотези, виявляти закономірності на основі результатів спостережень, формулювати логічні висновки із використанням акумульованих в ЕОМ знань про предметну галузь [9].

Створення інтелектуальних роботів – науково-технічна проблема, для вирішення якої необхідне розроблення спеціалізованих ЕОМ і комплексу механічних та енергетичних систем (сенсорів, рушіїв і т.д.). Інтелектуальні роботи, як і всі системи штучного інтелекту, орієнтовані на знання. Знання про навколишнє середовище надходять на бортові ЕОМ роботів з численних сенсорів (зорових, акустичних, радіолокаційних, тактильних і т.д.) [10]. Для розвантаження бортових ЕОМ роботів від численних потоків інформації (відомостей) її можна попередньо опрацювати в так званих інтелектуальних сенсорах. Прикладами таких інтелектуальних сенсорів можуть слугувати різноманітні системи опрацювання зображень. Оскільки знання, що надходять на бортові ЕОМ роботів, ситуативні, тому вони потребують опрацювання в режимі реального часу. В основу науково-технічного прогресу покладено стрімкий ріст знань, що перевищує експоненціальний [10]. Проблеми, які вирішує інформатика (нім. Informatik; фр. Informatique; англ. Computer science), численні і ґрунтовні: від теоретичних основ проектування архітектури ЕОМ та їх елементної бази до опрацювання даних в процесі планування, управління, проектування. Опрацювання даних тісно пов'язане з математичним моделюванням, прийняттям рішень, оптимізацією, дослідженням операцій, системним аналізом і т.д [1].

Анотація. ІТ-освіта є одним з інструментів підготовки фахівців майбутнього, здатних креативно мислити та створювати інновації. У статті розглядається інструментальна програмна система в процесі синтезу формального опису нейронних моделей в контексті використання штучного інтелекту як інструменту для розвитку майбутнього інженера.

Ключові слова: штучний інтелект, дослідницьке навчання, варіативні моделі, комп'ютерне моделювання, нейронні моделі, КОМСДН.

Література

1. Hrybiuk O. Problems of expert evaluation in terms of the use of variative models of a computer-oriented learning environment of mathematical and natural science disciplines in schools, [w:] Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Seria: Organizacja i Zarządzanie, Zeszyt Nr 79, Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej (WPP), 2019.: 101-119. ISSN 0239-9415.
2. Гриб'юк О. О. Дослідницьке навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з використанням комп'ютерно орієнтованих методичних систем / О. О. Гриб'юк. Монографія. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019.
3. Гриб'юк О. О. Комп'ютерне моделювання та робототехніка в навчально-виховному процесі сучасного навчального закладу. / Гриб'юк О.О. // Сьома міжнародна науково-практична конференція FOSS Lviv-2017: Збірник наукових праць, 27-30 квітня 2017 року, м. Львів.: 38-43. ISBN 978-966-2598-86-5.
4. Hrybiuk O. Improvement of the Educational Process by the Creation of Centers for Intellectual Development and Scientific and Technical Creativity. In: Hamrol A., Kujawińska A., Barraza M. (eds) Advances in Manufacturing II. MANUFACTURING 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2019.: 370-382. Springer, Cham Online.
5. Hrybiuk O. Mathematical modeling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry // Proceedings of the First International conference on Eurasian scientific development. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH. Vienna. 2014. P. 46-53.
6. Гриб'юк О. О. Рівнева модель дослідницького навчання учнів математики з використанням комп'ютерно орієнтованої методичної системи: дидактичні аспекти та перспективи. The Variativ Model for Research Training for Math Students Using Computer-oriented Methodical System. Vol 77 N3 (2020). Pp. 39-65.
7. Гриб'юк О. Дослідження розвитку інтелекту: Особливості дослідницького навчання учнів з різними рівнями розвитку інтелекту в закладах загальної середньої освіти України та Польщі. Технології розвитку інтелекту: відкритий науковометричний журнал/ О.О. Гриб'юк, Й. Шафран. Том 4, No 3 (28), 2020 ISSN: 2223-0521.
8. Гриб'юк О. О. Імерсивні технології в освіті: особливості когнітивного розвитку дитини у віртуальному середовищі в процесі дослідницького навчання. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: збірник наукових праць. Київ-Вінниця: ТОВ Фірма «Планер», 2020.
9. Гриб'юк О. О. Психофізіологічні аспекти феномену присутності дитини у віртуальному середовищі у процесі дослідницького навчання: результати емпіричного дослідження. European potential for the development of pedagogical and psychological science: Collective monograph. Riga, Latvia : "Baltija Publishing", 2021.: 147-187.
10. Гриб'юк О. О. Методичні особливості організації дослідницького навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з педагогічно виваженим використанням комп'ютерно орієнтованої методичної системи: працюємо в умовах експерименту. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: збірник наукових праць. Вінниця: ТОВ ТОВ «Друк плюс», 2020. Вип. 56: 64-77.

ОБРОБКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ДИСКРЕТНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Вступ. На практиці досить часто необхідно мати справу з випадковими величинами, які змінюються в процесі проведення експерименту. На відміну від випадкових величин, змінні в процесі проведення дослідів випадкові величини, які прийматимуть той чи інший вигляд (невідомо заздалегідь, який саме), називаються випадковими функціями. Конкретний вид, якого набуде випадкова функція в процесі експерименту, будемо називати реалізацією. Тобто при проведенні n дослідів будемо мати n різних реалізацій випадкової функції, які будуть не випадковими звичайними функціями.

Випадкову функцію будемо позначати $X(t)$, а відповідну реалізацію - $x_i(t), i = \overline{1, n}$. Зазначимо, що для багатьох випадкових функцій аргументом є час t (тоді мова йде про випадковий процес), хоча це не завжди так (аргументом випадкової функції можуть бути координати, температура, тиск тощо).

Нехай під час проведення експерименту випадкова функція $X(t)$ набула n різних реалізацій $\{x_i(t), i = \overline{1, n}\}$. При фіксації певного часу t кожна реалізація прийме певне числове значення, тобто матимемо сукупність значень випадкової величини, яку називатимемо перерізом випадкової функції у відповідний час $t_{\text{фікс.}}$ (рис.1).

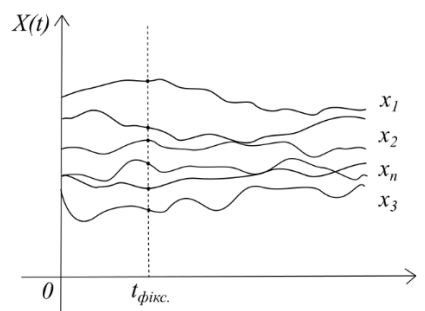


Рис. 1. Реалізації випадкової функції $X(t)$

При фіксованих значеннях часу $t_j, j = \overline{1, m}$ отримаємо систему m випадкових величин $X(t_j), j = \overline{1, m}$. Очевидно, що при збільшенні числа реєстрацій m будемо отримувати більш точну поведінку випадкової функції $X(t)$. Якщо область визначення випадкової функції є дискретною, то говорять про процес з дискретним часом. Аналогічно, якщо переріз випадкової функції є дискретною випадковою величиною, отримаємо відповідний випадковий процес з дискретними станами.

Функція розподілу $f(x, t)$ отриманої в певний час t випадкової величини є одномоментною характеристикою, яка не описує весь процес в цілому. Тому доцільно розглянути залежність між системою двох випадкових величин, отриманих при двох фіксованих значеннях часу. Математичним сподіванням випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція $m_x(t)$, яка при кожному значенні аргументу t дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу випадкової функції: $m_x(t) = M[X(t)]$.

Дисперсією випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція $D_x(t) \geq 0$, значення якої для кожного t дорівнює значенню дисперсії відповідного перерізу: $D_x(t) = D[X(t)]$.

Кореляційною функцією випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція $K_x(t, t')$, яка при кожній парі значень t, t' дорівнює кореляційному моменту відповідних перерізів:

$$K_x(t, t') = M\left[\overset{\circ}{X}(t) \cdot \overset{\circ}{X}(t')\right] = M[X(t) \cdot X(t')] - m_x(t) \cdot m_x(t'),$$

де $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$, $\overset{\circ}{X}(t') = X(t') - m_x(t')$ - центровані випадкові функції з нульовим математичним сподіванням. Очевидно, що кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів, тобто $K_x(t, t') = K_x(t', t)$. При $t = t'$ отримаємо $K_x(t, t) = D_x(t)$.

Експериментальна обробка даних та визначення характеристик випадкового процесу полягає в наступному [2, с.34]. Нехай в ході проведення

n дослідів протягом певного часу T було отримано сукупність n реалізацій $\{x_i(t), i = \overline{1, n}\}$. При фіксованих (дискретних) значеннях $t_k, k = \overline{1, m}$ (зазвичай часовий проміжок ділиться на рівні інтервали) отримано n часових рядів для кожної реалізації x_i . Зручно отримані значення подавати у вигляді таблиці:

$x(t)$	t_1	t_2	..	t_k	..	t_l	..	t_m
$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$	..	$x_1(t_k)$	..	$x_1(t_l)$	..	$x_1(t_m)$
$x_2(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$	..	$x_2(t_k)$	..	$x_2(t_l)$	..	$x_2(t_m)$
...	..	..	..	..	..	..	..	..
$x_i(t)$	$x_i(t_1)$	$x_i(t_2)$	..	$x_i(t_k)$	..	$x_i(t_l)$	..	$x_i(t_m)$
...	..	..	..	..	..	..	..	..
$x_n(t)$	$x_n(t_1)$	$x_n(t_2)$	..	$x_n(t_k)$	..	$x_n(t_l)$	..	$x_n(t_m)$

Отримані дані є результатами n дослідів над системою m випадкових величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$ і обробляються звичайними статистичними методами. Зручними засобами обробки даних є, наприклад, середовище MS EXCEL або Mathcad.

