

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ
УНІВЕРСИТЕТ

КЛАСИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ СПАДКОЄМНОЇ
МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ У ЗВО : ІСТОРИЧНИЙ ТА
СУЧАСНИЙ ПОГЛЯД МОЛОДИХ ВЧЕНИХ І ЗДОБУВАЧІВ
ВИЩОЇ ОСВІТИ

***Матеріали Всеукраїнської науково-практичної
конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених
08-09 квітня 2021 року***

Харків
ХНАДУ
2021

Редакційна колегія:

КИРИЧЕНКО Ігор Костянтинович - доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики ХНАДУ (Україна).

ЯРХО Тетяна Олександрівна – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики ХНАДУ (Україна).

Всеукраїнська науково-практична конференція здобувачів вищої освіти і молодих вчених проведена згідно з планом проведення міжнародних, всеукраїнських та науково-методичних конференцій та семінарів ХНАДУ у 2021 році (лист ІМЗО України № 22.1/10-83 від 19.01.2021 р.).

Відповідальний редактор:

ЄМЕЛЬЯНОВА Тетяна Вікторівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики ХНАДУ (Україна).

Класичні та прикладні аспекти спадкоємної математичної підготовки у ЗВО : історичний та сучасний погляд молодих вчених і здобувачів вищої освіти : матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених. – Харків: ХНАДУ. – 2021. – 320 с.

В збірку включені матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених, в яких розглянуто науково-педагогічна діяльність видатних вчених в галузі фундаментальних досліджень, новітні математичні та методичні підходи у вивченні природничо-математичних дисциплін, фундаментальні основи розв'язання професійно-прикладних задач.

Збірник матеріалів розраховано на студентів, магістрів, аспірантів і фахівців, діяльність яких пов'язана з науково-дослідною роботою в різних галузях сучасної науки і освіти. Він може бути корисним методистам, викладачам середніх і вищих навчальних закладів, аспірантам та стажерам.

© Харківський національний
автомобільно-дорожній
університет, 2021

ЗМІСТ

НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ ВИДАТНИХ ВЧЕНИХ В ГАЛУЗІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

<i>Абрамов В. О.</i> Піфагор і його вчення про числа	7
<i>Бережная А. С.</i> Карл Пирсон – великий прикладной математик	11
<i>Бондаренко Д. В.</i> Математичні проблеми тисячоліття	15
<i>Бородатий Д. Г., Кольвах Д. В.</i> Винахідницька спадщина Олександра Засядько.....	19
<i>Гриднев Е. А.</i> Вклад Леонарда Эйлера в математику	23
<i>Дымов М. А.</i> Коши – основатель математического анализа	26
<i>Дяченко М. В.</i> Марія Гаєтана Аньєзі	30
<i>Зайцева Т. А.</i> Науково-педагогічна діяльність професора С.Ф. Шишканової в галузі фундаментальних досліджень.....	34
<i>Злоткіна А. С.</i> Теорія Галуа.....	37
<i>Ковалівська А.А.</i> Відкриття неевклідової геометрії	41
<i>Криворучко Є.В.</i> Життя та наукові досягнення провідного німецького філософа, логіка, фізика, математика Г. В. Лейбніца	46
<i>Кулинцова В. А.</i> Андрей Колмогоров – математический гений XX века....	50
<i>Латышева К. А.</i> Научно-педагогическая деятельность Владимира Андреевича Стеклова.....	53
<i>Раменская А. С.</i> Золотые числа математики в философии	57
<i>Раменская А. С.</i> Прогрессивные идеи научных трудов Лобачевского	61
<i>Родіна Е. К.</i> Моделі геометрії М. І. Лобачевського	65
<i>Сердюк О. В.</i> Ретроспективний аналіз розвитку математичної логіки	69
<i>Сльота О. Л.</i> Історичні аспекти розвитку механізації сільського господарства на Полтавщині.....	72
<i>Собчук Б. В.</i> Вклад Огюстена Луї Коші в теорію пружності і оптику.....	76
<i>Сусліченко К. С.</i> Архімед – засновник математичної фізики	80
<i>Трошечко В. В.</i> Аксиоматичний метод: етапи становлення	84
<i>Хлебко С. В.</i> Розвиток аналітичної геометрії у XVII сторіччі	88
<i>Цись Я. В.</i> Єгипетські дробі	92
<i>Шишканова Г. А.</i> Науково-педагогічна діяльність професора А. Б. Ройтмана в галузі фундаментальних досліджень	97
<i>Яценко Н. В.</i> Теорема про чотири кольори	100

НОВІТНІ МАТЕМАТИЧНІ ТА ПЕДАГОГІЧНІ ПІДХОДИ У ВИВЧЕННІ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

<i>Андріжейко К. О.</i> Впровадження основних принципів комбінаторики при розв'язанні класичної задачі про число способів розбиття на групи	105
<i>Афанасенко К. В.</i> Формування вмінь самостійної роботи учнів	109
<i>Бугайов Б. С.</i> Вплив позакласного часу на учнів під час навчання математики в закладах середньої освіти	115

Бутенко Л. П. Розрахунок ймовірнісних характеристик професійно-прикладної задачі управління за темою «Системи масового обслуговування»	119
Вовк В. Ю., Собко Е. Р. Розрахунок пристосувань для заміни Сайлент-блоків із застосуванням методу скінченних елементів	123
Вовчанчина Т. І. Особливості використання STEM-технологій в навчанні природничо-математичних наук	126
Гаран І. О. Використання множників підсумовуваності при вивченні збіжності рядів	130
Гетало Д. І. Обчислення граничних ймовірностей станів професійно-прикладних задач будівельної галузі економіки.....	134
Ільїна Я. О. Застосування конгруенцій до розв'язування олімпіадних задач	139
Коленко Н. Д., Обихвост Р. В. Дослідження особливих випадків кола дев'яти точок	143
Конотоп К. А. Перше знайомство з листом Мебіуса як функторіальним простором	146
Ламдаїні Абделлатіф Моделювання динаміки гідропривода рульового керування колісного трактора	150
Лємєшев В. С., Неделько Я. О. Дослідження проблем, пов'язаних з деякими особливими точками кола	155
Морозова С. Ю. Перше знайомство школярів з операцією склеювання просторів	158
Никишина Ю. Д. Математика в исследовании загадок пирамид Египта ...	161
Палагута А. М. Аналіз вибраних алгоритмів пошуку оптимального маршруту в мережі	165
Петрович М. Б. Можливості навчання геометрії Лобачевського в школі	169
Потапська Б. В., Сторожук В. В. Використання solidworks simulation для аналізу напруженого стану деталей	172
Сергєєв О. В. Використання диференціальних рівнянь для вибору правильної стратегії в теорії ігор	175
Степура І. В. Багатоосновні алгебри як інтегруючий навчально-методичний конструкт для курсів дискретної математики	178
Цимбалюк А. О. Формування основних геометричних понять шкільного курсу математики засобами метричної геометрії	182
Червінська К. С. Про формування алгоритмічної культури учнів при вивченні основ теорії подільності в позакласній роботі	186
Шепелинська Г. П. Моделі як засіб дослідження математичних фактів ...	190

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОФЕСІЙНО-ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Афанасьєва Я. А. Мультиномиальное тождество и его приложения	194

Бабасва А. О., Соколова Г. О. Про дискретне моделювання управління технологічним процесом	198
Бабакова В. Р. Волинцев О. М., Математична модель управління персоналом на вітчизняному підприємстві	200
Бондар В.В. Математичні моделі фізичних процесів та розв'язання їх операційним методом	203
Вороновський Д. В., Шевченко Д. М. Застосування стохастичної методології у розрахунках надійності будівельно-дорожніх машин	207
Гаврилюк А. В. Математичні методи обробки результатів вимірювань	215
Ганбат Н. , Клячко М. М. Розробка тестових питань з розділу «Елементи теорії множин»	219
Даценко Є. В., Тригуб В. В. Побудова квадратичної інтерполяційної формули залежності середньої урожайності люцерни від глибини зрошення засобами MS Excel	224
Девочко О. А. Відсоткова ставка Національного банку України як інструмент грошово-кредитної політики	228
Дущенко О. С. Розв'язування математичних завдань на заняттях з програмування майбутніми вчителями інформатики і математики	233
Дяденчук А. Ф., Халакчук Л. В. Впровадження технології візуалізації фізичних задач при підготовці здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей	237
Жушман В. В. Сучасні методи розв'язання класичних задач механіки деформованого.....	240
Карпішен Б. С. Нечітка логіка як основа прийняття рішень у сучасних автомобільних системах управління	244
Кушнір Д. В. , Герасименко Р. П. Аналіз математичної моделі залежності експлуатаційних показників універсально-просапних тракторів від різних видів польових робіт.....	250
Лисова О. В. Решение одного матричного уравнения второй степени.....	255
Миронов Г. Д. Задача оптимального управления подготовкой к экзамену.....	259
Михайленко М. В. Схема застосування лінійного регресивного аналізу для детермінованої незалежної величини	261
Мовсесян В. Ю. Розробка чат-бота як засобу контролю навчальних досягнень студентів	266
Могильницький М. В. Фотовідеотехніка як засіб фотограмметричних і лабораторних досліджень в виробничій практиці та навчальному процесі різних рівнів	270
Носатов И. В. Операторные уравнения в нормированном пространстве с весом	274
Пимонов Є. І. Квадратична апроксимація функції за її експериментальними значеннями.....	277
Плиско В. С. Аналіз методів цифрової обробки зображень в процесі керування транспортними потоками.....	280

Соколов А. А. Реализация метода прямой схемы на примере одной возмущенной задачи оптимального управления.....	284
Татаринцев В. Ю. Условия существования явления пограничного слоя для решений задачи Коши в специальном случае	288
Чабанов І. О. Використання елементів теорії графів для моделювання мережевої взаємодії підприємств транспорту	292
Шиян В. О. Асимптотичне зображення матриці імпульсних перехідних функцій нестационарної системи автоматичного керування	295
Штеренберг Й. Э. Об устойчивости уравнения при простой паре чисто мнимых корней характеристического уравнения	299
Щербініна Ю. В., Харченко С. Д. Про вибір параметрів при моделюванні введення карантинних заходів	302
Щербініна Ю. В., Харченко С. Д. З досвіду розробки тестів в оболонці Moodle	307
Яременко С. О., Мурашко Н. М. Випресування та контроль запресовування запірного кільця півосі	315

НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ ВИДАТНИХ ВЧЕНИХ В ГАЛУЗІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Абрамов В. О. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – док. Вишневецький О. Л.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

ПІФАГОР І ЙОГО ВЧЕННЯ ПРО ЧИСЛА

Багато дивних легенд дійшло до наших днів про народження Піфагора. Деякі з них стверджують, що він не був звичайною людиною, а був одним з богів, які взяли людську подобу для того, щоб увійти в світ і вчити людську расу. Піфагор був одним з багатьох мудреців і рятівників давнини, за ким закріпилася репутація бездоганного у всьому. У своєму «Апокаліпсисі» Годфрі Хіггінс пише: «Першою дивною обставиною в історії Піфагора при порівнянні її з життям Ісуса було те, що вони були уродженцями однієї і тієї ж місцевості. Піфагор народився в Сидоні, а Ісус у Віфлеємі, обидва міста в Сирії. Батько Піфагора, як і батько Ісуса, був пророчо сповіщений про те, що у нього народиться син, який з'явиться благодійником людства. Обидва народилися в той час, коли їхні батьки були поза домом. Йосип і його дружина були на шляху до Віфлеєму для сплати податків, а батько і мати Піфагора подорожували з Самоса, своїй резиденції, в Сидон у справах.

Принаймні відомо, що цей знаменитий філософ народився між 600 і 590 рр. до Н.Х. і жив близько ста років.

Вчення Піфагора говорить про те, що він був чудово знайомий зі змістом східних і західних езотеричних шкіл. Він жив серед євреїв і багато дізнався від рабинів про таємні традиції Мойсея, законодавця Ізраїлю. Згодом школа Есеев була присвячена здебільшого інтерпретації піфагорейських символів. Піфагор був ініційований в єгипетські, вавилонські, халдейські Містерії. Хоча багато хто вважав його учнем Зороастра, сумнівно, щоб його вчителем був боголюдина, якого шанували

перси. Хоча дані про його подорожах розходяться між собою, історики згодні в тому, що він відвідав багато країн і вчився у багатьох учителів.

«Після ознайомлення з усім, що він міг отримати від грецьких філософів, будучи, по всій ймовірності, присвячений в Елевсінські Містерії, він поїхав до Єгипту, де нарешті досяг успіху в ініціації в Містерії Ісиди, удосконаленої жрицями Фів. Потім цей безстрашний направив свої стопи до Фінікії і Сирії, де був посвячений у Містерії Адоніса, і, зумівши перетнути долину Євфрату, він перебував досить довго у халдеїв, щоб перейняти їх секретну мудрість. Нарешті, він зробив своє найбільшу і найбільш важливу історичну подорож через Мідію і Персію в Індустан, де він був кілька років учнем, а потім став ініційованим в браміні Елефанта і Еллори». Той же самий автор додає, що ім'я Піфагора все ще зберігається в літописах брамінів, де він фігурує як Яванчарія, тобто Іонійський Учитель.

Кажуть, що Піфагор був першою людиною, який назвав себе філософом; справді світ зобов'язаний саме йому цим терміном. До нього розумні люди звали себе мудрецями, що означало «людина, яка знає». Піфагор був набагато скромніше. Він ввів в обіг термін філософ, який визначив як «той, хто намагається знайти, з'ясувати».

Після повернення зі своїх мандрівок Піфагор заснував школу або, як її часто називають, університет в Кротоні, дорійської колонії в Південній Італії. Спочатку в Кротоні на нього дивилися скоса, але через деякий час можновладці в цьому місті вже шукали його ради в справах величезної важливості. Він зібрав навколо себе невелику групу відданих учнів, яких посвятив у глибоку мудрість, їм відкрито, а також в основи окультної математики, музики, астрономії, які розглядалися їм як трикутна підстава для всіх мистецтв і наук.

Як відомо, Піфагор говорив, що «всі речі суть числа». Якщо це положення витлумачити в сучасному дусі, то в логічному відношенні воно здається нісенітницею. Але те, що розумів під цим положенням Піфагор, - не зовсім нісенітниця. Піфагор відкрив, що число має велике значення в музиці;

про встановлену їм зв'язку між музикою і математикою нагадують досі такі математичні вирази, як «гармонічне середнє» і «гармонічна прогресія». В його уяві числа, на зразок чисел на гральних кістках або картах, володіють формою. Ми все ще говоримо про квадратах і кубах чисел, і цими термінами ми зобов'язані Піфагору. Піфагор точно так же говорив про довгастих, трикутних, пірамідальних числах і т. Д. Це були числа жмені гальки (або, більш природно для нас, числа жмені дробів), необхідні для утворення форми. Піфагор, очевидно, вважав, що світ складається з атомів, що тіла побудовані з молекул, що складаються в свою чергу з атомів, упорядкованих в різні форми. Таким чином, він сподівався зробити арифметику науковою основою у фізиці, так само як і в естетиці.

Положення, згідно з яким сума квадратів сторін прямокутного трикутника, прилеглих до прямого кута, дорівнює квадрату третьої сторони - гіпотенузи, було найбільшим відкриттям Піфагора або його безпосередніх учнів. Єгиптяни знали, що трикутник, сторони якого рівні 3, 4 і 5, є прямокутним, але, очевидно, греки першими помітили, що $3^2 + 4^2 = 5^2$ і, виходячи з цього припущення, відкрили доведення загальної теореми.

На жаль для Піфагора, ця його теорема відразу ж привела до відкриття несумірності, а це явище спростовувало всю його філософію. У прямокутному рівнобічному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює подвоєному квадрату кожного з катетів. Припустимо, що кожен катет дорівнює одному сантиметру; яка буде в такому випадку довжина гіпотенузи? Припустимо, що її довжина дорівнює m/n сантиметрів. Тоді $m^2/n^2 = 2$. Якщо m і n мають спільний множник, розділимо їх на нього. В такому випадку принаймні чи m , чи n повинно бути непарним. Але тепер врахуємо, що раз $m^2 = 2n^2$, отже, m^2 - парне і, отже, m - парне, а n непарне. В такому випадку, отже, припустимо, що $m = 2p$. Тоді $4p^2 = 2n^2$; отже, $n^2 = 2p^2$, отже n - парне, що суперечить припущенню. Тому гіпотенузу не можна виміряти дробовим числом m/n . Це доведення є, по суті, доведенням, що приводиться у Евкліда.

Це доведення говорить про те, що, яку б одиницю довжини ми не вибрали, існують відрізки, які не перебувають в точній числовому відношенні до цієї одиниці, точніше, що немає таких двох цілих чисел, при яких розглянутий відрізок, взятий m разів, дорівнював би одиниці довжини, взятої n раз (m, n – цілі числа). Це положення призвело грецьких математиків до думки, що геометрію слід розвивати незалежно від математики.

Багато досягнень, приписувані Піфагору, ймовірно, насправді є заслугою його учнів. Піфагорійці займалися астрономією, геометрією, арифметикою (теорією чисел), створили теорію музики. Піфагор перший з європейців зрозумів значення аксіоматичного методу, чітко виділяючи базові припущення (аксіоми, постулати) і теореми, що дедуктивно виводяться з них.

Геометрія піфагорійців в основному обмежувалася планіметрією (зважаючи на ті пізніші праці, що дійшли до нас) і завершувалася доказом «теореми Піфагора». Вивчалися також і правильні багатогранники.

В основі всіх законів природи, вважали піфагорійці, лежить арифметика, і з її допомогою можна проникнути в усі таємниці світу. На відміну від геометрії, арифметика у них будувалася не на аксіоматичній базі. Властивості натуральних чисел вважалися самоочевидними, однак доведення теорем тут проводили.

Література

- 1.<https://fil.wikireading.ru/10646>
- 2.Волошинов А.В. Пифагор: Союз истины, добра и красоты. - М.: Просвещение, 1993. – 224 с.
- 3.Жмудь Л.Я. Пифагор и его школа, - М.: Наука, 1990. – 193 с.
- 4.Лосев А. Миф, число, сущность, - М.: Мысль, 1994. – 224 с.
5. Перепелицин М.Л. Философский камень, - Издательство: АПКСП, 1990. – 202 с.

Бережная А. С. (студ., 1 курс)
Научный руководитель – доц. Веневитина С. С.
*Воронежский государственный лесотехнический университет
им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, Россия)*

КАРЛ ПИРСОН – ВЕЛИКИЙ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИ



Карл Чарльз Пирсон родился 27 марта 1857 года в Лондоне. Родителями его были Уильям Пирсон (успешный адвокат и сотрудник Королевского Совета) и Фанни Смит (из клана моряков).

Учился Карл в университетском колледже в Лондоне, а, окончив его, поступил в Кембриджский университет для изучения математики, где в 1879 году получил степень бакалавра. После этого Пирсон уехал на учебу в Германию, где начал изучать физику и метафизику в университете Гейдельберга. Карл был умен и талантлив и его интересовало буквально все в жизни. Он увлекался римским правом и теорией социализма, интересовался религией, изучал Священное Писание, увлеченно читал Гете, так как испытывал тягу к поэзии и средневековой литературе, он активно штудировал историю и германистику, так как тяготел к Германии. Его также не оставляли равнодушным вопросы полов. Пирсон с большим усердием знакомился с обычаями и культурой немцев. Он охотно общался с простыми людьми, с которыми вел диспуты столь же легко, как и с выдающимися учеными.

В 1880 году Пирсон возвращается в Англию. Сначала в Кембридж (где работал в инженерных мастерских), а затем в Лондон для изучения права (в 1881 году стал бакалавром права, а в 1882 году стал магистром).

Получается, что вся жизнь Карла Пирсона – это дорога непрерывного обучения, самосовершенствования и полного погружения в науку.

Но все же, он возвращается к математике, заменив профессора математики в Королевском колледже в Лондоне в 1881 году. А в 1884 году в возрасте 27 лет Карл Пирсон становится профессором прикладной математики и механики Лондонского университетского колледжа. С этого времени и до самой смерти Пирсон беспрерывно работал в стенах Лондонского университета.

В 1891 году его также назначили на должность профессора геометрии в Gresham College. Здесь он познакомился с зоологом Уолтером Фрэнком Рафаэлем Велдоном у которого были интересные проблемы, требующие количественных решений. Их сотрудничество в области биометрии и теории эволюции было необычайно плодотворным. Велдон познакомил Пирсона с Фрэнсисом Гальтоном, который стал его соавтором и коллегой в течение всего периода его карьеры. Гальтон считал Пирсона большим другом.

Вместе с Гальтоном Пирсон разработал различные теории и исследования в области евгеники, анализа генетического наследования, физики и эволюционных парадигм.

За многочисленные труды по математической теории эволюции и наследственности Пирсону в 1898 году была присвоена медаль им. Дарвина Королевского общества евгеники, членом которого Пирсон стал в 1896 году, а в 1903 году - медаль Хаксли Антропологического института.

С 1903 по 1933 годы Пирсон занимал пост директора биометрической лаборатории. Карл Пирсон удостоен звания профессора евгеники в 1911 году.

Большой заслугой этого ученого является основание в 1900 году журнала «Биометрика» о применении статистических методов в биологии, изданием которого Пирсон руководил в течение 36 лет вплоть до самой смерти. В 1925—1926 годах Пирсон издавал «Ежегодник евгеники».

Рождение биостатистики - главный вклад Карла Пирсона в науку. Это вывод математической статистики, которая может быть применена к таким областям, как медицина, биология, экология, здравоохранение и исследования биологического наследования.

Создание многочисленных лекарств и понимание различных болезней во многом обязаны их биостатистике.

Хочется отметить необычайную работоспособность Пирсона. Короткие летние каникулы, которые Карл проводил в деревенском домике, он тоже посвящал любимой науке, и работал там столь же интенсивно, как и в своем городском кабинете. Во время летних каникул он написал свой монументальный труд «Жизнь, письма и работы Френсиса Гальтона».

Другой важной областью исследования для Пирсона была психометрия, функция которой заключается в проведении тестов, которые служат для количественного измерения качеств индивидуума.

Таким образом, формируются результаты, которые могут быть полезны для многих вещей. Это служит, среди прочего, поиском подходящего кандидата на определенную должность в компании.

Психометрия также используется для выявления таланта или в качестве потенциального диагноза, чтобы можно было распознать наиболее многообещающих людей в определенной области.

Этот выдающийся ученый верил и защищал евгенику. Он был убежден, что бедность, способности, интеллект, преступность и творческий подход были унаследованы. Следовательно, они могли бы достичь совершенства, устраняя плохое и отдавая приоритет хорошему.

Взгляды Пирсона на евгенику теперь можно считать глубоко расистскими. Он открыто защищал войну против низших рас и считал это логическим следствием своей научной работы по исследованию человеческого поведения и его связи с расой и генетическим наследием.

В области математической статистики крупнейшие заслуги Пирсона состоят в разработке следующих проблем:

- развитие теории корреляции и применение ее в проблемах наследственности и эволюции видов;
- введение в науку критерия «хи-квадрат», применяемого, в частности, для сравнения результатов эксперимента с результатами, предусмотренными теоретически. Этот критерий нашел широкое применение в математической статистике;
- ведение системы кривых частоты (называемой системой кривых Пирсона) в качестве инструмента для математического описания явлений природы;
- применение в математической статистике метода моментов (впервые);
- издание таблиц для биометриков и статистиков с подробными объяснениями относительно их применения.

Пирсон опубликовал основополагающие труды по математической статистике (более 400 работ). Разработал теорию корреляции, критерии согласия, алгоритмы принятия решений и оценки параметров. С именем Пирсона связаны такие широко используемые термины и методы, как: кривые Пирсона, распределение Пирсона, критерий согласия Пирсона (критерий χ^2), коэффициент корреляции Пирсона и корреляционный анализ, ранговая корреляция, множественная регрессия, коэффициент вариации, нормальное распределение и многие другие.

Пирсон был выдающимся педагогом: он обладал редким даром ясной передачи своих знаний другим. Самым известным преемником и продолжателем его работ по прикладной математической статистике стал Рональд Эйлмер Фишер.

Карл Пирсон внёс значительный вклад в развитие математической статистики. Основная философская позиция Пирсона формулируется следующим образом: понятия науки - искусственные конструкции, средства описания и упорядочивания чувственного опыта; правила связи их в научные предложения вычленяются грамматикой науки, которая и является,

философией науки. Связать же разнородные понятия и явления позволяет универсальная дисциплина - прикладная статистика, хотя и она по Пирсону субъективна.

Бондаренко Д. В. (студ. 1 курсу)
Науковий керівник - Сіра І.Т
Харківський національний університет імені Г.С. Сковороди
(Харків, Україна)

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТИСЯЧОЛІТТЯ

На початку 20 століття знаменитий німецький математик Давид Гільберт на одній з конференцій представив світу 26 відкритих математичних проблем, що вимагають гарненько поміркувати. До кінця століття 20 з них були вирішені математиками всього світу. Останньою, до речі, була теорема Ферма, знайома багатьом з курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Новий список завдань, представлений американським інститутом Клея в 1998 році, став в кілька разів «скромніше» – всього 7 завдань – але, як видно, і набагато складніше, адже за 21 рік існування, лише одна з них була вирішена

1. Гіпотеза Пуанкаре

Область вивчення – топологія. Ця гіпотеза доведена в 2002 році російським математиком Григорієм Перельманом. Дуже часто можна зустріти й іншу назву цієї знаменитої задачі – «проблема бублика». Гіпотеза стверджує наступне: Кожен тривимірний об'єкт, що володіє деякими властивостями тривимірної сфери, зобов'язаний бути сферою з точністю до деформації. Сама ж історія вирішення цього завдання тисячоліття прямо-таки, як сюжет фільму: геніальний математик із Санкт-Петербурга на кілька років обриває всі зв'язки із зовнішнім світом, а потім тріумфально повертається з рішенням однієї з 7 завдань, назавжди заносючи своє ім'я в історію світової науки ! Що ще більш цікаво: від нагороди в 1 мільйон доларів Григорій Перельман відмовився.

2. Рівність класів P і NP

Область вивчення – теорія алгоритмів. Перед вами два класи: P і NP. P – це безліч завдань, які комп'ютер може вирішити за поліноміальний час, тобто доволі швидко. NP – це клас задач, правильність відповіді, яких можна швидко перевірити.

Для простоти розуміння ось вам приклад: у вас є по одній монеті номіналом 2, 3, 5, 6 і 7. Ваша задача - оплатити покупку без здачі на суму 21 грошової одиниці. Чи можна набрати з цих монет суму, рівну 21? Завдання вирішується методом перебору, і ось плавно ми підходимо до питання одним із завдань тисячоліття: чи рівні класи N і NP? Багато вчених упевнені в негативній відповіді, але довести свою точку зору так поки ніхто і не зміг. Тільки ось що буде, якщо виявиться, що $P = NP$? ..