Незміщені оцінки:

$$\text{для математичного сподівання} - \tilde{m}_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(t_k)}{n};$$

для дисперсії –

$$\tilde{D}_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k))^2}{n-1} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i(t_k))^2}{n} - (\tilde{m}_x(t_k))^2 \right] \cdot \frac{n}{n-1};$$

для значень кореляційних моментів –

$$\begin{aligned}\tilde{K}_x(t_k, t_l) &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)) \cdot (x_i(t_l) - \tilde{m}_x(t_l))}{n-1} = \\ &= \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i(t_k) x_i(t_l)}{n} - \tilde{m}_x(t_k) \cdot \tilde{m}_x(t_l) \right] \cdot \frac{n}{n-1}.\end{aligned}$$

Після обчислення цих характеристик можна побудувати графік залежностей $\tilde{m}_x(t)$, $\tilde{D}_x(t)$. Функція $\tilde{K}_x(t, t')$ будується в прямокутній сітці точок (t_k, t_l) , $(k, l = \overline{1, m})$ [1, с.34]. За необхідності, всі ці функції з дискретними областями значень можуть бути апроксимовані на невеликому проміжку значень t наприклад, методами найменших квадратів, сплайн-інтерполяція тощо [3, с.24]. Це дасть змогу екстраполювати результати вимірювань на ширший діапазон t .

Анотація. В статті запропоновано алгоритм обробки статистичних даних випадкового процесу та наведено методи апроксимації не випадкових функцій математичного сподівання та дисперсії.

Ключові слова: випадковий процес, математичне сподівання, дисперсія, кореляційна функція, методи апроксимації.

Summary. In the article there was considered statistical data processing algorithm of random process and approximation methods to find non-random expected value and dispersion.

Key words: random process, expected value, dispersion, correlation function, approximation methods.

Література

1. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1991 – 384с.
2. Мусіяка В. Г. Основи числових методів. – Дніпро : ЛПРА, 2017. – 256с.
3. Сеньо П. С. Випадкові процеси. – Львів : Компакт-ЛВ, 2006. – 288с.

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ ОБ'ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ПРОЦЕСІ РОЗРОБЛЕННЯ ГРИ «LOST ARCHER» МОВОЮ C++

Усеможливі зв'язки комп'ютерного моделювання з іншими методами пізнання продемонстровано в експериментальному дослідженні [1]. Висновки враховуються з метою покращення методики експериментального вивчення об'єкта дослідження, розвитку математичної моделі та удосконалення комп'ютерної моделі. Дослідження соціальних і економічних процесів вирізняються неможливістю повністю використання експериментальних методів.

Комп'ютерне моделювання – метод представлення об'єкта, що відрізняється від реального, але дуже наближений до реальної дійсності, з використанням якого вивчаються фізико-хімічні, біологічні, хімічні закони та експерименти (які неможливо провести в реальному житті) [2]. Під комп'ютерним моделюванням в широкому сенсі розуміється процес створення і дослідження моделей з використанням комп'ютера.

Виокремлюються наступні види моделювання: фізичне моделювання; динамічне моделювання; імітаційне моделювання; статистичне моделювання; інформаційне моделювання; моделювання знань [3].

```
public class PlayerMovement : MonoBehaviour
{
    public float moveSpeed;

    public Rigidbody2D rb;

    private Vector2 move;
```

```

void Update()
{
    ProcessInputs();
}

void FixedUpdate()
{
    Move();
}

void ProcessInputs() // Ввод с клавиатуры для передвижение
{
    move.x = Input.GetAxisRaw("Horizontal");
    move.y = Input.GetAxisRaw("Vertical");
}

void Move() // Передвешение
{
    rb.MovePosition(rb.position + move * moveSpeed * Time.fixedDeltaTime);
}
}

public class rotation : MonoBehaviour
{
    void Update()

```

```

{
    Rotation();
}

void Rotation() // Ротация объекта в зависимости от положение мыши
{

```

```

Vector2 direction = Camera.main.ScreenToWorldPoint(Input.mousePosition) -
transform.position;

```

```

    float angle = Mathf.Atan2(direction.y, direction.x) * Mathf.Rad2Deg - 90f;
    Quaternion rotation = Quaternion.AngleAxis(angle, Vector3.forward);
    transform.rotation = rotation;
}
}

public class Shoot : MonoBehaviour
{
    public Transform FirePoint;
    public GameObject ArrowPrefab;
    public float FireRate;
    public float arrowForce;

    float ShootTime;

    void Update()
    {
        if(Input.GetButtonDown("Fire1")){Shooting();}
    }
}

```

```
void Shooting()
{
    if(Time.time > ShootTime)
    {
        ShootTime = Time.time + FireRate;
```

```
GameObject arrow = Instantiate(ArrowPrefab, FirePoint.position, FirePoint.rotation);
```

```
    Rigidbody2D rb = arrow.GetComponent<Rigidbody2D>();
    rb.AddForce(FirePoint.up * arrowForce, ForceMode2D.Impulse);
}
}
}
```

Переваги використання комп'ютерного моделювання:

вільнопоширюване і доступне у використанні; можливе проектування і створення об'єктів, які в реальних умовах неможливі (не існують) (рис. 1); можливе прогнозування результатів експериментів; знаходження оптимальної форми і конструкції без створення пробних деталей; експериментування без ризику для здоров'я людини та навколишнього середовища; можливість огляду об'єкта з різної перспективи [4].

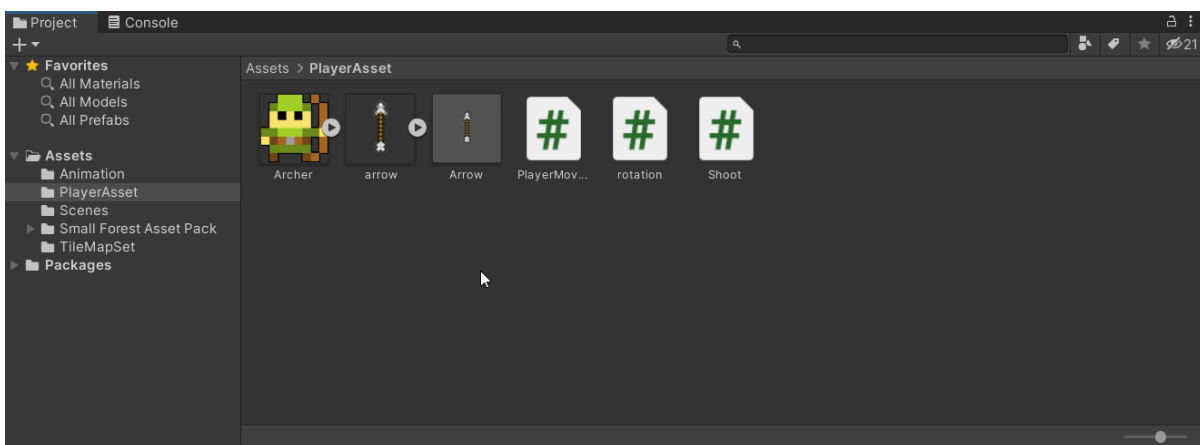


Рис. 1

Недоліки використання комп'ютерного моделювання: помилкове твердження про те, що в використанні моделювання можна якісно виявити нові явища, оскільки потрібне підтвердження в реальних умовах і в реальних експериментах. Модельний аналіз зменшує можливі пояснення. З об'єкта моделювання можна «здобути» лише те, що входить за рамки моделі [5].

Методична система дослідницького навчання ООП є комп'ютерно орієнтованою системою, використання якої сприяє формуванню прийомів дослідницької діяльності в процесі навчання [6].

Результати дослідження свідчать про можливе та доцільне використання таких програм у поєднанні з традиційними методами навчання ООП, причому отримуємо можливість ефективно використовувати час без перевантаження [7].

Анотація: *Розглядаються технологічні аспекти та перспективи використання комп'ютерного моделювання в процесі дослідницького навчання ООП.*

Ключові слова: *комп'ютерне моделювання, варіативна модель, комп'ютерно орієнтована методична система дослідницького навчання.*

Література

- 1..Hrybiuk O. Improvement of the Educational Process by the Creation of Centers for Intellectual Development and Scientific and Technical Creativity. In: Hamrol A., Kujawińska A., Barraza M. (eds) Advances in Manufacturing II. MANUFACTURING 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2019.: 370-382. Springer, Cham Online.
- 2.Hrybiuk O. Mathematical modeling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry // Proceedings of the First International conference on Eurasian scientific development. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH. Vienna. 2014. P. 46-53.
- 3.Гриб'юк О. О. Математичне моделювання при навчанні дисциплін математичного та хіміко-біологічного циклів: навчально-методичний посібник для учителів / О.О. Гриб'юк. – Рівне: РДГУ, 2010. – 207 с.
- 4.Гриб'юк О. О. Дослідницьке навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з використанням комп'ютерно орієнтованих методичних систем / О. О. Гриб'юк. Монографія. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019. – 858 с.: іл.
- 5.Гриб'юк О. О. Рівнева модель дослідницького навчання учнів математики з використанням комп'ютерно орієнтованої методичної системи: дидактичні аспекти та перспективи. The Variativ Model for Research Training for Math Students Using Computer-oriented Methodical System. Vol 77 N3 (2020). Pp. 39-65.
- 6.Гриб'юк О. О. Методичні особливості організації дослідницького навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з педагогічно виваженим використанням комп'ютерно орієнтованої методичної системи: працюємо в умовах експерименту. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців:

методологія, теорія, досвід, проблеми: збірник наукових праць. Вінниця: ТОВ ТОВ «Друк плюс», 2020. Вип. 56: 64-77.