3. Рівняння Нав'є-Стокса

Область – гідродинаміка. Завдання, яке може бути відома деяким по фільму «обдарованих». У вирішенні цього рівняння закладена одна з найскладніших проблем сучасної фізики – проблема турбулентності. Турбулентність хоч і є досить поширеним явищем, але до сих пір залишається майже невивченою, від чого й зовсім непередбачуваною. Крім самого рівняння, завдання ставить перед нами і таке питання: якщо відомо стан рідини в певний момент часу і характеристики її руху – чи існує рішення, яке буде вірно для всього майбутнього часу? Так що, крім проблеми турбулентності, рішення цього завдання допомогло б метеорологам робити більш точні прогнози погоди, а нам – завжди вчасно брати з собою парасольку.

4. Гіпотеза Рімана

Область – теорія чисел. Завдання, присвячена нашим улюбленим простим числам. Якщо простежити їх послідовність в загальному строю всіх чисел, то можна прийти до того, що будь-якої закономірності їх розподілу немає. Німецький математик Бернгард Ріман запропонував гіпотезу, яка стверджує, що все нетривіальні нулі дзета-функції розподілу простих чисел

лежать на прямій лінії. Гіпотеза Рімана вже була перевірена для 10 трильйонів рішень, але повний доказ ще не було підтверджено, але математики стверджують, що вже зовсім близько підійшли до вирішення цього завдання тисячоліття.

5. Гіпотеза Ходжа

Область – алгебраїчна геометрія. «На будь-якому невиродженому проектному комплексному алгебраїчних багатовидів будь-який клас Ходжа є раціональним лінійним комбінаціям класів алгебраїчних циклів». Так звучить формулювання даної гіпотези. Суть у тому: в світі нас оточують прості і складні об'єкти. І, цілком логічно, що складні об'єкти можна описати за допомогою певної кількості простих. Основна ідея гіпотези полягає в тому, щоб з'ясувати, до якої міри ми можемо наближатися до форми складного об'єкта, склеюючи разом прості тіла зростаючої розмірності.

6. Теорія Янга-Міллса

Область - фізика елементарних частинок. Фізики Янг Чженьнін і Роберт Міллс виявили зв'язок між геометрією і фізикою елементарних частинок і написали рівняння, що об'єднують теорії електромагнітного, слабкого і сильного впливу, що до цього здавалося неможливим. По суті, рівняння теорії Янга-Міллса намагаються передбачити поведінку елементарних частинок і дати загальний опис 3 з 4 фундаментальних взаємодій. Проведені експерименти повністю підтверджують висунуту теорію, однак повне обґрунтування досі так і не знайдено.

7. Гіпотеза Берча-Свіннертона-Дайера

Область - алгебраїчна геометрія. Знову. Гіпотеза пов'язана з описом алгебраїчних рівнянь 3 ступеня – еліптичних кривих – і є єдиним простим загальним способом рангу еліптичних кривих. Суть завдання така: безліч рішень еліптичної кривої пов'язано з поведінкою L-функції, яка обчислюється, як і дзета-функція гіпотези Рімана, і кількість раціональних рішень нескінченно тоді, коли функція дорівнює 0.

Наука безперервно рухається вперед, і зараз людство ставить перед собою такі завдання, які ще не так давно могли здаватися фантастикою або навіть не обговорювалися. З іншого боку, не вирішено багато завдання, поставлені сотні років назад. Наведені в доповіді невирішені проблеми математики дозволили переконатися, що про геніального і складного можна сказати дуже просто! Уже сам факт цих формулювань дозволяє людству робити серйозні кроки вперед.

***Анотація.** Як в науці, так і в житті дуже важливим є не тільки вміння вирішувати проблеми, але і їх правильна постановка. Адже саме точно сформульовані завдання і цілі дозволяють працювати в потрібному напрямку найбільш ефективно. Одним з таких прикладів, коли вірно поставлені проблеми дозволили вченим зробити в науці великий крок вперед, є список кардинальних і невирішених на той момент проблем математики, представлений на початку ХХ століття Давидом Гільбертом на II Міжнародному Конгресі математиків в Парижі. Також варто відзначити постановку важливих завдань, названих «Завданнями тисячоліття», за рішення кожної з яких інститутом Клея пропонується велике матеріальну винагороду.*

***Ключові слова.** Математик, задача, рішення, фізика, математика.*

Література

1. Іен Стюарт. Найбільші математичні завдання. , М.: Альпіна нон фікшн, 2015. - 460 с.
2. Бессьєр Л., Бессон Ж., Буало М. Доказ гіпотези Пуанкаре (по роботах Г. Перельмана) // Математичне просвітництво. 2019, сер. 3. Вип. 24, С. 53-69.
3. Розборів А. А. Алгебраїчна складність. - М.: МЦНМО, 2016. - 32 с.
4. Скотт П. (Scott) Геометрії на тривимірних многовидах. Мат.НЗН 39, Мир, 1986. – 163 с.
5. Славнов А. А., Тадея Л. Д. Введення в квантову теорію калібрувальних полів. - М.: Наука, 1978. - С. 240.

Бородатий Д. Г. (студ., 1 курс),
Кольвах Д. В. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Овсієнко Ю. І.
Полтавська державна аграрна академія (Полтава, Україна)

ВИНАХІДНИЦЬКА СПАДЩИНА ОЛЕКСАНДРА ЗАСЯДЬКО

Олександр Дмитрович Засядько – «...видатний конструктор бойових ракет, талановитий інженер-артилерист, генерал-лейтенант артилерії, учасник багатьох військових кампаній...» саме так у науковій військово-історичній літературі пишуть про нашого земляка [1, с. 325].

Олександр Дмитрович Засядько народився 7 (20) листопада 1779 року в містечку Лютеня Галицького повіту на Полтавщині в сім'ї головного гармаша Запорізької Січі – Дмитра Даниловича Засядька. Батько свого часу очолював артилерію Січі за гетьманування його хрещеного батька Петра Калнишевського. Його прапрадід Яків Засядько 1659 р. був лубенським полковником, дід Данило і прадід Лук'ян – лютенськими сотниками. Після розгрому Січі Дмитро Засядько отримав дворянський чин, і, з дозволу цариці, у серпні 1790 р. відправив своїх синів Данила й Олександра до Артилерійського та Інженерного шляхетського кадетського корпусу до Санкт-Петербургу.

Олександр-кадет був взірцем старанності, “мав сильний розум, твердий від природи характер, серце, готове на самопожертву... і мало хто міг зрівнятися з ним у бажанні оволодіти науками. ...Читав із обов'язку і потреби, вільної від служби хвилини не мав – так веліла йому честь офіцера...». Так характеризували Олександра Засядька свого часу наставники [2, 4].

Вчився О. Д. Засядько добре, навчився не лише прийомам фехтування, але й тонкощам балістики, фортифікації, а найбільш любив математику і фізику. Крім обов'язкових за програмою німецької та французької, він вивчив ще й латину та іспанську мови.

1797 року брати Засядьки закінчили кадетський корпус і почали службу в 10-му батальйоні О. Суворова на Херсонщині. Своє нове звання

«поручик» Олександр Засядько отримав від О. В. Суворова, під керівництвом якого у 1799 році приймав участь у знаменитому Італійському переході через Альпи. Перед Вітчизняною війною 1812 року Олександр Засядько був уже видатним спеціалістом із артилерії [3, 4].

«Шпага за хоробрість», чин полковника, шість бойових орденів і слава хороброго воїна – такий підсумок його бойового шляху в тридцять п'ять років. Під час численних бойових походів О. Д. Засядько все більше цікавився питаннями модернізації артилерії.

Подав у відставку Олександр Дмитрович, щоб зайнятися дослідницькою діяльністю, направлену на пошуки нової зброї. Для цього у 1815 році, щоб мати кошти на прожиток і дослідницьку роботу, продав батьківський маєток під Одесою, а вдома у Лютенці спорудив кузню й лабораторію та запросив до себе спеціалістів. Його наполеглива праця по двадцять годин на добу нарешті увінчалася успіхом: неподалік містечка Лютенька злетіла вгору вогняна ракета, а потім ще і ще [4, 5].

Він наполегливо шукав ефективну рецептуру пороху, визначав оптимальну товщину стінок снаряда, навчався точно запускати ракети в ціль. Так, два століття тому на просторах піщаних вигонах від Лютенки до Великих Сорочинців Полтавської губернії народжувалася теорія ракетної тяги, якої ще не знала країна, як і вперше випробувань керованих бойових ракет.

У 1817 році Олександр Засядько презентував кілька типів бойових порохових ракет, запалювальних та гранатних (фугасних). Вони були різних калібрів, перші їх зразки під Лютенською пролітали відстань до 2300 м [2, 4].

Успіхом винахідника стало створення пускових установок для запуску нової зброї. Це були легкі «триноги-козли», що міг переносити вільно на своїх плечах один солдат. А згодом ним були сконструйовані пускові установки залпового вогню, що зі спеціальної триноги могли одночасно чи поодиноці запускати шість ракет. Це був прообраз майбутніх «Катюш» і «Градів» – реактивних систем залпового вогню. Окрім запалювальних і

гранатних ракет винахідник сконструював ще й сигнальні ракети, що під час запуску вночі можна було розглядати на відстані до 40 верст. Перші зразки бойових ракет досить точно влучали у мішені, що знаходилися на відстані до чотирьох кілометрів. Згодом О. Д. Засядько винаходить пристрій для наведення цієї зброї. Підсумки своїх дворічних експериментів (1816-1817 рр.) в Лютенці вчений виклав у праці «Про справу ракет запалювальних і фугасних», яку написав 1817 року. Вона стала першим посібником із виготовлення та бойового застосування ракетної зброї для тогочасного війська. Навесні 1818 року під час показових випробувань на артилерійському полігоні біля Санкт-Петербурга кращі зразки ракет Засядька пролетіли на відстань 2888 сажнів (понад 6 км). Ніде в світі такої зброї у той час не існувало [1, с. 325].

Згодом винахід ракетника високо оцінили та присвоїли йому звання генерал-майора, а з 1820 року його призначили начальником Петербурзького арсеналу, Охтенського порохового заводу і піротехнічної лабораторії, а також першого в Росії вищого артилерійського училища.

У 1827 році О. Д. Засядько очолив штаб артилерії російської армії. Організував виробництво ракет у спеціальному «ракетному закладі», сформував перший у російській армії ракетний підрозділ, оснащений шеститрубними станками для запуску ракет. Ракети всюди наближали перемогу у російсько-турецькій війні 1828-1829 рр. [5].

Після війни стан здоров'я генерал-лейтенанта різко погіршився, і Олександр Дмитрович знову повернувся в Україну. Проживаючи у Харкові винахідник прагнув налагодити медичне обслуговування простого люду, він виношував ідею додаткової медичної освіти священників, щоб вони лікували як душу, так і тіло людини. Генерал також прагнув створити таку машину, яка б проводила кораблі через Дніпровські пороги, але під час поїздки на Хортицю його хвороба загострилася, і 27 травня 1838 р. серце винахідника зупинилося.

Так, 200 років тому (1815-1818 р.р.) поблизу Полтавського містечка Лютенька розпочався відлік історії українського ракетобудування, і його основоположником став козацький нащадок, видатний конструктор О. Д. Засядько. А, на початку XIX ст. у Олександра Дмитровича виникла ідея польоту на Місяць, зокрема на ракеті. Він підрахував, скільки пороху потрібно для цього, винахідник наполегливо вів пошуки ефективного палива, і вони привели його до досліджень нафтопродуктів, але вивчити їх не встиг [2].

Розрахунки О. Д. Засядька, розроблені ним принципи реактивної тяги, балістики, ракет, допомогли Миколі Кибальчичу, а, згодом, Едуарду Ціолковському та Юрію Кондратюку. І тому можна сказати, що космічна ера для українців почалася 1815 року на Лютенських луках.

Анотація. У роботі проведено дослідження біографічних відомостей із життя видатного конструктора бойових ракет Олександра Засядька. Акцентовано увагу на елементах біографії, пов'язаних із винахідницькою діяльністю талановитого інженера-артилериста.

Ключові слова: бойові ракети, видатний винахідник – О. Засядько.

Summary. The article is devoted to the study of biographical information about the life of the famous designer of military rockets Aleksandr Zasyadko. Attention is focused on elements of biography, they are connected with the inventive activity of the talented artillery engineer.

Key words: military rocket, personality – A. Zasyadko.

Література

1. Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона. С.Петербург, 1894. Т. XII (23). С. 498.
2. Казацкий потомок А. Д. Засядько как основатель ракетного ... : сайт. URL: <http://histpol.pl.ua/ru/biblioteka/ukazatel-po-avtoram/avtory-k/kocherga-nadezhda-konstantinovna?id=7952> (дата звернення: 05.04.2020)
3. Кочерга Н. К. О. Д. Засядько: нащадок запорозького гармаша біля витоків теорії ракетної тяги. *Философия и космология 2010*: Научно-теоретический сборник. Полтава : Полтавський літератор, 2010. С. 271-280.
4. Пістоленко І.О. О.Д. Засядько – воїн, винахідник, людина. *Проблеми історії України XIX – початку XX ст.* 2006. 11. С. 298-306. : сайт. URL: http://resource.history.org.ua/publ/xix_2006_11_298 (дата звернення: 05.04.2020)
5. Чайка І. Ф. Олександр Засядько: місячний слід українських козацьких ракет (До 240-річчя від дня народження). *Космічна наука і технологія*. 2018. Т. 24. № 4. С 65-73.

Гриднев Е. А. (студ., 1 курс)
Научный руководитель – доц. Веневитина С. С.
*Воронежский государственный лесотехнический университет
им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, РФ)*

ВКЛАД ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА В МАТЕМАТИКУ



Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 года в Швейцарии. Свое первое образование Леонард получил у отца, который хотел, чтоб его сын связал свою жизнь с духовной карьерой, но преподавал ему математику, надеясь, что она ему когда-нибудь пригодится. В 13 лет Эйлер-младший поступил в Базельский университет, где по большей части занимался философией. Леонард отличался

от других студентов своей группы. Иоганн Бернулли, преподававший элементарную математику, заметил в Эйлере большую заинтересованность и талант к этой науке. Он начал давать Леонарду частные уроки. В 1723 году Эйлер получил степень магистра (в 16 лет!), после чего продолжил обучение на богословском факультете, но вскоре полностью погрузился в математику. В 19 лет Эйлер участвовал в конкурсе на должность профессора физики, представив опубликованный труд «Диссертация по физике о звуке», но его сочли слишком молодым для руководителя кафедры.

Но вскоре он получил приглашение на работу в Россию и с радостью принял его. В 1727 году Леонард Эйлер стал адъюнктом высшей математики Санкт-Петербургской академии наук с окладом в 300 рублей в год.

Период жизни в России (до 1741 года) был для Эйлера очень плодотворным. Он стал известным и уважаемым членом мирового научного сообщества. Но после смерти государыни Анны Иоанновны ученый вместе

со своей семьей был вынужден уехать из России в Берлин из-за крайне нестабильной обстановки.

В 1746 году Эйлера назначили руководителем отделения математических наук только что открывшейся Берлинской академии.

В Берлине Леонард поставил перед собой задачу развития новой теории исчисления бесконечно малых с помощью интегральных и дифференциальных уравнений.

В 1766 году Эйлер покинул Берлин (существует мнение, что это произошло из-за обиды на Фридриха II за то, что он не назначил его президентом берлинской академии наук) и вернулся в Россию на очень выгодных условиях.

Он был одним из первых, кто переводил математическое описание процессов на аналитический язык дифференциальных уравнений. Эйлер стал основоположником новых направлений и наук, многие методы решения задач стали носить его имя. Леонард предложил целый ряд математических символов, например: Σ – сумма; Δ – конечная разность и т.д.

Важно отметить, что Эйлер впервые в истории математики доказал крупную теорему топологии. Он нашел соотношение между числом ребер, граней и вершин многогранника: $G + B - P = 2$.

Значительную часть работ Леонард посвятил анализу. Он до такой степени смог дополнить и упростить теории рядов, интегрирование функции, дифференциальные уравнения, что их форма неизменна до сих пор.

Я считаю, что XVIII век – это век Эйлера. До Леонарда все математические достижения были хаотичны и далеко не всегда согласованы. Именно Эйлер смог совместить тригонометрию, анализ, алгебру и другие науки в единое целое, добавив свои открытия. Благодаря ему появилась общая теория рядов, удивительная формула Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

и как следствие, тождество Эйлера:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Леонард также создал новые математические дисциплины, например, дифференциальную геометрию поверхностей, теорию комплексных функций и т.д. Эйлер постоянно пытался довести свои труды до конкретных вычислительных методов. Он доказал, что всякое простое число вида $4n + 1$ всегда разлагается на сумму квадратов других двух чисел.

Леонард ввел дзета-функцию, которая получило впоследствии имя Римана:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots,$$

где s вещественно. Эйлер вывел для неё разложение:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

где произведение берётся по всем простым числам p .

Эйлер выполнил глубокое исследование основания натурального логарифма, хотя о нем было известно еще с давних времен. С тех пор эта константа носит его имя.

Почти сто лет спустя, когда во многих странах – и прежде всего в Англии – стали строить железные дороги, потребовалось рассчитать прочность железнодорожных мостов. Модель Эйлера принесла практическую пользу в проведении экспериментов.

В 1780 году Леонард стал часто жаловаться на свое здоровье. Он испытывал сильные головные боли, слабость. 18 сентября в 1783 году у Эйлера состоялась встреча с академиком А. Лекселем. Внезапно Леонард почувствовал себя плохо и успел лишь только сказать, что он умирает, после чего потерял сознание. Произошло кровоизлияние в мозг, Эйлера не стало. Для всего мира это была невосполнимая утрата. Эйлер оставался полноценным математиком до конца своей жизни. Эйлер внес в науку настолько фундаментальный вклад, что его труды изучались и публиковались еще целых полвека после его кончины.

Дымов М. А. (студ., 1 курс)
Научный руководитель – доц. Смирнова Е. В.
*Воронежский государственный лесотехнический университет
им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, РФ)*

КОШИ – ОСНОВАТЕЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

«Коши был одним из величайших математиков современности. Одним из наиболее значительных его достижений является четкость и строгость введенных им методов. Первый этап логической строгости, характерной для современной математики, берет начало в его лекциях и книгах по математическому анализу» [1]



Огюстён Луи Коши родился в Париже 21 августа 1789 года. В семье видного чиновника. Его отец был роялист и католик, именно он начал заниматься с Коши. Он учился в Политехнической школе, потом перешёл в Парижскую Школу мостов и дорог в 1807 году. В 1810 году Коши получил ответственное поручение по постройке военного порта в Шербуре, начал работать инженером путей сообщения в Шербуре. Эта деятельность способствовала самостоятельному изучению математики, геометрии. В 1811 году написал первый труд о многогранниках, после последовали работы о симметрических функциях, алгебраических уравнениях, по теории чисел.

В 1815 году он доказал строго теорему Лагранжа о сохранении безвихревого течения идеальной баротропной жидкости в поле консервативных сил.

Коши и Пуассон в 1815-1816 г разработали фундамент теории волн малой амплитуды.

Коши в 1816 году продемонстрировал на конкурсе Парижской академии наук известное исследование по теории волн на поверхности тяжелой жидкости. В случае жидкой частицы он рассматривал не только её

поступательное и вращательное перемещение, но и также деформации – изменения объёма и формы. Получил премию. В этом же году Коши был назначен членом Французской академии наук. С 1817 по 1830 год он преподавал в Политехнической школе.

Коши заложил фундамент анализа бесконечно малых. В 1821 году выходит его книга «Курс анализа», целью которой было изложить методы, позволяющие добиться большей строгости доказательств. В то время (с конца XVI века) при доказательствах использовались аргументы, следующие из общности алгебры: «все, что верно для вещественных чисел, так же верно и для комплексных; все, что верно для конечных величин, применимо и к бесконечным; все, что верно для сходящихся рядов, верно и для расходящихся».

Коши предложил понятие предела: «Когда последовательные значения переменной бесконечно приближаются к конкретному значению так, что в итоге отличаются от него на произвольно выбранную величину, последнее значение называется пределом остальных». Это определение стало основным понятием анализа бесконечно малых и осталось в современных учебниках по математическому анализу.

☞ Определение (на «языке ε - δ », или по Коши). Число A называется **пределом функции в точке x_0** (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ , что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Это определение коротко можно записать так:

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : \underbrace{|x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0}_{\text{или } 0 < |x - x_0| < \delta} \implies |f(x) - A| < \varepsilon \right) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Коши определил бесконечно малые как переменные, которые стремятся к нулю: «Когда последовательные значения переменной бесконечно уменьшаются так, что становятся меньше любой заданной

величины, эта переменная называется бесконечно малой. Предел таких переменных равен нулю».

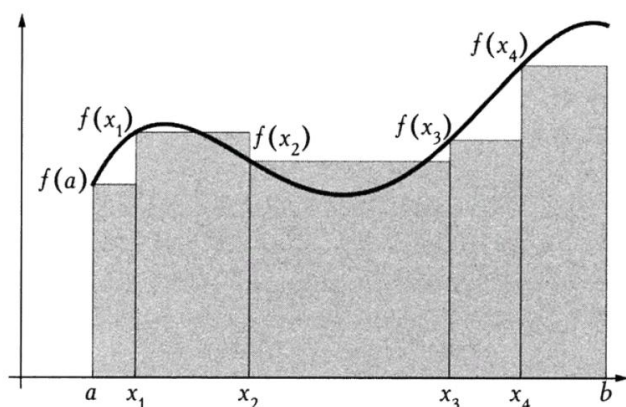
В «Курсах анализа» также приводятся определения непрерывной функции, комплексного числа, формулируются критерии сходимости рядов и так далее. Коши также установил, что можно говорить о сумме ряда лишь в том случае, когда он сходится, и определил ее как предел последовательности частичных сумм ряда.

Работы Коши о сходимости рядов вызвали большое «возбуждение». После собрания Французской академии наук, где ученый изложил свои идеи о сходимости рядов, обеспокоенный Лаплас заперся у себя дома и не выходил, пока не проверил, что все ряды, использованные им в «Небесной механике», сходятся, и лишь тогда вздохнул с облегчением.

В 1823 году, в работе под названием «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых», Коши дает современное определение производной как предела $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, когда h стремится к нулю. Также приводится определение интеграла от непрерывной функции $f(x)$ как предела сумм Коши:

$$f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

где $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ – разбиение интервала $[a, b]$ на отрезки, длины которых стремятся к нулю.



Каждое слагаемое этой суммы соответствует площади прямоугольника, и площадь под графиком функции определяется через них с любой точностью.

Несомненно, попытки Коши логически обосновать анализ бесконечно малых были значимым этапом, но тем не менее, по замечаниям Нильса Абеля «допускали исключения», т.е. были неполными.

Коши много работал в области комплексного анализа, создал теорию интегральных вычетов.

В математической физике глубоко изучил краевую задачу с начальными условиями, которая с тех пор называется задача Коши.

Революция в 1830 году изменила жизнь Коши, он отказался присягнуть правительству Луи Филиппа, потерял должность и вынужден был покинуть Францию. Некоторое время провел в Швейцарии, затем получил место в Туринском университете на кафедре математической физики. Карл X пригласил Коши в Прагу, для своего сына учителем и воспитателем. Несколько лет они путешествовали по Европе до 1838 года. Ему предлагали различные должности, но он отказывался из-за своих убеждений. Революция 1848 г отменила присягу, и Коши получил кафедру в Колледже де Франс, где и проработал до самой смерти.

Коши умер 22 мая 1857 году.

Коши написал свыше 800 работ, все его сочинения содержат 27 томов.

***Аннотация.** Статья посвящена биографии и научно-педагогической деятельности Огюстена Луи Коши.*

***Abstract.** The article is devoted to scientific and pedagogical activity Augustin Louis Cauchy*

Литература

1. Мир математики, Истина в пределе, Анализ бесконечно малых, Том 14, Антонио Дуран, 2014. – 148 с.
2. Веселовский И. Н. Очерки по истории теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1974. — 287 с.
3. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.-Л.:ГОНТИ, 1937. - 432 с.

Дяченко М. В., (студ., 1 курс))
Науковий керівник – доц. Сіра І.Т.
Харківський національний університет імені Г.С. Сковороди
(Харків, Україна)

МАРІЯ ГАЕТАНА АНЬЄЗІ

У період Середньовіччя, під впливом християнства, багато європейських країн виступають проти будь-якої форми вищої освіти для жінок, стверджуючи, що це джерело спокуси і гріха. Жінки в більшості своїй були позбавлені можливості вчитися навіть читанню та письму. Єдиною можливістю для здобування освіти у дівчат у цей період є жіночі монастирі.

Після падіння Константинополя, багато учених переселилися до Риму,



внаслідок чого Європа поповнила обсяг наукових знань і розвинула критичне мислення, що у свою чергу породжує епоху Ренесансу. Правда, за винятком Італії, статус жінок в Європі змінювався дуже повільно. У Італії, проте, коли Ренесанс був в самому розквіті, жінки залишили свій слід у академічному світі. Інтелектуальна жінка викликала захоплення людей.

Такий підхід дозволив італійським жінкам займатися мистецтвом, медициною, літературою і математикою. Серед багатьох інших, Марія Гаєтана Аньєзі є найважливішим і найвидатнішим діячем в галузі математики у 18-му столітті.

Марія Гаєтана Аньєзі народилася 16 травня 1718 року у багатій і освіченій родині. Вона була самою старшою і, окрім неї, було ще 20 дітей. Її батько був професором математики і дав їй ґрунтовну освіту.

Марія була визнана диво-дитям дуже рано. Вона володіла французькою і італійською мовами у п'ять років, а до 13 років знала грецьку, іврит, іспанську, німецьку, латинську мови і декілька сучасних мов. Коли їй було 9

років, вона виступила протягом години з промовою на латині на диспуті з питання щодо права жінок на освіту. У підлітковому віці Марія засвоїла математику.

Будинок Аньєзі був місцем зібрання найвидатніших інтелектуалів того часу. Марія брала участь у більшості семінарів. Коли їй було п'ятнадцять, батько почав регулярно збирати у своєму будинку найосвіченіших вчених мужів, відомих в Болоньї, перед якими дівчинка виступала з чисельними рефератами з найбільш малозрозумілих філософських питань.