7.Hrybiuk O. Problems of expert evaluation in terms of the use of variative models of a computer-oriented learning environment of mathematical and natural science disciplines in schools, [w:] Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Seria: Organizacja i Zarządzanie, Zeszyt Nr 79, Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej (WPP), 2019.: 101-119. ISSN 0239-9415.

Порожняк М. С. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – ст. викл. Михайленко І. В.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

SOFT SKILLS ЯК СКЛАДОВА ПРОФЕСІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ

Soft skills (укр. «гнучкі навички») — комплекс неспеціалізованих, надпрофесійних навичок, які відповідають за успішну участь у робочому процесі, високу продуктивність і, на відміну від спеціалізованих навичок, непов'язані з конкретною сферою [1].

Coursera, всесвітньо відома освітня онлайн платформа, у своєму блозі стверджує, що дослідницька компанія Wonderlic підрахувала: 93% роботодавців вважають *soft skills* суттєвими під час прийняття рішень щодо найму на роботу. А дехто з них взагалі відстоює думку, що зазначені навички навіть більш цінні та значущі, ніж технічні.

До зазначених характеристик належать наступні вміння:

- активне слухання (здатність уважно слухати, ставлячи допоміжні запитання, що дозволяють опоненту ширше розкрити думку та зрозуміліше пояснити свою позицію);
- вміння вести перемовини;
- невербальні елементи комунікації (вміння не тільки висловлювати думку розумно та стисло, але й застосовувати жести, міміку, постанову на підтвердження слів, що робить спілкування більш виразним);
- вміння переконувати;
- вміння презентувати та виступати публічно;
- storytelling (вміння розповідати);

- письмові навички (наприклад, вміння укласти звіти, вести бізнес-комунікацію) [1].

Дуже важливою складовою є вміння критично мислити: проводити аналіз ситуації, що склалася, робити висновки щодо своєї роботи та змінювати поведінку в тій чи іншій ситуації. Сучасний працівник повинен розвивати в собі емпатію, здатність відчувати, розуміти та аналізувати почуття та емоції інших людей.

Майбутній інженер повинен володіти двома типами навичок - це *hard (tech) skills* та *soft skills*.

Hard (tech) skills - це професійні, технічні навички, що пов'язані з діяльністю в сфері формалізованих технологій. Оскільки ці навички стійкі, добре проглядаються, вимірні і ототожнюються з конкретними конструкціями, то вони входять в перелік вимог, що містяться в посадових інструкціях [2].

Характеристика	Hard Skills	Soft Skills
Основа	Компетентність	Компетенції
Базуються на	Професійний досвід	Особисті цінності
У відповідь на певні дії застосовуються	Технічні знання, класифікація	Моделі поведінки
Критичність	Критичність в короткостроковій перспективі	Критичність в довгостроковій перспективі
Розвиток	Розвиток відбувається швидше	Розвиток відбувається повільніше
Досягнення результату	З меншими зусиллями та гарантованим результатом (при дотриманні базових критеріїв: мотивація, здатність до навчання тощо)	З більшими зусиллями, досягнення потрібного рівня не гарантовано (межа компетенцій, глибока інтегрованість в структуру особистості)
Зворотність	Практично не мають схильності до зворотного розвитку	При специфічних умовах мають схильність до зворотного розвитку

Розглянемо які типи soft skills та hard skills необхідні для фахівців інженерної галузі і яких навичок вони можуть набути в процесі навчання, зокрема для фахівців напрямку інженер-геодезист (рис.1).

Soft skills та Hard skills

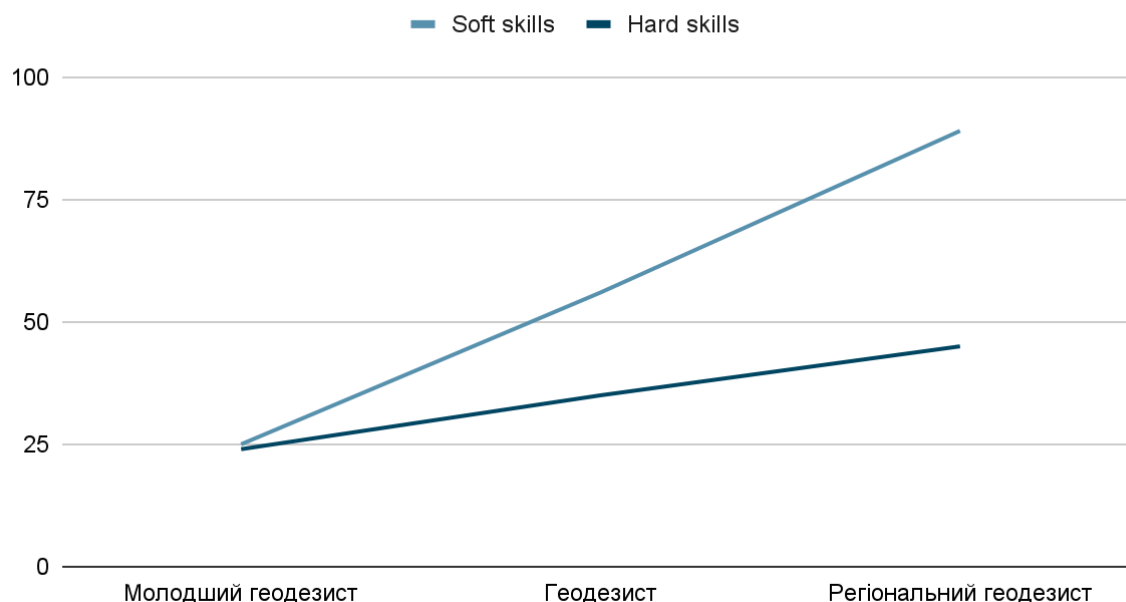


Рисунок 1. Soft skills та hard skills при підготовці інженера-геодезиста

Як можемо спостерігати з поданого графіку за допомогою soft skills розвиток фахівця відбувається набагато швидше та ефективніше ніж за методикою hard skills. Розподіл навичок на кожному етапі кар'єри залежить від рівня відповідальності. Просуваючись кар'єрними сходами рейтинг критичності зміщується від технічних в сторону комунікативних, управлінських та стратегічних. Крім того, змінюється характер діяльності - зменшується час на розв'язок технічних задач, збільшується час, що витрачається на комунікації, прийняття рішень тощо.

В процесі навчання студент повинен оволодіти як базовими soft skills, які відносяться до особистісних та комунікативних навиків, так і специфічними, які застосовуються в проектах розробки планів побудови доріг, будівель, такими як управлінські та стратегічні навички.

Навіщо ж всі ці навички звичайному інженеру?

Всі ці навички потрібні як мінімум для того, щоб спілкуватися з іншими членами команди і робити це ефективно. Сьогодні переважна більшість проектів створюється та реалізується в команді. Розробити та виконати таку широкомасштабну роботу як наприклад проектування дороги або будівлі поодиночі неможливо. Так, ви можете вкладати свій час, сили і талант працюючи без будь-якої допомоги. Але куди швидше та прибутковіше буде робота з однодумцями.

Отже, сьогодні професія інженера-геодезиста це одна із найпопулярніших професій на ринку праці в Україні та в багатьох інших країнах, тому для цього потрібно мати не тільки багато навичок в цій сфері та великий рівень знань, а ще потрібно бездоганно працювати в команді, бути комунікативним та комунікабельним. Завдяки техніці soft skills цього можна досягти дуже швидко та ефективно. Для успішного формування вміння застосовувати «м'які» навички у робочих ситуаціях людина має практикувати їх протягом всього навчання, оскільки вони мають тенденцію до зворотного напрямку. В наш час soft skills не тільки доповнюють hard skills та створюють нові можливості, вони ще сприяють розвитку та формуванню професійної компетентності.

***Анотація.** Майбутній інженер-геодезист повинен володіти двома типами навичок - це hard (tech) skills та soft skills, тому в статті розглянуто необхідність і актуальність набуття необхідних навичок.*

***Ключові слова:** інженер-геодезист, soft skills, hard skills.*

Література

1. Софт скіли: чому ці навички такі важливі сьогодні [Електронний ресурс]. Режим доступу <https://jobs.innovecs.com/uk/blog/soft-skills-vazhlyvi-syogodni>
2. Важка артилерія за soft skills: чому інженерам-початківцям важливо розвивати м'які навички [Електронний ресурс]. Режим доступу <https://dou.ua/lenta/columns/soft-skills-importance-for-beginners/>

ЧИСЛЕННІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТУ VISSIM

На рисунку 1 приведена розрахункова схема об'ємного гідропривода (ОГП), яка буде використовувана для аналізу його динаміки в складі самохідного мобільного підйомника з робочою платформою (МПП). Гідромотори героторного типу М1 і М2 приводяться в обертання від подачі РР з насосу Н (аксіальнопоршневого з регульованим робочим об'ємом). Гідромотори приводять в обертання ліве та праве колеса МПП. Насоси та гідромотори мають втрати потужності, зокрема зовнішні та внутрішні витoki РР, які відносяться до коефіцієнту подачі для насоса і об'ємного ККД для гідромоторів, а також гідродинамічні та механічні втрати, які відносяться до гідромеханічного ККД гідромашин. Позначки на схемі будуть пояснюватись при складанні математичної моделі гідропривода.

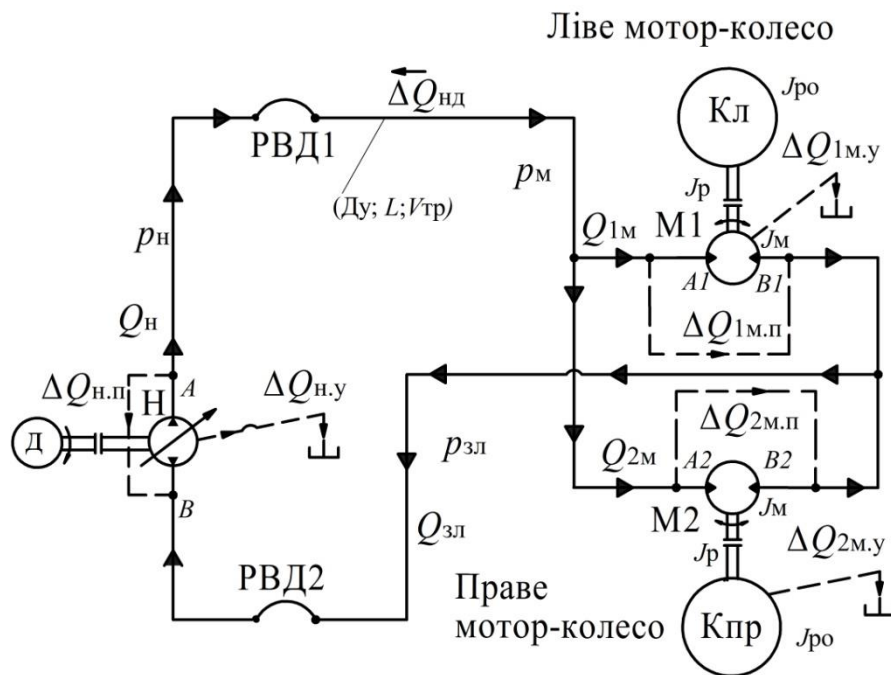


Рисунок 1. Розрахункова схема гідропривода для аналізу його динаміки

За результатами статичних розрахунків ОГП складають математичну модель зміни динамічних характеристик гідромотора - частоти обертання і тиску в режимі розгону від часу [1] замінивши обчислювальний пакет SIAM на прогресивніший VisSim.

Витрата насоса з урахуванням залежності її складових від часу визначається з виразу,

$$q_{н1}(t) = q_{нг}(t) - q_{нп}(t) - q_{нд}(t), \quad (1)$$

де $q_{нг} = W_n \omega_n$ - геометричне витрата насоса без урахування витоків РР, а параметр t для спрощення запису для даного і подальшого виразів опускаємо;

$$W_n = \frac{V_{рн}}{2\pi} - \text{характерний об'єм насоса з робочим об'ємом } V_{рн}, \text{ см}^3/\text{рад},$$

$$V_{рн} = 2\pi \cdot W_n, \text{ см}^3, \quad (2)$$

$q_{нп} = C_{нп}(p_n + p_{сл})$ - витоки і перетоки в насосі, $\text{см}^3/\text{с}$;

p_n і $p_{сл}$ - тиску в лініях нагнітання і зливу (підживлення), відповідно, МПа;

$C_{нп}$ - коефіцієнт витоків РР в насосі, $\text{см}^3/\text{с} \cdot \text{МПа}$;

$q_{нд} = \frac{V_{н1}}{E} \frac{dp_n}{dt}$ - деформаційна витрата, викликана стисливістю РР, $\text{см}^3/\text{с}$;

$V_{н1}$ - об'єм РР в нагнітальній порожнині насоса, см^3 ;

ω_n - частота обертання насос (кутова швидкість), с^{-1} .

Витрату гідромотора визначають з виразу

$$q_{м1} = q_{мг} + q_{мп} - q_{мд}, \quad (3)$$

де $q_{мг} = W_m \omega_m$ - теоретична витрата, $\text{см}^3/\text{с}$;

ω_m - частота обертання гідромотора (углова швидкість), с^{-1} ;

$q_{мп} = C_{мп}(p_n + p_{сл})$ - витрата, викликана перетоками в гідромоторі;

$C_{мп}$ - коефіцієнт витоків РР в гідромоторі, $\text{см}^3/\text{с} \cdot \text{МПа}$;

$q_{мд} = \frac{V_{м1}}{E} \frac{dp_n}{dt}$ - деформаційна витрата, $\text{см}^3/\text{с}$;

$W_M = \frac{V_{PM}}{2\pi}$ - характерний об'єм гідромотора, см³/рад;

V_{PM} - робочий об'єм гідромотора

$$V_{PM} = 2\pi \cdot W_M, \text{ см}^3, \quad (4)$$

Рівняння нерозривності має вид

$$q_{H1} = q_{M1}. \quad (5)$$

Представимо суму деформаційних витрат насоса і гідромотора у виді

$$q_{HD} + q_{MD} = \frac{dp_H}{dt} \frac{V_{H1}}{E} + \frac{dp_H}{dt} \frac{V_{M1}}{E} = \frac{dp_H}{dt} \left(\frac{V_{H1}}{E} + \frac{V_{M1}}{E} \right). \quad (6)$$

Після підстановки відповідних значень витрат отримаємо розрахункову формулу для обчислення тиску в лінії нагнітання

$$\begin{aligned} \frac{dp_H}{dt} \left(\frac{V_{H1}}{E} + \frac{V_{M1}}{E} \right) &= W_H \omega_H - C_{HP} (p_H - p_{cl}) - W_M \omega_M - C_{MP} (p_H + p_2), \\ p_H &= \int_0^t \frac{E}{V_{H1} + V_{M1}} \cdot [W_H \omega_H - W_M \omega_M - C_{HP} (p_H - p_{cl}) - C_{MP} (p_H + p_2)] dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Для розрахунку частоти обертання та характеру її зміни запишемо рівняння моментів гідромотора

$$M_M - M_c - M_{ж.тр} = J_{\Sigma} \cdot \frac{d\omega_M}{dt}, \quad (8)$$

де $M_M = M_{MT} \cdot \eta_{МГМ} = W_M (p_H - p_{cl}) \cdot \eta_{МГМ}$ - крутний момент гідромотора;

$M_{MT} = W_M (p_H - p_{cl})$ - теоретичний крутний момент, Н.м;

M_c - момент опору, Н.м;

$J_{\Sigma} = J_p + J_6 + J_T$ сумарний момент інерції, приведений до валу гідромотора;

J_p - момент інерції частин гідромотора, що обертаються, Н.м,с²/рад²;

J_6 - момент інерції приводної частини (редуктора), Н.м,с²/рад²;

J_T - момент інерції робочого органу (зовнішнього навантаження), Н.м,с²/рад²;

$\eta_{МГМ} = 1 - \frac{M_{MT}}{M_{МГР}}$ - гідромеханічний ККД гідромотора;

$M_{ж.тр} = \beta \cdot \omega_M$ - момент рідинного тертя, Н.м,

β - коефіцієнт рідинного тертя, Н.м.с.

Після перетворювань одержимо вираз для розрахунку частоти обертання гідромотора

$$W_m(p_n - p_{cl}) \cdot \eta_{mгm} - M_c - \beta \cdot \omega_m = J_{\Sigma} \cdot \frac{d\omega_m}{dt} \quad (9)$$

$$d\omega_m = \int_0^t \frac{1}{J_{\Sigma}} [W_m(p_n - p_{cl}) \cdot \eta_{mгm} - M_c - \beta \cdot \omega_m] \cdot dt$$

Програмний комплекс VisSim (Visual Simulator) розроблений фірмою Visual Solutions Inc (США) [2;3] відноситься до ряду класичних програм блокового моделювання. У ньому інтегрована більшість відомих програмно-апаратних методів дослідження і розробки систем моделювання. Програма VisSim дозволяє будувати моделі систем на основі структурно-функціональних схем (або при достатньому досвіді роботи з VisSim безпосередньо по математичному опису об'єкту моделювання, в якому диференціальні рівняння представлені в нормальній формі Коши). Кожен блок реалізує певну математичну функцію. Математична модель досліджуваної системи (її алгебраїчні, трансцендентні і звичайні диференціальні рівняння, нерівності та ін.) має бути представлена у вигляді структурно-функціональної схеми для подальшого набору у вигляді сукупності блоків і зв'язків між ними (діаграм).

Методи інтегрування в пакеті VisSim дозволяють вирішувати диференціальні рівняння методами: Euler - Ейлера; Trapezoidal - трапецій; RK2 - Рунге-Кутта 2-го порядку точності; RK4 - Рунге-Кутта 4-го порядку точності; Adaptive - адаптивний Рунге-Кутта 5-го порядку точності; Backward Euler - зворотний метод Ейлера (чи неявний метод Ейлера), який є одним з основних чисельних методів рішення звичайних диференціальних рівнянь. Він подібний до стандартного методу Ейлера, проте відрізняється тим, що є неявним методом. Пакет VisSim має в розпорядженні три ітераційні методи для одновимірної (за одним критерієм) параметричної оптимізації: Powell (Пауелла); Polar - Ribiere (Полака-Райбера) і Fletcher Reeves (Флетчера-Райбера). Ці методи послідовно модифікують параметри, спираючись на отримувані результати в режимі серії повторних моделювань, і прагнуть

зменшити значення вибраного критерію. Основне рівняння модифікації параметра має вигляд

$$P_{K+1} = P_K + \Delta P_K, \quad (10)$$

де K - ітераційний індекс (номер моделювання в серії).