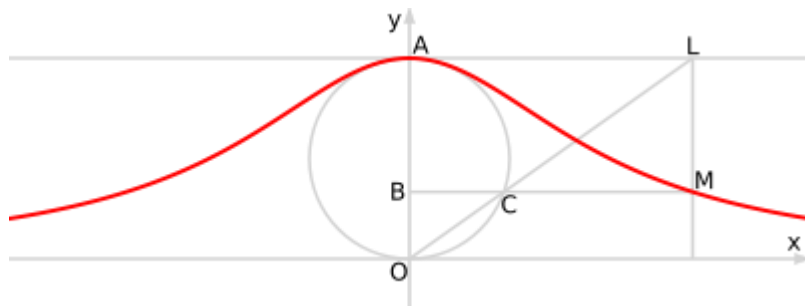
Марія була дуже скромною по характеру і не любила такі зустрічі. Вона продовжувала брати участь у таких зустрічах, щоб догодити батьку. Це продовжувалося до смерті її матері. Смерть її матері дає їй привід для відходу від суспільного життя. Вона взяла на себе зобов'язання піклуватись про сім'ю. Її батько не заперечував проти цього тому, що важко і дорого знайти хатню робітницю, яка доглядала б 21 дитину і самотнього чоловіка. Можливо, що це одна з причин, чому Марія ніколи не була заміжньою.



При цьому вона не відмовляється від математики. У 1738 вона опублікувала збірку есе про складні питання природознавства і філософії. По досягненню 20 літнього віку вона висловлювала велике бажання піти у монастир. Це бажання не було задоволене, але з того часу вона живе дуже замкнено, уникаючи суспільства і присвятивши себе цілком вивченню математики.

Найбільш цінним результатом її праць був твір «Основи аналізу для вживання італійського юнацтва» (*Istituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana*). Ця робота була опублікована в Мілані в 1748 і «вважалась найкращим вступом до Ейлера серед наявних робіт». Вона викликала сенсацію в академічних кругах. Книга стала зразком ясності, була широко переведена і використовувалася як підручник.

Ця робота містить виклад аналітичної геометрії, зокрема там розглянута крива третього порядку, названа "локоном Аньєзі" (або верзієра). Після успіху своєї книги, Марія була обрана до Болонської академії наук.



$$\text{Локон Аньєзі } y = \frac{a^3}{(x^2 + a^2)}$$

Перша сторінка *Instituzioni analitiche* («Основи аналізу») (1748)

У 1750 році у зв'язку з хворобою її батька, вона була призначена Папою Бенедиктом XIV професором математики, натурфілософії та фізики Болоньї. Вона була другою жінкою, призначеною професором університету.

Університет вручив їй диплом, і її ім'я було додане до списку професорів факультету. Проте, ведуться дебати з приводу того, прийняла Марія чи ні, це призначення. Багато хто погоджується на думці, що вона обійняла посаду і працювала в університеті до смерті її батька.

Створюється враження, що батько для Марії був її натхненням для занять математикою. Коли він помер, Марія відмовилася від будь-якої дослідницької роботи з математики.

Коли в 1762 році університет Турину поцікавився її думкою про статті молодого Лагранжа щодо розрахунків коливань, вона відповіла, що більше не займається цими питаннями.

Марія була дуже релігійною жінкою. Після смерті її батька в 1752 вона присвятила себе давно леліаній мрії, це було вивчення богослов'я і допомога нужденним, особливо жінкам. Вона присвятила все своє життя бідним, безхаткам і хворим. Коли в Болоньї був відкритий будинок для хворих і немічних, Марія була призначена його директором. Вона бере на себе турботу про хворих і жінок, що помирали, аж до власної смерті. Після

проведення протягом ряду років строгого, майже чернечого життя, вона приєдналася до чернечого ордена.

Релігійне життя і допомога нужденним, мабуть, захоплювали її більше, ніж математика. Це пояснює, чому вона відмовилася від математики взагалі, як тільки її батько помер.

Марія була дуже сором'язливою дівчиною і гідною людиною. Вона не була настільки амбіційною, щоб стати відомим математиком. Її найвідоміша праця, «Основи аналізу», фактично мала стати підручником для її братів.

Аньєзі також написала коментар до *Traite analytique des sections coniques du marquis de l'Hopital*, який, хоча і був високо оцінений, та не публікувався.

На її честь названо кратер на Венері та астероїд 16765 Аньєзі

Анотація. Математика - це не тільки формули і теореми. Математика - це ще й люди, які її творять і вкладають душу в її розвиток. Марія Гаєтана Аньєзі не схожа на типового знаменитого математика, хоча її внесок у науку був вельми значним. Одна з кривих ліній називається «Локон Аньєзі» на честь першої у світі жінки-професора математики. Важливим результатом її праць є твір «Основи аналізу для вживання італійського юнацтва». Воно було визнано "найкращим введенням в наявні роботи Ейлера» і викликало шок в академічних колах. Книгу переклали на багато мов, використовували як підручник. Визнанням Марії як науковця стало обрання в Болонську академію наук.

Ключові слова. Життя, творчість, Болонський університет, «Локон Аньєзі», богослов'я.

Література

- 1.Галай Г.Г., Гриневич Г.Д. Учням про видатних математиків. – К.: Рад. шк., 1976.- 157 с.
- 2.Бородин А.И., Бугай А.С. Библиографический словарь деятелей в области математики. – К.: Рад. шк., 1979. – 607 с.
- 3.Математична хрестоматія / За ред. Смогоржевського. – К.: Рад. шк., 1968. – 319 с.
- 4.Математична хрестоматія / За ред. М.І. Кованцова. – К.: Рад. шк., 1977. – 384 с.
- 5.Зоря А.С., Кіро С.М. Про математику і математиків. – К: Рад. шк., 1981. – 254 с.

Зайцева Т.А., доцент
*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
(Дніпро, Україна)*

**НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ
ПРОФЕСОРА ШИШКАНОВОЇ СВІТЛАНИ ФЕДОРІВНИ
В ГАЛУЗІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ**



Шишканова Світлана Федорівна доктор технічних наук, професор, член-кореспондент міжнародної академії наук Вищої Школи м. Санкт-Петербург, члену Національного комітету України з теоретичної та прикладної механіки [1].

Народилася Світлана Федорівна у офіцерській родині 18 серпня 1938 року. У 1955 р. закінчила 67 Дніпропетровську середню школу з золотою медаллю.

У 1960 р. – Дніпропетровський державний університет за спеціальністю «Механіка» з відзнакою. Після закінчення вишу працювала молодшим науковим співробітником Українського науково-дослідного трубного інституту м. Дніпропетровська. У Запорізькому машинобудівному інституті ім. В.Я. Чубаря на кафедрі вищої математики Світлана Федорівна пропрацювала 35 років: 1961 – асистент, 1969 – старший викладач, 1972 – доцент кафедри вищої математики Запорізького машинобудівного ін-ту. 1982–1984 – старший науковий співробітник, 1984–1996 – доцент кафедри вищої математики Запорізького державного технічного університету.

В 1970 р. захистила кандидатську дисертацію у Дніпропетровському державному університеті за темою «Дослідження напруженого стану навколо отворів у багатозв'язних пластинах та оболонках на пружній основі» під керівництвом академіка НАН України О.М. Гузя і отримала диплом

кандидата фізико-математичних наук. З 1971 р. – доцент кафедри вищої математики Запорізького машинобудівного інституту ім. В. Я. Чубаря.

У 1996 р. захистила докторську дисертацію за темою «Розробка і застосування методів теорії потенціалу до дослідження динаміки та міцності елементів машинобудівних конструкцій» у Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут» і отримала науковий ступінь доктора технічних наук. З 1996р. по останні дні (05.10.2004р.) працювала завідувачем кафедри математичного аналізу Запорізького національного університету [2, 3].

Наукові досягнення Шишканової С.Ф. в теорії інтегральних рівнянь і механіці деформівного твердого тіла важко переоцінити [1]. На кафедрі математичного аналізу вона очолила науковий напрям роботи за темою: «Багатовимірні інтегральні рівняння з особливостями та методи теорії потенціалу: застосування до просторових змішаних задач контактної взаємодії та теорії тріщин» [4-6]. Саме нею розроблено метод розв'язання змішаних просторових задач теорії пружності про напружено-деформований стан пружного тіла з плоскою двозв'язною тріщиною; знайдено точний в рядках розв'язок просторової задачі про вдавлювання кругового кільцевого в плані штампа, обмеженого довільною поверхнею; метод розв'язання просторових контактних задач з врахуванням сил тертя та шорсткості; метод дослідження коливань мембран, тонких пластин, що різняться від кругових, кільцевих; метод обчислення потенціалів неоднорідного простого шару, розподіленого по двозв'язній області, н'ютонівських об'ємних потенціалів неоднорідного тривимірного тіла, багатовимірних еліпсоїдів, потенціалів подвійного шару для деяких рівнянь вищих порядків, та ін.

Під її керівництвом закінчили аспірантуру та захистили кандидатські дисертації молоді науковці, які зараз працюють продовжуючи роботу у галузі Прикладної математики. Вона мала близько 150 вагомих публікацій наукового і навчально-методичного характеру.

Шишканова С.Ф. була членом спеціалізованої вченої ради по захисту кандидатських та докторських дисертацій Д17.052.01 при Запорізькому національному технічному університеті; членом редакційної колегії фахового збірника наукових статей «Вісник Запорізького державного університету» (фізико-математичні науки). Успішно опонувала кандидатські дисертації у спеціалізованих вчених радах; була членом міжвузівських наукових семінарів «Актуальні проблеми математики і механіки» (ЗДУ), «Механіка деформівного твердого тіла» (ЗНТУ) [3].

Шишканова С.Ф. була талановитим педагогом, стаж її педагогічної роботи у вищих закладах освіти IV рівня акредитації – 43 роки, в тому числі в Запорізькому державному університеті – 8 років. Вона була провідним фахівцем з основних навчальних курсів: «Математичний аналіз», «Функціональний аналіз», «Вища математика», читала спецкурси «Основи і методи теорії потенціалу», «Теорія наближення функцій», «Інтегральні рівняння», «Операційне числення», «Багатовимірні сингулярні інтегральні рівняння», «Методи розв'язання некоректних задач», «Теорія матричних ігор». Шишканова С.Ф. була членом-кореспондентом Міжнародної Академії наук Вищої школи (Санкт-Петербурзьке відділення), членом Національного Комітету України з теоретичної та прикладної механіки.

Має відзнаки за допомогу підприємствам у впровадженні науково-дослідних і дослідно-конструкторських розробок у виробництво, численні подяки за висококваліфіковану підготовку фахівців, а також медаль «Ветеран праці» та грамоти різного рівня. Зробила вагомий внесок у розвиток механіки деформівних тіл і механіки суцільних середовищ. Важливі розробки виконано в області багатовимірних інтегральних рівнянь з особливостями та методів теорії потенціалу, що застосовуються до просторових змішаних задач контактної взаємодії та теорії тріщин, у побудові обчислювальних схем проекційного типу наближеного розв'язку систем інтегральних рівнянь.

***Анотація.** Стаття присвячена науковій і педагогічній діяльності професора Світлани Федорівни Шишканової, здебільшого, біографічному опису її життя та науковим досягненням.*

Ключові слова: теорія інтегро-диференціальних рівнянь, механіка, міцність, машинобудування, теорія тріщин, педагогічна майстерність

Annotation. The article is devoted to the scientific and pedagogical activity of Professor Svetlana Fyodorovna Shishkanova, mostly to the biographical description of her life and scientific achievements.

Keywords: integral-differential equations, mechanics, durability, engineering, theory of cracks, pedagogical skills

Література

1. Сайт кафедри фундаментальної математики Запорізького національного університета <https://kfm-znu.at.ua/index/0-2>
2. Славені запоріжці / Всі персоналії / Шишканова Світлана Федорівна http://sites.znu.edu.ua/cms/index.php?action=news/view_details&news_id=7599&lang=ukr&news_code=
3. Запорізький національний університет: історія і сучасність (1930-2005). Ювілейна книга. – Запоріжжя, 2006. – С. 242.
4. Шишканова С.Ф. О вдавливаннии в упругое полупространство эллиптического штампа со скругленным краем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. - №3. – С. 77-80.
5. Шишканова С.Ф. О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к кольцевой // Прикладная механика. – 1990. – Т.26. - №5. – С. 9-13.
6. Шишканова С.Ф. О потенциале простого слоя тора с плотностью, зависящей от расстояния касательной плоскости до центра // Математические методы и физико-механические поля. – Киев. – Наукова думка. – 1989. – Вып. 29. – С.85-88

Злоткіна А. С.(студ., 3курс)

Науковий керівник - доц. Сіра І. Т.

Харківський національний університет імені Г.С. Сковороди (Харків,
Україна)

ТЕОРІЯ ГАЛУА

Он был одержим бесом математики.



В історії математики, та й в історії науки взагалі, Еваріст Галуа – унікальний приклад блискучого генія. Приклади ранніх проявів математичного таланту відомі, навіть не так вже й рідкісні. Галуа (1811-1832), який загинув у віці двадцяти років, безумовно, належить до тих, хто визначив один з генеральних напрямків математики XIX-XX ст. Якщо до цього додати той факт, що

математичній спільноті потрібно не мало часу, щоб зрозуміти і освоїти ідеї Галуа [1] і приступити до їх подальшого розвитку, то твердження про його унікальність сумніву не викликає.

Серед дослідників теорії Галуа слід виокремити Ю. Абакумова, О. Безущака, О. Бореви́ча, А. Дальма, В. Єрмакова, Ю. Єрмолаєва, В. Кіріченко, І. Кріпкого, Х. Коха, Я. Николайчука, М. Перязева, М. Постнікова, Б. Пугача, О. Рябухо, О. Толасова, Д. Требенка, В. Сушанського, В. Харченко, О. Хованського, Д. Трушина, Н. Чеботарева, Г. Челнокова, Д. Фаддєєва.