Відмінність між методами полягає в методиці генерації величини ΔP_K .

Література

1. Расчет, проектирование и эксплуатация объемного гидропривода / З. Л. Финкельштейн, О. М. Яхно, В. Г. Чебан и др. – Киев : НТУУ «КПИ» ВПИ ВПК «Политехника», 2006. – 216 с.
2. Систук В. А. Возможности использования программы имитационного моделирования PTV VISSIM для подготовки специалистов по направлениям «Транспортные технологии» и «Автомобильный транспорт» / В. А. Систук, А. А. Богачевский, В. Ю. Шумский // Інформаційні технології і засоби навчання, 2016, том 52, №2. – С. 93–107.
3. Сизый Ю. А. Динамика и компьютерное моделирование металлорежущих станков: Лабораторно-компьютерный практикум / Ю. А. Сизый, Д. В. Сталинский, Ю. Н. Любимый. – Х.: Изд-во «ИНДУСТРИЯ», 2013. – 104 с.

УДК 629.113

Степанюк О. М. (магістрант, 1 курс)

Науковий керівник – доц. Рудик О. Ю.

Хмельницький національний університет (Хмельницький, Україна)

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ SOLIDWORKS SIMULATION ДЛЯ АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ МОДЕЛІ

На сьогодні математичне моделювання знайшло широке застосування у розрахунках працездатності технічних систем. Сучасні методи візуалізації й математичного аналізу дають можливість попередньо оцінити стан деталі при різних впливах на неї. Модель, яка геометрично подібна об'єкту й віддзеркалює його механічні властивості, здатна вірогідно передбачати напруження й деформації під навантаженням завдяки спеціальним комп'ютерним методам, заснованим на математичному апараті для проведення кількісного аналізу.

Методика комп'ютерного моделювання вимагає особливих навичок роботи у спеціалізованих пакетах прикладних програм. Одна з яких – SolidWorks, є доступним технічним засобом для здійснення поставлених задач.

SolidWorks – це додаток для автоматизованого проектування, який дозволяє швидко створювати ескізи деталей, експериментувати з їхніми елементами й розмірами, створювати моделі й креслення. У цій програмі використовується тривимірний підхід до проектування:

- при проектуванні деталі від початкового ескізу до кінцевого результату створюється тривимірна модель;

- на основі цієї моделі створюються 2-мірні креслення й сполучаються компоненти, які складаються з деталей або вузлів, для створення 3-мірних складань [1, 2].

Модуль SolidWorks Simulation, який є розрахунковим додатком SolidWorks, передбачає аналіз напружено-деформованого стану моделі. Завдяки потужному математичному апарату й високоякісній комп'ютерній графіці ця програма зайняла гідне місце у дослідженнях деталей автомобільної техніки [3].

Необхідно зауважити, що аналітичні моделі обмежуються проблемами з відносно регулярною геометрією, простими граничними умовами й однорідними властивостями матеріалу у зв'язку з математичними труднощами у формулюванні й розв'язанні цих задач. З іншого боку, чисельні підходи апроксимують аналітичний розв'язок за допомогою чисельних методів.

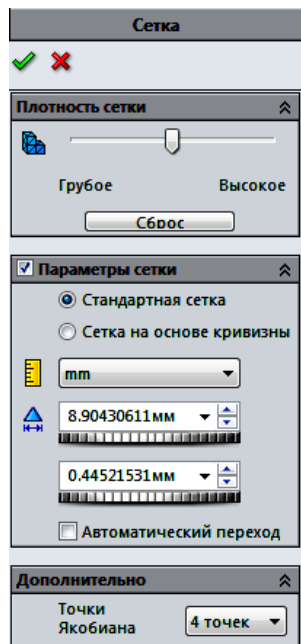
Моделювання дозволяє замінити вивчення реального об'єкта дослідженням характеристик зменшеної, механічно подібної моделі з наступним переходом від параметрів моделі до відповідних параметрам механічного об'єкта: побудова моделі полягає у сполученні побільшої лаконічності в її математичному описі з достатньою точністю модельного

відтворення саме тих сторін аналізованої реальності, які цікавлять при даному аналізі.

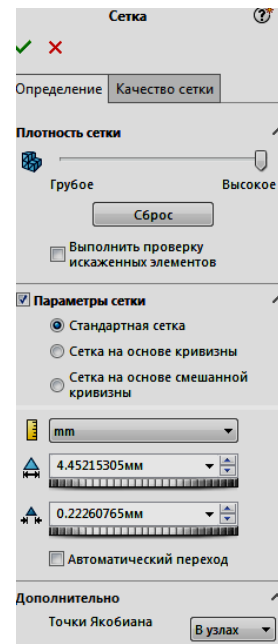
SolidWorks Simulation базується на методі скінченних елементів (МСЕ), якій є стандартом при розв'язку задач механіки твердого тіла за допомогою чисельних алгоритмів [4]. МСЕ – метод наближеного чисельного розв'язку фізичних задач. Він базується на дискретизації об'єкта на скінченну безліч елементів. Скінченні елементи (СЕ) мають різну форму й розміри. У результаті дискретизації створюється сітка з границь елементів.

Створювана сітка залежить від наступних факторів: геометрії деталі й розмірів моделі; активних параметрів сітки й характеристик керування нею; глобальних розмірів елемента й допуску. При аналізі об'єкта можуть виникати похибки. Вони пов'язані зі щільністю сітки. Тому необхідно підібрати оптимальні число й розмір СЕ – якість сітки відіграє ключову роль у точності результатів.

Мета даної роботи: оцінка впливу якості сітки SolidWorks Simulation на точність розрахунків на прикладі дослідження первинного вала коробки передач автомобіля КамАЗ [5]. У цій публікації було застосована стандартна сітка СЕ (активізується алгоритм розробки сітки Voronoi-Delaunay для наступних операцій її створення – рис. 1, а, рис. 2, а), бо на ранніх стадіях аналізу можуть підійти приблизні результати і дозволено задати більший розмір елемента для швидшого розв'язку.

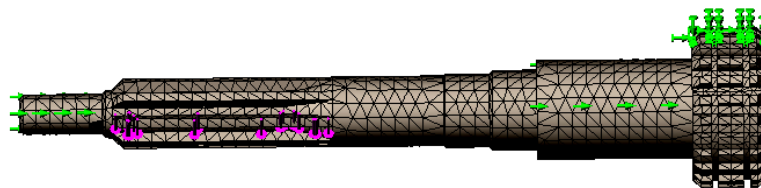


а

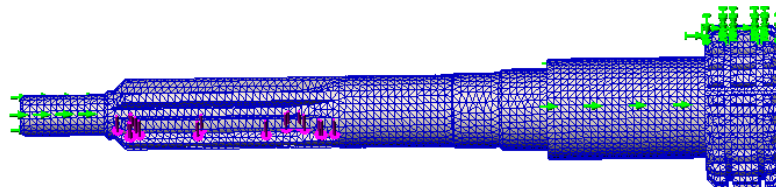


б

Рисунок 1. Параметри сітки (а – SolidWorks 2015, б – SolidWorks 2020)



а



б

Рисунок 2. Сітка з точками Якобіана

Висновок авторів [5]: так як мінімальний коефіцієнт запасу міцності $k = 1,747$, що більше допустимого [$k = 1,5$], то деталь працездатна. Але SolidWorks Simulation пропонує проводити Якобієву перевірку не тільки на 4-х гаусових точках, а й на 16, 29 чи на параметрі “у вузлах”, що й рекомендується для розв'язку статичних задач.

Нашими дослідженнями встановлено, що у даному випадку мінімальний коефіцієнт запасу міцності від кількості точок Якобіана (4, 16, 29, у вузлах) не

залежить. Вирішальний вплив на нього має якість сітки: груба чи висока (рис. 1, б, рис. 2, б): мінімальний коефіцієнт запасу міцності при повторних розрахунках став $k = 1,095$, що набагато менше допустимого. Тому для забезпечення працездатності первинного вала необхідна термічна (хіміко-термічна) обробка або заміна матеріалу.

Анотація. Проведена оцінка впливу якості сітки SolidWorks Simulation на точність розрахунків на прикладі дослідження первинного вала коробки передач автомобіля КамАЗ.

Ключові слова: SolidWorks Simulation, сітка, скінченний елемент, мінімальний коефіцієнт запасу міцності.

Abstract. An assessment of the impact of the quality of the SolidWorks Simulation grid on the accuracy of calculations on the example of the study of the primary shaft of the transmission of the car KamAZ.

Keywords: SolidWorks Simulation, grid, finite element, minimum safety factor.

Література

1. Рудик О. Ю. SolidWorks як інноваційний засіб вивчення дисциплін автомобільного профілю / О. Ю. Рудик, О. В. Диха // «Системні технології» 3 (128) 2020. – С. 21-35. – Режим доступу: <https://journals.nmetau.edu.ua/index.php/st/article/view/178/92>
2. Рудик О. Підготовка висококваліфікованих фахівців автомобілебудування на базі застосування SolidWorks [Електронний ресурс] / О. Рудик, В. Посполіта. – Режим доступу: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/9297>
3. Рудик О. Ю. Математичне моделювання пристосувань для ремонту автотранспорту на основі SolidWorks Simulation [Електронний ресурс] / О. Ю. Рудик, С. В. Турицький. – Режим доступу: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/10223>
4. Rudyk O. Yu. The impact of the SolidWorks Simulation network quality on the accuracy of the calculations [Electronic resource] / O. Yu. Rudyk, V. A. Gonchar. – Access mode: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/8681>
5. Гунько В. А. Застосування додатків SolidWorks і MathCAD для вирішення прикладних задач / В. А. Гунько, В. С. Полюк, О. Ю. Рудик // Актуальні аспекти математичної підготовки в сучасних ВНЗ: погляд студентів і молодих вчених: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. студентів і молодих вчених. – Х.: ХНАДУ, 2016. – С. 212-216. – Режим доступу: http://fts.khadi.kharkov.ua/fileadmin/F_Transport_system/v_matem/sbornik_sek_3.pdf

Стокалюк Т. М. (студ., 1 курс)
Науковий керівник - ст. викл. Михайленко І. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ЗАСТОСУВАННЯ STEM-ОСВІТИ ПРИ ПІДГОТОВЦІ ЗДОБУВАЧІВ ТЕХНІЧНОЇ ВИЩОЇ ОСВІТИ

STEM-освіта – трансдисциплінарний підхід до навчання, який базується на практичному застосуванні наукових, математичних, технічних та інженерних знань для розв'язання практичних проблем реального світу, створюючи зв'язки між школою, громадою, професією, глобальною економікою, що сприяє конкурентоздатності особистості в новій економіці й робить вивчення науки, техніки, інженерії та математики більш значущим та контекстним.

Мета STEM-освіти – комплексне просування STEM та синергія зусиль учасників освітнього процесу та соціальних партнерів щодо забезпечення молоді міцним теоретичним фундаментом, який дасть їй змогу запропонувати інноваційні рішення проблем суспільства та світу, поєднавши науку, технології, інженерію та математику задля задоволення суспільних потреб та прагнень.

Концепція спрямована на модернізацію природничо-математичної освіти, широкомасштабне впровадження STEM-освіти на рівнях дошкільної, загальної середньої, позашкільної, професійно-технічної та вищої освіти; врахування завдань природничо-математичної (STEM-освіти) при плануванні бюджетних асигнувань; залучення широкої громадськості до підтримки впровадження STEM-освіти через партнерство з роботодавцями та науковими установами [1].

STEM-освіта – це низка чи послідовність курсів або програм навчання, яка готує здобувачів до успішного працевлаштування, вимагає різних і більш технічно складних навичок, зокрема із застосуванням математичних знань і наукових понять [2]. STEM-освіта – це ряд навчальних програм, які формують навички та вміння, що будуть важливими для них у процесі працевлаштування,

і передбачає орієнтацію на виконання практичних задач у процесі навчання з використанням сучасних інформаційних технологій [3]. STEM-освіта визначається як педагогічна технологія формування і розвитку розумово-пізнавальних і творчих якостей здобувачів освіти, рівень яких визначає конкурентну спроможність особистості на сучасному ринку праці. У вужчому розумінні: через STEM-підхід до навчання здійснюється інтеграція змісту і методології природничих наук, технологій, інженерії та математики і логічного мислення у співпраці та дослідженнях [4]. Ефективним засобом формування фахових компетентностей є проєктна діяльність. Виконання STEM-проєктів передбачає інтегровану дослідницьку, творчу діяльність учнів, спрямовану на отримання самостійних результатів під керівництвом тьютора. STEM-проєкт – це спосіб досягнення цілі шляхом детальної розробки проблеми, що завершується реальним практичним результатом. Викладач здійснює супровід проєкту і спонукає до пошукової діяльності, допомагає у визначенні мети, завдань проєкту, орієнтовних методів/прийомів дослідницької діяльності та пошуку інформації для розв’язання окремих навчально-пізнавальних завдань. Реалізація STEM-проєкту сприяє формуванню соціальних компетентностей, дозволяє пройти технологічний алгоритм від виявлення проблеми, зародження ідеї до створення продукту, а також навчитися презентувати його [5]. Специфіка організації навчального процесу при підготовці майбутніх інженерів, потреба у підвищенні ефективності освітнього процесу, реалізація принципів індивідуального підходу в навчанні змушують відводити особливе місце набуттю практичних інженерних навичок. Інтенсивний розвиток інформаційно-комунікаційних технологій дозволяє переглянути основні підходи до підготовки майбутніх інженерів. Майбутні інженери під час навчання мають специфічні потреби, які об’єднують набуття фахових компетенцій та формування інженерної думки. Реалізацію цих потреб забезпечує поєднання навчання в умовах інформаційно-освітнього середовища та впровадження елементів STEM-освіти в систему підготовки фахівців інженерних спеціальностей. Для набуття фахових

компетентностей в умовах інформаційноосвітнього середовища викладач закладає компетенції під час формувань завдань курсу. Для виконання робіт з елементами STEM-освіти в умовах інформаційноосвітнього середовища створені завдання для здобувачів вищої освіти містять розрахункову, проєктну, наукову складові. В основі підготовки майбутніх інженерів знаходиться здійснення проєктної та дослідницької діяльності, реалізація завдань моделювання різноманітних процесів і явищ та усвідомлене формування якісно нових трансдисциплінарних знань [6]. До особливостей STEM-освіти при підготовці інженерів, належать:

- забезпечення розвитку фахових компетенцій, що сприяють формуванню творчих і технічних здібностей, продуктивного та критичного мислення;
- розвиток інтелектуальних здібностей та мотивації до розвитку інженерних здібностей;
- поглиблення знань здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей із природничо-математичних дисциплін;
- залучення майбутніх інженерів до науково-дослідної діяльності;
- розвиток інженерно-технічного мислення;
- формування уявлень про властивості й відносини об'єктів довкілля, особливості природи, різноманіття технічних можливостей країн світу тощо.

Провідним завданням майбутнього інженера є здатність навчатись та сприймати зміни, а не самі знання, частина яких нині стає застарілою. STEM-підхід дозволяє виховати гнучкість та критичне, практично орієнтоване мислення. У розрізі впровадження елементів STEM-освіти при підготовці майбутніх інженерів в умовах інформаційно-освітнього середовища необхідно виконати проєкт щодо створення конструктивного вдосконалення певної інженерної конструкції. Для виконання проєкту необхідно мати знання з наступних дисциплін: інженерна та комп'ютерна графіка, механіка матеріалів і конструкцій, теоретична механіка, теорія механізмів і машин, технологія

виробництва продукції, машини та обладнання, володіти навичками математичного моделювання та аналізу, мати досвід роботи з програмним забезпеченням: AutoCAD, MathCAD, MicrosoftOffice, Outlook [7].

Отже, впровадження STEM-освіти в систему підготовки майбутніх інженерів в інформаційно-освітньому середовищі сприяє формуванню інженерно-творчого мислення та набуттю професійної компетентності. STEM-освіта в системі підготовки майбутніх інженерів є одним із сучасних напрямків розвитку української системи освіти. В інформаційно-освітніх умовах це дає можливість реалізувати інтегрований підхід до навчання для розвитку професійних компетенцій. Зараз завдання майбутнього інженера – це вміння вчитися впродовж життя і сприймати зміни.

***Анотація.** В статті розглядається застосування STEM-освіти при підготовці здобувачів технічної освіти. Проаналізовано поняття STEM-освіти, мета та спрямованість навчання на інтеграцію змісту і методології природничих наук, технологій, інженерії та математики і логічного мислення у співпраці та дослідженнях.*

***Ключові слова:** STEM-освіта, технічна освіта, здобувачі вищої освіти*

Література

1. Кабінет Міністрів України. Розпорядження від 2020 р. Про схвалення Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти). STEM-освіта. Інститут модернізації змісту освіти. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://imzo.gov.ua/stem-osvita/>.
2. Мартинюк О. О. STEM-технології як засіб формування інформаційно-цифрової компетентності вчителів та учнів. Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Серія: Педагогічна. – 2018. - Випуск 24. - С. 18-22.
3. Стрижак О. Є., Сліпухіна І. А., Полісун Н. І., Чернецький І. С.. STEM-освіта: основні дефініції. Інформаційні технології і засоби навчання, том 62, №6, С.16-33, 2017. Методичні рекомендації щодо розвитку STEM-освіти у закладах загальної середньої та позашкільної освіти у 2019/2020 навчальному році. Лист ІМЗО № 22.1/10-2876 від 22.08.19 року. [Електронний ресурс]. Доступно: http://ru.osvita.ua/legislation/Ser_osv/65463/.
4. Шулікін Д.. STEM-освіта: готувати до інновацій. Освіта України, №26 (1437). С. 8-9. 29 червня 2015 року.
5. Олійник В. В., Самойленко О. М., Бацуровська І. В., Доценко Н. А.. Інформаційні технології і засоби навчання, 2020. - Том 80. - №6. - С.131.

МОДЕЛЮВАННЯ РЕФЛЕКСИВНОЇ ГРИ

Ситуація, коли кожна з протидіючих сторін, тобто, сторін конфлікту займає позицію, несумісну і протилежну по відношенню до інтересів іншої сторони. Конфлікт - особлива взаємодія індивідів, груп, об'єднань, яка виникає при їх несумісних поглядах, позиціях і інтересах.

У конкретних задачах дослідження операцій діяльність конфліктуючих сторін не розглядається як особливий вид людської діяльності, і конфлікт як такий виступає лише як фон, на який проектується дії сторін.

У математичній теорії ігор ми маємо справу з аналогічною постановкою завдання. Чи йде мова про реального противника, або сторона конфлікту представлена природою, предметом вивчення залишається вибір стратегії, вибір поведінки.