Великий французький вчений приніс в математику абсолютно новий підхід, нову точку зору, зробивши найважливіший і необхідний крок в сторону абстракції. У працях Е. Галуа «математика перестає бути наукою про числа і формули – арифметикою, геометрією і набором пов'язаних з ними ідей, таких, як алгебра і тригонометрія. Вона стала наукою про структуру. Те, що було дослідженням речей, стало дослідженням процесів», – до такого фундаментального висновку приходять сучасний британський математик Іен Стюарт [2, с.14].

Значення праць Е. Галуа полягає в тому, що в них у повній мірі розкриті абсолютно нові глибинні математичні закономірності: виникла нова математична парадигма – теорія полів, концепція групи, теорія Галуа. З'явився на світ цілий розділ математики – обчислення симетрій, назване теорією груп, яка проникла в кожен куточок математики, у багато областей сучасного наукового пізнання. Саме в цьому і полягають філософсько-математична роль і актуальність теорії Галуа.

У центр уваги Галуа потрапила основна проблема – можливість розв'язання в радикалах загальних алгебраїчних рівнянь. Причому не тільки в вигляді рівнянь п'ятого ступеня, розглянутих норвезьким математиком Нільсом Хенриком Абелем (1802-1829). Мета Галуа полягала в тому, щоб знайти критерій, спосіб розв'язання для всіх алгебраїчних рівнянь.

Класична теорія Галуа перетворила середньовічну алгебру – науку про рішення рівнянь – в сучасну. Займаючись проблемою можливості розв'язання рівнянь в радикалах, французький математик Еваріст Галуа заклав основи теорії груп і полів.

Італійські математики XVI століття навчилися вирішувати рівняння 3-й і 4-го ступеня. Їх результати привели до відкриття комплексних чисел, а Франсуа Вієт, натхненний «Великим мистецтвом» Джироламо Кардано, створив сучасну алгебраїчну символіку.

Загальних формул для рівнянь 5-го ступеня ніхто знайти не міг, і лише на початку XIX століття Нільс Абель довів, що загальні рівняння ступеня ≥ 5 нерозв'язні в радикалах; доказ Паоло Руффіні 1799 року містив пробіл. Критерій можливості розв'язання рівнянь в радикалах встановив Галуа, ввівши поняття групи, нормальної підгрупи, нормального розширення і розв'язної групи.

Звернемося до деяких аспектів теорії Галуа. Перш за все математик намагається пояснити поняття величини, раціональної щодо інших величин.

З точки зору Е. Галуа, можливість розв'язання деяких рівнянь перестала бути абсолютною проблемою, яка потребує готової відповіді. Вчений розглядає її як зв'язок між певним алгебраїчним об'єктом – рівнянням і його «середовищем» - полем, або областю раціональності, до якої воно відноситься. Як тільки змінюється область раціональності рівняння, змінюється і група Галуа.

Під теорією Галуа на її першому етапі розвитку розуміли теорію, метою якої було виявлення умов розв'язності заданого рівняння в радикалах (принаймні так її розумів сам Галуа). Сьогодні теорія Галуа – (в найбільш широкому розумінні) теорія, що вивчає ті чи інші математичні об'єкти на основі їхніх груп автоморфізмів. Так, напр., можливі теорія Галуа полів, кілець, топологічних просторів і т. п. В більш вузькому розумінні під теорією Галуа розуміється теорія Галуа полів і саме в такому розумінні трактується теорія Галуа в даній роботі.

Теорія Галуа заклала основи сучасної алгебри: із конкретної задачі про розв'язність рівнянь в радикалах виникли абстрактні теорії – теорія груп, теорія кілець, теорія полів та інші. Ідеї теорії Галуа глибоко проникли в різноманітні області математики і частково створили, частково просунули вперед такі області математики як теорія диференціальних рівнянь, теорія автоморфних функцій, комбінаторна топологія тощо. Відповідно до нових областей застосувань, сама теорія Галуа змінила свою мову; об'єктом вивчення стали замість коренів рівнянь поля алгебраїчних чисел, замість підстановок – автоморфізми полів тощо. І хоча сьогодні питання про розв'язність рівнянь в радикалах перестало бути центральним в алгебрі, теорія Галуа і надалі є одним із ключових її розділів [3, с.119].

Отже, поняття групи в теорії Галуа стає потужним і гнучким засобом. Однак цю точку зору поділяли далеко не всі. Так, зокрема, французький математик О. Коші (1789-1857) і не думав приписувати поняттю групи подібну роль. «Система пов'язаних підстановок» для Коші була нерозкладним поняттям, він ніколи не виділяв поняття підгрупи і нормальної групи. Зараз ім'я Галуа – одне з найпопулярніших в математиці. Воно міститься в таких фундаментальних поняттях, як група Галуа, поле Галуа, теорія Галуа, відповідність Галуа і інші. Ідеї Галуа справили вирішальний вплив на розвиток алгебри протягом століть і проникли в інші області математики. Класична теорія Галуа узагальнюється і розвивається в багатьох напрямках.

Анотація У статті розкривається досягнення великого французького вченого Еваріста Галуа в галузі математики, зокрема класична теорія Галуа, та її значення для сучасної математичної науки.

Ключові слова: Еваріст Галуа, алгебра, алгебраїчні рівняння, теорія Галуа, теорія груп і полів, радикали.

Література

1. Галуа Э. Сочинения Э. Галуа. М.-Л.: ОНТИ, 1936. - 342 с.
2. Дальма, А. Эварист Галуа: революционер и математик / А. Дальма, П. Дюпюи. - Москва: Ижевск, 2001. - 176 с.
3. Дрозд Ю.А. Теория Галуа., Київ: РВЦ «Київський університет», 1997. - 35 с.

4.Требенко Д. Я. Елементи теорії Галуа в курсі «Алгебра і теорія чисел» / Д. Я. Требенко, О. О. Требенко // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі. - 2011. - Вип. 8. - С. 116-124.

УДК 514.01

Ковалівська А. А. (студ., 4 курс)
Науковий керівник – доц. Сіра І.Т.,
Харківський національний університет імені Г.С. Сковороди
Харків, Україна

ВІДКРИТТЯ НЕЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Всі книги «Начал» починаються означенням понять, котрі зустрічаються вперше. У першій книзі «Начал» за означеннями слідує постулати й аксіоми.

Слідом за аксіомами йдуть теореми та задачі на побудову під загальною назвою «припущення», розташовані в суворій послідовності так, що доведення (розв'язання) кожного наступного припущення спирається на попереднє (1, с. 11).

Що стосується постулатів і аксіом, то їх формулювання бездоганні, твердження, що містяться в них істотні й складають основу наступних за ними доведень.

Що стосується доведень. За задумом автора «Начал», доведення всіх припущень повинні в кінці спиратися на властивості геометричних образів, які визначаються постулатами та аксіомами. Однак швидке знайомство з доведеннями Евкліда переконує нас в тому, що в них неодноразово використовуються такі властивості геометричних образів і відносини між ними, котрі не з'ясовуються ні постулатами, ні аксіомами (1, с. 12).

Деякі із недоліків «Начал» Евкліда були відзначені вже стародавніми греками, у зв'язку з чим робилися спроби покращити виклад «Начал».

Природний шлях для вирішення цього завдання полягає в тому, щоб деякі з постулатів і аксіом вивести з інших. Саме так «Начала» були б

звільнені від четвертого постулату, в якому йде мова про рівність всіх прямих кутів (1, с. 13).

Однак всі спроби звільнитись таким чином від п'ятого постулату були безрезультатні, хоча цим питанням займалися геометри протягом більш ніж двох тисяч років. Типовою помилкою більшості доведень п'ятого постулату було свідоме чи несвідоме використання будь-якого твердження, що не міститься явно в інших постулатах і аксіомах та не випливає з них (1, с. 14).

Одним із обнадійливих способів підходу до доведення п'ятого постулату, який використовували багато геометрів XVIII і першої половини XIX ст., був наступним.

П'ятий постулат замінювався його запереченням чи яким-небудь твердженням, еквівалентним до заперечення. Спираючись на перетворену таким чином систему постулатів та аксіом, доводяться всі можливі пропозиції, які з неї випливають, подібно тому, як це робилось в «Началах». Якщо п'ятий постулат й справді випливає з інших постулатів і аксіом, то перетворена зазначеним чином система постулатів і аксіом буде суперечливою. Тому через деякий можна прийти до двох взаємовиключних висновків. Так і буде доведено п'ятий постулат (1, с. 15).

Саме так намагалися довести п'ятий постулат Д. Саккері (1667 – 1733), І. Ламберт (1728 – 1777) і А. Лежандр (1752 – 1833).

Д. Саккері (1733 р.) розглядав чотирикутник із двома прямими кутами при основі та рівними бічними сторонами (рис. 1).

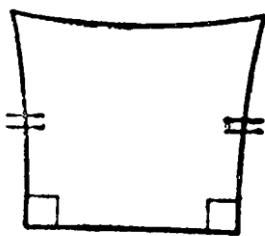


Рис. 1. Конструкція Саккері

Відносно двох інших кутів цього чотирикутника, які рівні, можуть бути три гіпотези: обидва кути прямі, тупі або гострі.

Д. Саккері доводить, що гіпотеза прямого кута еквівалентна п'ятому постулату, тобто постулював її, можна довести п'ятий постулат і, навпаки, прийнявши п'ятий постулат, довести гіпотезу прямого кута. Постулював гіпотезу тупого кута, Д. Саккері приходять до протиріччя і, нарешті, постулює гіпотезу гострого кута (1.с. 16).

Тут Д. Саккері отримує різні наслідки, абсурдні з точки зору звичних геометричних уявлень. Наприклад:

Паралельні прямі мають або тільки один спільний перпендикуляр, в обидві сторони від якого необмежено розходяться, або не мають жодного, і, зближуючись асимптотично в одному напрямку, необмежено розходяться в іншому (1, с. 16).

Аналогічну конструкцію розглядав І. Ламберт (1766 р.). Він брав чотирикутник з трьома прямими кутами (рис. 2) і подібно Д. Саккері розглядав три гіпотези для кута при четвертій вершині.

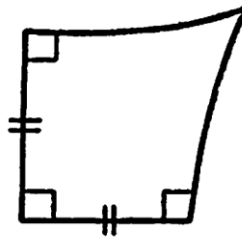


Рис. 2. Конструкція Ламберта

А. Лежандр у своєму «доведенні» п'ятого постулату розглядав три гіпотези щодо суми кутів трикутника:

1. Сума кутів трикутника дорівнює двом прямим.
2. Сума кутів трикутника більше двох прямих.
3. Сума кутів трикутника менше двох прямих (1, с. 17).

А. Лежандр довів, що перша гіпотеза еквівалентна п'ятому постулату, друга гіпотеза неможлива; прийнявши, нарешті, третю гіпотезу, він також приходять до протиріччя, неявно скориставшись в доведенні п'ятим постулатом через один з його еквівалентів (1, с. 17).

Великий російський математик М. Лобачевський (1792 – 1856), якому належить честь відкриття нової геометрії – геометрії Лобачевського, почав зі спроби доведення п'ятого постулату.

Як зазначено вище, один із еквівалентів п'ятого постулату полягає у твердженні, що через точку поза даною прямою проходить не більше однієї прямої, паралельної даній. М Лобачевський замінив п'ятий постулат наступним:

Через точку за прямою на площині проходять дві прямі, які не перетинають дану (1, с. 18).

Подібно попередникам, М. Лобачевський мав надію виявити протиріччя в системі наслідків так зміненої системи Евкліда. Однак, розвинувши свою систему до обсягу «Начал», М Лобачевський не виявив в ній суперечностей і на цій підставі зробив чудовий висновок про існування геометрії, відмінної від геометрії Евкліда, в якій п'ятий постулат не має місця. Це було в 1826 році.

На перший погляд висновок М Лобачевського може здаватися недостатньо обґрунтованим. Справді, де гарантія того, що, розвиваючи його систему далі, в кінці не буде протиріччя. Однак це заперечення відноситься і до геометрії Евкліда, так що з точки зору логічної несуперечності обидві геометрії знаходяться в рівному положенні. Більш того, як показали дослідження геометрів після М Лобачевського, між цими геометріями існує тісний зв'язок і логічна несуперечність однієї залежить від логічної несуперечності іншої.

Таким чином, обидві геометрії, Евкліда і М Лобачевського, як логічні системи рівноправні. Питання в тому, яка з цих геометрій краще відображає просторові відносини в навколишньому світі, може бути вирішене тільки досвідом. Це розумів і сам М Лобачевський, який з цією метою зробив вимірювання суми кутів астрономічного трикутника (1, с. 18).

М Лобачевський був першим, але не єдиним геометром, які уклали про існування геометрії, відмінної від геометрії Евкліда.

До висновку про існування нової геометрії прийшов також К. Гаусс (1777 – 1855), про що свідчать його висловлювання в листах до сучасників.

Три роки по тому, після виходу у світ роботи Лобачевського венгерський математик Янош Бойаї (1802 – 1860), не знаючи про дослідження М Лобачевського, опублікував роботу, в якій викладав ту ж теорію, що і М Лобачевський, але в менш розвинутій формі (1, с. 18).

Анотація. У першому тисячолітті до н. е. геометричні відомості від єгиптян перейшли до греків, у Греції почався новий етап розвитку геометрії. У період з VII по III століття до н. е. грецькі геометри не тільки збагатили геометрію численними новими фактами, але зробили також серйозні кроки до строгого її логічного обґрунтування. Робота грецьких геометрів була підсумована і систематизована Евклідом у його «Началах».

Ключові слова. Евклід, «Начала», постулат, аксіома, пропозиція.

Abstract. In the first millennium BC. Geometric information passed from the Egyptians to the Greeks, and a new stage in the development of geometry began in Greece. In the period from VII to III century BC. Greek geometers not only enriched geometry with numerous new facts, but also took serious steps toward its strict rationale. The work of Greek geometers was summarized and systematized by Euclid in his "Principles".