Рефлексивна гра - процес соціальної взаємодії, в ході якого кожен з учасників гри, виходячи зі своєї інформованості, здійснює рефлексивне управління іншими учасниками, намагаючись реалізувати наявну у нього стратегію для формування власного варіанту дійсності.

Рефлексивна гра відноситься до ігор відкритого типу, тобто вона являє собою процес соціальної взаємодії, в якому ролі, правила і сюжетні ходи генеруються учасниками прямо по ходу ігрової дії.

Як визначено вище, рефлексивною є гра, в якій інформованість гравців не є загальним знанням. І гравці приймають рішення на основі ієрархії своїх уявлень. З точки зору теорії ігор і рефлексивних моделей прийняття рішень доцільно розділяти стратегічну і інформаційну рефлексію.

Інформаційна рефлексія - процес і результат роздумів гравця про те, які значення невизначених параметрів, що про ці значення знають і думають його опоненти. При цьому власне «ігрова» компонента відсутня, так як ніяких

рішень гравець не приймає. Стратегічна рефлексія - процес і результат роздумів гравця про те, які принципи прийняття рішень використовують його опоненти в рамках тієї інформованості, яку він їм приписує в результаті інформаційної рефлексії.

Надалі ми будемо розглядати саме стратегічну рефлексію.

Виявляється, що якщо припустити, що гравець, моделюючи поведінку опонентів, приписує їм і собі певні ранги рефлексії, то вихідна гра перетворюється в нову гру, в якій стратегією гравця є вибір рангу рефлексії.

Для опису логіки рефлексивних ігор скористаємося тим основним фактом, що конфліктуючі сторони відтворюють міркування один одного.

Позначимо гравців через X і Y . Нехай $\bar{X}$ означає « X думає» і $\bar{Y}$ - « Y думає». Якщо X може імітувати міркування Y або, що те ж саме, якщо його ранг рефлексії вище, то це можна записати як $\bar{Y}\bar{X}$ « X думає, що Y думає» (стрілка означає порядок читання). Якщо ж Y може проімітувати X , який відтворює міркування Y , то, очевидно, це може бути записано таким чином:

$\bar{X}\bar{Y}\bar{X}$ « Y думає, що X думає, що Y думає»

Зрозуміло, що такий ланцюжок може бути продовжена вліво і символ, що стоїть першим справа, вказує на потенційного переможця.

Запропонований тут спосіб записи є найбільш загальним і найбільш простим для опису самого факту рефлексії. Однак це не дуже зручно і недостатньо для нашої головної мети: описати процес прийняття рішення. Тому спробуємо інакше зобразити рефлексивне взаємодія сторін.

Розглянемо вихідну ситуацію, коли противники приймають рішення, не імітуючи міркування один одного. Цей випадок, коли ранги рефлексії дорівнюють нулю, нам знадобиться, щоб описати найпростішу процедуру прийняття рішення.

Уявімо собі об'єктивну обстановку як деякий плацдарм, на якому розгортаються події і який позначимо літерою P . Нехай це буде, наприклад, кілька населених пунктів, в які гравцеві X потрібно завезти вантажі одним рейсом вантажівки, тобто перед X стоїть завдання вибору оптимального

маршруту. Плацдарм П відображається на особливий планшет Пх, яким володіє Х. Очевидно, що відображення плацдарму П може бути вироблено з різною точністю. Але Х оперує з Пх, а не з П; це треба запам'ятати, тому що рішення, яке він прийме, буде пов'язане з Пх і лише потім переведено на реальний плацдарм П. Гравець Х має мету - Мх. У нашому прикладі мета полягає в тому, щоб оптимально перевезти вантажі з вихідного пункту А в усі інші пункти. Щоб прийняти рішення, в результаті якого мета буде досягнута, Х повинен зробити певні операції на своєму планшеті.

Припустимо, що Х володіє яким-небудь методом вирішення завдання, наприклад спеціальною програмою. Цей метод ми назвемо доктриною і позначимо Дх. Використовуючи Дх, гравець Х знаходить найкоротший маршрут. Цей маршрут наноситься на планшет Пх і є рішенням задачі - Рх.

Процедура прийняття рішення гравцем Х може бути зображена наступним чином:

- 1) Реальна обстановка «перекладається» на планшет Пх.
- 2) Мета особливим чином співвідноситься з планшетом, можна сказати, що мета «наноситься» на планшет.
- 3) До планшету з нанесеною на нього метою застосовується доктрина Дх
- 4) У результаті цієї операції виробляється рішення, віднесене до планшета Пх:

$$\frac{M_x}{P_x} D_x \rightarrow \frac{R_x}{P_x} \quad (1)$$

Вираз (1) є дуже загальним, і за описаною схемою приймаються рішення в найрізноманітніших конфліктних ситуаціях, коли гравці не імітують міркувань один одного.

Повернемося тепер до супротивника - гравця У, і розглянемо процес прийняття рішення, коли У може імітувати рішення Х, тобто до схеми. У нашому прикладі У бажає оволодіти вантажівкою, яка перевозить вантажі Х, і повинен організувати засідку. Ніякої інформації про маршрут, обраний Х, у У

немає. Для того, щоб прийняти рішення, що забезпечує успіх, Y повинен проімітувати міркування X і виконати процедуру (1).

Звернемо увагу на одну важливу обставину: Y не володіє Px. Він володіє тим, що можна назвати «планшет Px з точки зору Y». Це вже вторинне відображення реального плацдарму і при цьому, очевидно, можуть з'явитися істотні відмінності від Px. Гравець Y не володіє також Mx і Dx; він має в своєму розпорядженні лише «Mx з точки зору Y» і «Dx з точки зору Y». Приймавши відповідні позначення Pxy, Mxy, Dxy і Rxy, ми можемо записати імітацію Y міркування X наступним чином:

$$\frac{M_{xy}}{P_{xy}} D_{xy} \rightarrow \frac{R_{xy}}{P_{xy}} \quad (2)$$

І тільки після р того як Y отримав $\frac{R_{xy}}{P_{xy}}$, він повинен перевести це рішення на свій власний планшет Py:

$$\frac{R_{xy}}{P_{xy}} \rightarrow \frac{R_{xy}}{P_y} \quad (3)$$

Тепер Y повинен нанести на свій планшет свою мету, застосувати свою доктрину і виробити рішення. Зображуючи цей процес в прийнятих позначеннях, одержимо:

$$\frac{R_{xy}}{P_y} \rightarrow \frac{R_{xy} M_y}{P_y} D_y \rightarrow \frac{R_y}{P_y} \quad (4)$$

Об'єднавши вирази (2), (3) і (4), запишемо процес прийняття рішення з імітацією за схемою XY, як

$$\frac{M_{xy}}{P_{xy}} D_{xy} \rightarrow \frac{R_{xy}}{P_{xy}} \rightarrow \frac{R_{xy}}{P_y} \rightarrow \frac{R_{xy} M_y}{P_y} D_y \rightarrow \frac{R_y}{P_y} \quad (5)$$

У цьому прикладі X зазнає поразки, оскільки Y вдалося проімітувати міркування X. Так як X не має Pxy, Mxy і Dxy, а має «Pxy з точки зору X», «Dxy з точки зору X» і «Dxy з точки зору X», то, приймавши відповідні позначення Pxyx, Mxyx і Dxyx, можна записати процес вирішення з подвійною імітацією (за схемою) наступним чином:

$$\frac{M_{xyx}}{P_{xyx}} D_{xyx} \rightarrow \frac{R_{xyx}}{P_{xyx}} \rightarrow \frac{R_{xyx}}{P_{xyx}} \rightarrow \frac{R_{xyx} M_{yx}}{P_{yx}} D_{yx} \rightarrow \frac{R_{yx}}{P_{yx}} \rightarrow \frac{R_{yx}}{P_x} \rightarrow \frac{R_{yx} M_x}{P_x} D_x \rightarrow \frac{R_x}{P_x} \quad (6)$$

У виразі (6) легко проглядається загальний рекурентний закон, за яким можна отримувати формули для будь-яких рангів рефлексії.

Співвідношення (1) - (6) ми вивели, припускаючи, що мета незалежна від зображення плацдарму на планшеті. У багатьох випадках мета визначається в результаті оперування з планшетом. Тоді вираз (1) запишеться наступним чином:

$$P_x \rightarrow M_x \rightarrow \frac{M_x}{P_x} D_x \rightarrow \frac{P_x}{P_x} \quad (1')$$

Уявімо тепер якогось зовнішнього спостерігача, перед яким розгортається рефлексивна гра. Чи може він уявити собі загальну картину цього конфлікту? Очевидно, для цієї мети потрібний логічний апарат, спеціально призначений для відображення рефлексивного взаємодії.

Покажемо, що незначний розвиток щойно розглянутого способу зображення імітованих рішень задовольняє цій вимозі.

Отже, наш спостерігач бачить перш за все двох гравців X і Y і реальний плацдарм з ударними силами гравців. На цьому плацдармі протікає фізична взаємодія гравців. Домовимося гравців X і Y зображати у вигляді наступних символічних сум:

$$X = \Pi + (P_x, M_x, D_x, R_x); \quad Y = \Pi + (P_y, M_y, D_y, R_y); \quad (7)$$

Безглуздо відривати гравця від реального плацдарму, навпаки, плацдарм Π зручно представити у вигляді «тіла» гравця T, вважаючи, що відображення тіла відбувається в його голові.

Позначивши $\Pi = T$, $(P_x, M_x, D_x, R_x) = T_x$ і $(P_y, M_y, D_y, R_y) = T_y$, ми спростимо символічні суми:

$$X = T + T_x; \quad Y = T + T_y \quad (8)$$

Загальна сума

$$\Omega = T + T_x + T_y$$

Тепер неважко збагнути, що якщо X імітує міркування Y, тобто приймає рішення по схемі, то йому необхідно додатково відобразити T_y .

Загальне правило формування рефлексивних елементів полягає в наступному: відображенню рангу i відповідає сума елементів, що знаходяться в рангу $i-1$, з доданим індексом гілки.

$$\Omega = T + T_x + T_y + T_{yx} + T_{xx}$$

Описаний тут механізм дозволяє зображати які завгодно складні і заплутані рефлексивні структури за допомогою сум типу:

$$\Omega = T + \sum_i^2 T_{xi} + \sum_i^2 \sum_j^2 T_{xjxi} + \sum_i^2 \sum_j^2 \sum_k^2 T_{xkxjxi} + \dots \quad (9)$$

де $x_1 = x, x_2 = y$, причому будь-яка підмножина доданків може бути відсутньою за винятком доданка T .

Виникає питання: як слід інтерпретувати елементи типу T_{xxx} , T_{yxx} , T_{xx} , тобто ті, в яких один індекс зустрічається поспіль два і більше разів в кінці послідовності індексів? Ці елементи можна інтерпретувати як такі, що керують процесом відображення нижчого рівня. У T_{xx} виробляються рішення, які реалізуються в T_x . Ми бачили вище, що в T_x виробляються рішення, реалізовані на реальному плацдармі. Природно впливає закон дистрибутивності щодо правого індексу:

$$T_{xxx} + T_{yxx} = (T_{xx} + T_{yx})x = (T_x + T_y)xx \quad (10)$$

В загальному випадку важко вказати формальні схеми процедур прийняття рішення для більш складних випадків, ніж

$$X = T + T_x + T_{yx} + \dots + T_{yx} \dots yx \quad (11)$$

Однак принципово можливо уявити будь-якого гравця у вигляді суми рефлексивних елементів і привести цю суму відповідно до правил цієї своєрідної алгебри до вигляду, зручного для аналізу. Це дозволяє характеризувати по суті ті рішення, які повинні бути прийняті в результаті оперування цими елементами.

Першою і найпростішою операцією над сумами виду (9) є операція *виділення підстав* для прийняття рішень. Нехай гравець X зображений у вигляді суми

$$X = T + T_x + T_{yx} + T_{xyx}, \text{ або } X = T + (T + T_y + T_{xy})x \quad (12)$$

Все, що знаходиться в дужках, усвідомлено X , і, аби уявити внутрішній світ гравця, ми повинні виділити

$$T + T_y + T_{xy}.$$

Це досягається наступною операцією над виразом (12):

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(T + T_x + T_{yx} + T_{xyx}) = T + T_y + T_{xy} \quad (13)$$

Зауважимо, що ми користуємося чисто зовнішніми аналогіями, вживаючи символіку математичного аналізу. Просто ті операції алгебри, які пов'язані з описом рефлексивних процесів, нагадують формули інтегрування і диференціювання многочленів. Ніякого «кількісного» сенсу ця символіка не має.

Вираз (13) являє собою символічний запис гравця Y з точки зору X . Цей вираз таким же чином може бути «продиференційовано» і можуть бути отримані підстави, якими користувався Y при ухваленні рішення (з точки зору X). Так як

$$T + T_y + T_{xy} = T + (T + T_x) y,$$

отримуємо:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} = T + T_x \quad (14)$$

З позиції зовнішнього дослідника, вираз (14) може бути інтерпретовано як підставу для прийняття рішення гравцем Y з точки зору X :

$$(T + T_x)_{yx} \quad (15)$$

Ми показали конфлікт у вигляді символічного многочлена. Домовимося тепер, що замість членів виду T_{xxx} або T_{xyy} писатимемо $T_x^2 y^2$. Зауважимо, що в нашій алгебрі «множення» не коммутативно, тобто $T_{xy} \neq T_{yx}$. Дійсно, лівий елемент інтерпретується як T_x з точки зору Y , а правий елемент - як T_y з точки зору X , і зміст, вкладений в ці члени, різний. Є ще одна істотна відмінність цієї алгебри від «звичайної». Один доданок може бути повторено довільне число разів, наприклад,

$$T + T_x + T_x + T_x = T + T_x$$

Це правило є природнім, оскільки при репродукування будь-якого «тексту» не виникає нової інформації. Байдуже, що має гравець - один елемент T або три.

Будь-яку суму, яка зображує рефлексивну взаємодію двох гравців, з позиції зовнішнього дослідника можна представити у вигляді

$$\Omega = T + \Omega_x + \Omega_y \quad (16)$$

де Ω_x і Ω_y - деякі суми, які виражають відповідно підстави рішень гравця X і гравця Y . Загальне правило виявлення підстав таке:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \Omega_x \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \Omega_y \quad (17)$$

За допомогою цих операцій дослідник як би витягає або запозичує картини, що лежать перед гравцями.

У загальному випадку многочлени Ω_x і Ω_y можуть бути приведені до вигляду (16) і в свою чергу піддані операції диференціювання. Другі похідні і похідні вищих порядків визначаються аналогічно правилу (17).

Це правило легко узагальнюється і переноситься на випадок багатьох гравців.

Виходячи з (11) та (12), та використовуючи формули (16) та (17) ми можемо знайти деякі чисті та, в деякому сенсі, універсальні механізми мислення гравців.

Це дає відразу дві переваги: по-перше, стає зрозумілим логічне підґрунтя прийнятих рішень, по-друге, створюються сприятливі умови для самостійного дослідження конфлікту.

Рефлексивний аналіз дозволяє отримати також логічне обґрунтування деяких теоретико-ігрових принципів. Як відомо, велика частка результатів теорії ігор отримана на основі принципу максиміна.

Цей принцип диктує вибір такого рішення, при якому забезпечується гарантований результат: вибирається стратегія, яка веде до *найкращого з найгірших результатів*.

Розглянемо гравця X , який представлений сумою виду:

$$X = T + (T + T_y)x + (T_x + T_{xy})x + (T_{yx} + T_{xyx})x + \dots + (T_\alpha + T_{\alpha y})x \quad (18)$$

де α - деяка послідовність індексів x і y . У кожному «кадрі», на які розбита сума (18), елемент, що належить X , відбивається в елементі, що належить гравцеві Y . Гравець має таку модель противника, що будь-яка думка X (з його точки зору) імітується Y , який, виходячи з результату імітації, і приймає рішення. Така модель, природно, віддає перевагу «найменш згубній думці». Гравець X буде керуватися тією стратегією, свідомо знаючи яку, і прийнявши найкраще рішення, гравець Y завдасть X найменшої шкоди. А це і є принцип максимина. Таким чином, вираз (18) являє собою вихідну логічну форму, яка породжує один з основних принципів теорії ігор.

Інша схема міркування, заснована на уявленні про домінування над противником, призводить до інших причин для прийняття рішення. Нехай гравець X зображується сумою

$$X = T + (T + T_x)x + (T_y + T_{yx})x + (T_{xy} + T_{xyx})x + \dots + (T_{\alpha y} + T_{\alpha yx})x \quad (19)$$

У цьому виразі в кожному кадрі-доданку елемент, що належить Y , відбивається в елементі, що належить гравцеві X , а не навпаки, як у виразі (18). Будь-яка думка, яка прийшла в голову Y , імітується гравцем X (з точки зору X). В цьому випадку гравець X може прийняти оптимальне рішення, розглядаючи свого супротивника як своєрідну «інтелектуальну» природу, на яку X може впливати. Ця схема міркування породжує принцип, який можна назвати принципом переваги.

Для кінцевого числа елементів суми виду (18) і (19) не перекладається одна з одною. Це означає, що рефлексивне зображення гравців може бути використано для визначення того, який принцип використовується гравцем.

Можна визначити, яким принципом слід користуватися, якщо ми маємо загальну інформацію про розмірковування гравців, які можна схематизувати у вигляді кінцевої суми. Ці міркування можуть принести користь не лише теоретикам ігор, але й дослідникам операцій, економістам, психологам та

іншим фахівцям, що мають справу з прийняттям рішень при рифлексивній поведінці.

Література

1. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения. «Лань», 2010. – 446 с.
2. Смолян Г. Л. Исследование операций – инструмент эффективного управления. М., «Знание», 1967. – 46 с.
3. Льюс Р. Д, Райфа Х. Игры и решения М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 642 с.
4. Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексивные игры «Синтег» 2003. – 160 с.
5. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. – 708 с.

ПРИНЦИПИ І МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ В БАГАТОРІВНЕВІЙ СИСТЕМІ ВИЩОЇ ОСВІТИ : СУЧАСНИЙ ТА ІСТОРИЧНИЙ ПОГЛЯД ЗДОБУВАЧІВ І МОЛОДИХ ВЧЕНИХ

**Матеріали Всеукраїнської науково-практичної
конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених**

07-08 квітня 2022 року

Відповідальний за випуск *Ємельянова Т.В.*

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка *Купіної Н.А.*

Підписано до друку _____ р. Формат 60×84 1/16.

Гарнітура Times New Roman Сут .

Ум. друк. арк.18,6. Обл.-вид. арк. 20,3.

Зам. № _____. Наклад _____ прим.

ВИДАВНИЦТВО

Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61200, Харків-МСП, вул. Ярослава Мудрого, 25.

Тел. /факс: (057)700-38-72; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

*Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення
та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції, серія № ДК №897 від 17.04 2002 р.*