Keywords. Euclid, "Principles", postulate, axiom, proposition.

Література

1. А.В. Погорелов. Основания геометрии. – М.: Наука, 1979. - 152 с.

Криворучко Є. В. (студ. 1 курс)
Науковий керівник – доц. Сіра І.Т.
Харківський національний університет імені Г.С. Сковороди
(Харків, Україна)

ЖИТТЯ ТА НАУКОВІ ДОСЯГНЕННЯ ПРОВІДНОГО НІМЕЦЬКОГО ФІЛОСОФА, ЛОГІКА, ФІЗИКА, МАТЕМАТИКА Г В ЛЕЙБНІЦА



Саме Г В Лейбніц передбачив принципи сучасної комбінаторики. Створив першу механічну лічильну машину, здатну виконувати додавання, віднімання, множення й ділення. Незалежно від Ньютона створив диференціальне й інтегральне числення і заклав основи двійкової системи числення. У рукописах і листуванні, які було надруковано лише в середині 19 ст., розробив основи теорії детермінантів. Зробив вагомий внесок у логіку і філософію. Мав надзвичайно широке коло наукових кореспондентів, багато з ідей викладено в рукописах і листуванні, що ще й досі повністю не надруковано.

Народився він 1 липня 1646-го року у Лейпцигу (Німеччина), помер 14 листопада 1716 року у Ганновері. У 1661 р., у віці 14 років, Лейбніц вступив до Лейпцизького університету, де у 1663 р. отримав степінь бакалавра, з дисертацією "De Principio Individui", з якої бере початок його пізніша теорія монад. Викладання математики в Лейпцигу було поганим, і влітку 1663 р. Лейбніц навчався у Йенському університеті, де на нього вчинив великий вплив філософ і математик Ерхард Вейгель. У жовтні 1663 р. Лейбніц повертається до Лейпцига і розпочинає курс навчання до доктора права. Отримує степінь магістра філософії за дисертацію, яка поєднує аспекти філософії і права з деякими математичними ідеями, що походять від Вейгеля. Отримує степінь бакалавра права, працює над докторською дисертацією з філософії, "Dissertatio de arte combinatoria", яку надруковано у 1666 р.

Незважаючи на його неабияку на той час репутацію і визнання його праць, Лейбніцу було відмовлено у степені доктора права в Лейпцигу, тому

він негайно поїхав до Альтдорфа, де у лютому 1667 р. отримав цю степень за свою дисертацію "De Casibus Perplexis". Йому була запропонована посада професора в Альтдорфі, але Лейбніц відмовився, обравши натомість кар'єру дипломата і юриста. З 1667 до 1772 р. перебував на службі Майнського курфюрста, барона Йоганна Кристіана фон Бойнебурга, завдяки якому у 1672 р. він дістав змогу подорожувати до Парижа, де він залишатиметься до жовтня 1676 р., і до Лондона взимку 1673 р. Під час цих подорожей Лейбніц обізнався з деякими з найвидатніших вчених і філософів того часу, зокрема Арно, Малєбраншем і Гюйгенсом у Парижі, а також Гуком, Бойлем і Пеллем у Лондоні. Під час перебування у Парижі, Лейбніц розпочав дослідження з диференціального і інтегрального числення. Лейбніц надавав надзвичайну увагу питанням зручної наукової нотації, і в рукопису від 21 листопада 1675 р. він вперше використав нині загальновизнаний запис для інтегралу функції. З грудня 1676 р. до кінця свого життя Лейбніц обіймає посади надвірного бібліотекаря та канцлера у місті Ганновер.

У 1671 р. Лейбніц надрукував мемуар "Hypothesis Physica Nova", у якому намагався розробити абстрактну теорію руху. Слідом за Кеплером, стверджував, що рух залежить від дії духа.

Лейбніц шукає можливості для розширення наукових контактів. Він розпочинає листування з Ольденбургом, секретарем Лондонського наукового товариства. Восени 1672 р., з нагоди дипломатичної місії від Бойнебурга у Парижі, Лейбніц обізнається з Гюйгенсом і за його керівництвом розпочинає дослідження з теорії рядів і знаходить славетну формулу

Під впливом Гюйгенса, Лейбніц вивчає праці Паскаля, Грегорі та інших з інфінітезімальної геометрії, тобто питання дотичних до кривих, і виходить з ідеєю "функції", в сучасній термінології — похідної, таким чином винаходячи центральну концепцію математичного аналізу. Він також робить перші кроки в інтегральному численні, зокрема впроваджуючи символ для інтеграла. Ньютон написав два листа до Лейбніца, в яких повідомив про свої дослідження з аналізу, але без викладання методів. У відповідь, Лейбніц

описав деякі з своїх методів, щодо яких Ньютон зневажливо зауважив: "...не розв'язане жодне попередньо відкрите питання...".

Лейбніц виготовив механічний калькулятор, зокрема, щоб полегшити працю свого друга астронома Х. Гюйгенса, і на початку 1673 р. продемонстрував його на засіданні Королівського товариства в Лондоні. У машині Лейбніца використовувався принцип зв'язаних кілець підсумовуючої машини Паскаля, але Лейбніц ввів у неї рухомий елемент (прототип каретки настільного калькулятора), що дозволив прискорити повторення операції додавання, необхідне при перемножуванні чисел. Замість коліщат і приводів у машині Лейбніца використовувалися циліндри з нанесеними на них цифрами. Кожен циліндр мав дев'ять рядів виступів або зубців. При цьому перший ряд містив один виступ, другий ряд - два виступи і так аж до дев'ятого ряду, що містив відповідно дев'ять виступів. Циліндри з виступами були рухомими.

Спеціально для своєї машини Лейбніц застосував систему числення, що використовує дві цифри: 0 і 1. Принцип двійкової системи числення Лейбніц пояснював на прикладі коробочки з отворами: відкритий отвір означає 1, закритий - 0. Одиниця позначалася кулею, що випала, нуль - відсутністю кулі. Двійкова система числення Лейбніца знайшла згодом застосування в автоматичних обчислювальних пристроях.

Лейбніц виклав свої дослідження з математичного аналізу у декількох мемуарах, починаючи з "Nova Methodus pro Maximis et Minimis, Itemque Tangentibus, qua nec Fractas nec Irrationales Quantitates Moratur, et Singulare pro illi Calculi Genus" ("Новий метод для максимумів і мінімумів, а також дотичних, якому не заважають ні дробні, ні ірраціональні кількості, і дивовижний вид числення для цього"), надр. в Acta Eruditorum в 1684 р. Зокрема, вже перший мемуар містить нотацію dx і правила для диференціювання добутоків, часток і степенів. Оскільки жодні з результатів методу флюксій Ісаака Ньютона, який він розробляв принаймні з 1671 р., ще не було надруковано (Ньютоновські "Philosophiae Naturalis Principia

Mathematica" з'явилися лише у 1687 р.), ці публікації Лейбніца згодом призвели до надзвичайно лютої і тривалої суперечки щодо пріоритету у створенні диференціального та інтегрального числення. Так чи інакше, ідеї Лейбніца та його нотація мали набагато більший вплив на розвиток математичного аналізу протягом наступного століття, особливо на континенті.

Незважаючи на те, що проект осушування копалень в горах Гарца у 1678-1684 р.р. зазнав невдачі, під час його виконання Лейбніц розробив чимало конструкцій вітряків, pomp та інших механізмів. До того ж, завдяки накопиченим спостереженням Лейбніц перетворився на першостатного експерта з геології, сформулювавши гіпотезу, що Земля спочатку була розплавленою.

Ще одним з визначних досягнень Лейбніца був його трактат "Dynamica" з аналітичної механіки, який підсумував дослідження розпочаті у 1676 р.

Лейбніц листувався з майже усіма сучасними науковцями Європи, до його кореспондентів належало понад 600 осіб. Він переконав Фрідріха Вільгельма I заснувати Бранденбурзьке наукове товариство (пізніше - Берлінська АН) і з 1700 був його президентом. На прохання Петра I розробив проекти розвитку освіти і державного керування в Росії. Також доклав чимало зусиль для заснування наукових академій в Санкт-Петербурзі, яку було створено вже після його смерті, і у Відні.

У своїх метафізичних роботах, наприклад, "Монадологія" 1714, доводив, що все складається з незліченних елементів, монад, що знаходяться між собою в відношенні гармонії. Монади, будучи незалежними одна від одної, взаємодіють. Це означає, що християнська віра і наукове знання не повинні бути в конфлікті, і існуючий світ створений Богом як найкращий з усіх можливих світів.

Література

1.В. И. Арнольд, Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: Наука, 1989. – 96 с.

2.Volodymyr Olexijovyc Abaschnik, Leibniz-Rezeption in der Ukraine im 18. und 19. Jahrhundert. In: Nihil sine ratione. Mensch, Natur und Technik im Wirken von G.W. Leibniz. VII. Internationaler Leibniz-Kongress. Berlin, 10.-15. September 2001. Vortraege in 3 Teilen hg. von Hans Poser u.a. — Berlin: Druckhaus Berlin-Mitte, 2001, 1. Teil, S. 1-8.

3.Volodymyr Oleksijovyc Abaschnik, Vladimir Karinskij und der ukrainisch-russische Neuleibnizianismus. In: Einheit in der Vielheit. VIII. Internationaler Leibniz-Kongress (Hannover, 24. bis 29. Juli 2006). Vortraege 1. Teil, hg. v. Herbert Breger, Juergen Herbst u. Sven Erdner. Hannover: Druckerei Hartmann, 2006, S. 1-8.

4.Абашнік В. О. Ляйбніц Готтфрід Вільгельм // Велика українська юридична енциклопедія: у 20 томах. Том 2: Філософія права / Ред. С. І. Максимов. — Харків: Право, 2017. — С. 433—437.

5.Ляйбніц, Готфрід Вільгельм // Філософський енциклопедичний словник / В. І. Шинкарук (гол. редкол.) та ін. — Київ : Інститут філософії імені Григорія Сковороди НАН України : Абрис, 2002. — С. 351. — 742 с. — 1000 екз. — ББК 87я2. — ISBN 966-531-128-X.

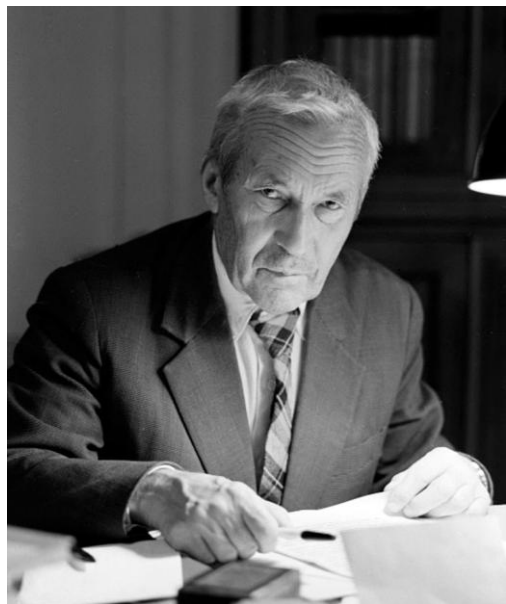
УДК 929

Кулинцова В. А. (студ.,1курс)

Научный руководитель – доц. Веневитина С. С.

*Воронежский государственный лесотехнический университет
им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, Россия)*

АНДРЕЙ КОЛМОГОРОВ – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ГЕНИЙ XX ВЕКА



Андрей Николаевич Колмогоров родился 25 апреля 1903 года в городе Тамбов. Мама его - Мария Яковлевна Колмогорова (1871-1903) умерла при родах. Отец - Катаев Николай Матвеевич, по образованию агроном (окончил Петровскую (Тимирязевскую) академию), погиб в 1919 году во время деникинского наступления.

Мальчик был усыновлён и воспитывался сестрой матери, Верой Яковлевной Колмогоровой. Тетушки Андрея в своем доме организовали школу для детей разного возраста, которые жили поблизости, занимались с ними — десятком ребятишек — по рецептам новейшей педагогики. Для

ребят издавался рукописный журнал «Весенние ласточки». В нем публиковались творческие работы учеников — рисунки, стихи, рассказы. В нем же появлялись и «научные работы» Андрея — придуманные им арифметические задачи. Здесь же мальчик опубликовал в пять лет свою первую научную работу по математике. Правда, это была всего-навсего известная алгебраическая закономерность, но ведь мальчик сам ее подметил, без посторонней помощи!

Андрей получил домашнее образование, а позднее учился в гимназии. Уже тогда, с ранних лет, проявлял интерес к математике, истории и социологии. Позднее его семья переехала в Москву. В годы Гражданской войны Колмогорову пришлось работать на строительстве железной дороги Казань—Екатеринбург. В 1918 году он поступил на математическое отделение Московского университета, досрочно сдал экзамены за первый курс.

В студенческие годы, кроме математики, Колмогоров серьёзно занимался в семинаре по древнерусской истории.

Уже на втором курсе университета Колмогоров сделал ряд математических открытий, которые принесли ему мировую известность. А дальнейшие работы поставили его в ряд ведущих математиков мира. Научные труды Колмогорова увидели свет, когда их автору исполнилось 20 лет.

Ещё в конце тридцатых годов Колмогоров начал исследовать проблемы турбулентности. В 1946 году он возвратился к этим вопросам, организовав лабораторию атмосферной турбулентности в Институте теоретической геофизики АН СССР. Параллельно с работами по этой проблеме Колмогоров продолжал успешную деятельность во многих областях математики. Вместе с С.В. Фоминым он написал учебник «Элементы теории функций и функционального анализа», выдержавший семь изданий. Учебник переведён на английский, французский, немецкий, испанский, японский, дари, чешский языки.

В 1925 г. Колмогоров окончил университет и остался в его стенах как преподаватель. В 1930 г. он получил звание профессора, в 1935 г. защитил докторскую диссертацию.

Тридцатые и сороковые годы — время творческого расцвета. Андрея Колмогорова. Он меняет представление, возможности и аппарат алгебры, геометрии, функционального анализа, создаёт целые отрасли математики, решает давно известные проблемы и ставит задачи, которые определяют развитие науки.

Наибольший интерес учёного вызывали проблемы теории вероятности, которую он до конца жизни считал своей главной специальностью. Систему аксиоматического обоснования этой науки Колмогоров построил в 30-х годах.

Во время Великой Отечественной войны Колмогоров использовал свои знания в практической деятельности: дал определение оптимальной стратегии при стрельбе из артиллерийских орудий.

Андрей Николаевич определил вероятность как меру, то есть мы можем измерять вероятность площадью. Например, при вычислении вероятности попадания пули в мишени A , B , C или D мы будем опираться на площадь каждой из мишени. Оказалось, что такой «площадной» подход отлично работает.

Для теории вероятности предложил свою аксиому, которая заключается в следующем: вероятность всех событий равна 1 (то есть в нашем случае пуля точно попадёт в одну из мишеней).

Фундамент колмогоровской аксиоматики закладывает четвертая аксиома: если пересечение множеств A и B равно пустому множеству, то вероятность A , объединённого с B , равна сумме вероятностей A и B .

Главная заслуга Колмогорова в том, что он «забыл», что такое вероятность. Он отказался от философского обоснования понятий случайности, детерминированности и т.д., но предложил аксиомы, на базе

которых можно построить работающую математическую теорию. То, что она работает, Колмогоров доказал на практике своими работами по стрельбе.

Андрей Николаевич Колмогоров умер в возрасте 84 лет 20 октября 1987 года. За всю свою жизнь он внёс огромный вклад в современную науку был автором новаторских работ по философии, истории, методологии и преподаванию математики. Многие его ученики, обретая самостоятельность, создавали собственные научные школы в математическом направлении.

Работая со своими аспирантами, Андрей Николаевич никогда не стоял на одном месте, он двигался вперёд, заканчивая свои труды либо написанной статьёй, либо новой проблематикой для своих учеников. Они же с вою очередь уже были готовы к тому, чтобы понять, что думает их учитель, загореться от него и решить проблему.

Латышева К. А. (студ., 1 курс)

Научный руководитель – доц. Вeneвитина С. С.

*Воронежский государственный лесотехнический университет
им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, РФ)*

НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ВЛАДИМИРА АНДРЕЕВИЧА СТЕКЛОВА

*«Математика – это то, чем занимаются Гаусс,
Чебышев, Ляпунов, Стеклов и я».
(академик Марков)*

Математика — это наука, исторически базированная на решении задач о количественных и пространственных пропорциях реального мира. Предмет, занимающийся изучением чисел, структур, пространств и преобразований.

Данный вид науки - способ описать мир и то, как одна его часть взаимодействует с другой. В настоящее время трудно представить, как бы существовали люди без математике, ведь всем известно: «Математика - царица всех наук».

Большой вклад в развитие математики внес Стеклов Владимир Андреевич. Я не могу не упомянуть этого человека, который посвятил всю свою жизнь математике.

Владимир Андреевич — русский математик и механик, родился 9 января 1864 в Нижнем Новгороде, в семье священника.

В школьные годы русский ученый выявил за собой способности к точным наукам: математике и физике. Так, после окончания школы, 1882 году он поступил на физико-математический факультет Московского университета. Стоит отметить, его занятия складывались в этот первый год университетской жизни неудачно, и в 1883 году он переводится в Харьковский университет. Будучи на третьем курсе, Стеклов знакомится с блистательным математиком А. М. Ляпуновым, который своими лекциями привил многим студентам любовь к точной науке, в том числе и Стеклову. Вследствие Стеклов нашёл свое призвание в математике и начал научную деятельность.

В 1887 году ученый окончил Харьковский университет.

С 1891 по 1906 гг. В. А. Стеклов преподает в Харьковском университете. Свою преподавательскую деятельность он начинает, читая лекции по теории упругости. В 1894 г. он получает степень магистра прикладной математики, защитив диссертацию на тему «О движении твердого тела в жидкости». В 1896 г. его назначают исправляющим должность экстраординарного профессора по кафедре механики, и в этой должности он читает курсы по теории управления, теоретической механике и линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. В 1902 г. В. А. Стеклов становится ординарным профессором, защитив диссертацию на тему «Общие методы решения основных задач математической физики». С 1902 по 1906 гг. он является председателем Харьковского математического общества. Помимо Харьковского университета, Владимир Андреевич принял активное участие в создании

Харьковского технологического института (1893), где преподавал с 1893 по 1905 г.

К этому времени Владимир Андреевич уже являлся выдающимся учёным, известным благодаря своим научными трудам в области механики и математической физики. Карьерный рост Стеклова набирал обороты.

Основные его труды относятся к математической физике и к теории дифференциальных уравнений. Значительным направлением математик считал приложение математического метода к вопросам естествознания. Он одним из первых понял, что ни одна из наук в будущем не обойдется без формальной науки, без ее точных методов. Исходя из этого, Владимир Андреевич требовал полной ясности и научной строгости.

В большинстве работ по математической физике Стеклов занимался вопросом разложения функции в ряды по наперед заданным ортогональным системам. Именно он ввел в математику свой особый метод сглаживания функций, так впоследствии и названный – функции Стеклова, применяемая для решения задач, связанных с представлением функций в виде рядов по системам собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

В 1906 году Стеклов переезжает в Санкт-Петербург, где до 1919 года работает в Санкт-Петербургском (Петроградском) университете в должности профессора. Преподавание математики он усовершенствовал введением практических занятий (впервые примененных им в Харьковском университете). Среди наиболее известных его учеников — А. А. Фридман, Я. Д. Тамаркин, В. И. Смирнов, Я. В. Успенский

В 1912 году Стеклова избрали действительным членом Петербургской Академии наук. После революции он немало сделал для реорганизации бывшей Императорской Академии наук в Академию наук СССР. В 1919 году он стал вице-президентом РАН.

Даже в тяжёлые послереволюционные годы ученый сумел нормализовать издательство научных трудов, восстановление некоторых физических лабораторий, а также добился получения новых приборов и

литературы из-за границы. В 1921 году по его инициативе был создан Физико-математический институт, позже разделившийся на три самостоятельных научных учреждения. На основе Института математики со временем также организовались самостоятельные институты, два из которых – Математический институт им. В. А. Стеклова и Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова – носят ныне его имя.

Основные работы В. А. Стеклова, их численность составляет более 150 трудов, относятся к математической физике, механике, квадратурным формулам теории приближений, асимптотическим методам, теории замкнутости, ортогональным многочленам. Его создания по уравнениям в частных производных относятся к электростатике, колебаниям упругих тел, задачам распространения тепла. Он дал полное теоретическое доказательство решений задачи о распространении тепла в неоднородном стержне при заданном начальном условии и граничных условиях на концах стержней, а также задачи о колебании неоднородной струны или стержня при определенных начальных и граничных условиях.

Им были получены обширные результаты в решении задач Дирихле и Неймана.

Владимиром Андреевичем Стекловым был опубликован также ряд работ, посвященных актуальным вопросам научно-организационной и научно-педагогической деятельности, таких как «О двух ученых степенях»; «Ученые степени, личный состав, порядок избрания и сроки службы профессоров и доцентов». Помимо этого, ему принадлежат труды по истории науки, например, биографические очерки о М. В. Остроградском, Н. И. Лобачевском и других отечественных и зарубежных математиках, а также научно-популярные работы, среди которых особое место занимает монография «Математика и ее значение для человечества», не потерявшая своей актуальности и сегодня.

В 1924 году Стеклов совершил путешествие в Америку, результатом которого стала книга «В Америку и обратно. Впечатления».

Владимир Андреевич очень любил музыку. По его словам, у него был «большой» голос и он даже думал в юности о карьере певца. Всю свою жизнь он с любовью, воодушевляясь, часто разговаривал о музыке, вспоминал различные произведения русской музыки и даже напевал отрывки из любимых им опер.

Стеклов умер в крымском посёлке Гаспре. 30 мая 1926 года в 11 часов 30 минут учёного не стало, он умер мгновенно, на ногах, от болезни сердца.

6 июня тело Владимира Андреевича Стеклова, в дубовом гробу, привезли в Ленинград. Траурная процессия прямо с Московского вокзала направилась к Волкову кладбищу, где состоялись похороны. Монументом учёному служит могильный камень с надписью: «Академик Владимир Андреевич Стеклов. 1863 – 1926».

Раменская А. С. (студ., 1 курс)
Научный руководитель - ст. преп. Спирина Н.М. (студ., 1 курс)
*Воронежский государственный лесотехнический университет
им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, РФ)*

ЗОЛОТЫЕ ЧИСЛА МАТЕМАТИКИ В ФИЛОСОФИИ

«Если есть в мире законы, которым повинуются все на свете, и люди и боги, - то это, прежде всего законы математические. Кто знает математику, тот знает то, что выше богов».

Пифагор

Нас окружают удивительные вещи, созданные человечеством для удобства. Лифт – для облегчения поднимания на высоту, автомобиль – для легкости перемещения на расстояния, холодильник – сохранение пищи долгое время съедобной. Все эти изобретения стали возможными благодаря непрерывному познанию человеком окружающего мира, накоплению и передачи знаний.

Есть множество методов изучения мира, что взрастил нас, но математические наиболее логичные и достоверные по сути своей. О них (наиболее древних и самых современных) мы и узнаем.

Самое известное число математики в философии – это золотое число (лат. *Sectio aurea*). Золотое сечение, или золотая пропорция - идеальное соотношение величин, лежащее в основе гармонии природы и человека. «Золотое сечение» имеет массу удивительных свойств, возможно, именно поэтому, ему приписывается некое божественное происхождение и ряд вымышленных свойств. Это соотношение величин или отрезков, при котором отношение большей части к меньшей равно отношению всей величины к большей части. Приблизительное округленное процентное соотношение частей - 62% и 38%.

Числовая величина золотого сечения – 1, 6180339887

Зачатки этого понятия встречаются еще в античной литературе, датированной 300 гг. до нашей эры, а «божественная пропорция» широко применялась в трудах и работах мастеров Эпохи Возрождения. Иоганн Кеплер, астроном 16 в. назвал золотое сечение одним из сокровищ геометрии. Он впервые обращает внимание то, как это число проявляется в ботанике. Используемое в архитектуре, живописи, создании форм предметов по сей день золотое сечение оставило неизгладимый след в познании.

Также, весьма интересна в познании человека и мира пифагорейская нумерология – единственная, которая дожила до наших времен практически в полном объеме и до сих пор используется для предсказаний будущего, определения жизненного пути и многого другого. Её расчеты наиболее доступны и приспособлены под русский язык, в отличие от Китайской или Каббалистической нумерологии.

Пифагор и его последователи, считали, что число – есть сущность всех вещей, а не просто ее проявление. Через цифры, на земле проявляются музыкальные вибрации Вселенной, которые поступают с определенной частотой и воздействуют как на всю нашу планету в целом, так и на каждого

человека в частности. Великий ученый утверждал, что числа управляют миром и только с их помощью человек сможет изменить свою жизнь в лучшую сторону.

Сущность этой идеи в том, что самыми главными числами являются от 1 до 4, при сложении дающие 10, а это священное число, которое символизирует собой единство Вселенной в ее материальном и метафизическом воплощении. Рассуждения Пифагора о числах представляет попытку свести все явления к числовым отношениям и рассматривать числа как непреходящую сущность вещей.

Как все числа составлены из чета и нечета, так и все вещи соединяют в себе противоположности, так же каждая вещь рассматривалась как примирение противоположностей. Пифагорейцы считали четные числа женскими, а нечетные мужскими. По теории Пифагора, все числа, большие 10, могут быть сокращены до цифр от 1 до 9 включительно, поскольку они являются исходными числами, из которых могут быть получены все другие. Четыре числа, составляющие тетраду - один, два, три, четыре - имеют прямое отношение к музыке: они задают все известные консонантные интервалы - октаву (1:2), квинту (2:3) и кварту (3:4).

Но изначально философия объединяла все науки, будучи предтечей их. Поэтому весьма полезно и необходимо здесь число Авогадро — одна из важных физических постоянных, сыгравших большую роль в развитии естественных наук. Число Авогадро (константа Авогадро, постоянная Авогадро) определяется как количество атомов в 12 граммах чистого изотопа углерода-12 (^{12}C). $N_A = 6,02214082(11) \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$. Один моль (грамм-моль) вещества имеет массу (молярную массу), которая, будучи выраженной в граммах, численно равна молекулярной массе этого вещества (выраженной в атомных единицах массы). Например: 1 моль натрия имеет массу 22,9898 г и содержит (примерно) $6,02 \cdot 10^{23}$ атомов, 1 моль фторида кальция CaF_2 имеет массу $(40,08 + 2 \cdot 18,998) = 78,076 \text{ г}$ и содержит (примерно) $6,02 \cdot 10^{23}$ молекул.

Данная величина весьма важна для различных физико-химических измерений, которые неразрывно связаны с дальнейшим изучением естественнонаучных дисциплин.

Выводы. Рассмотрев подобные числа, я хотела показать их влияние на развитие общества в целом. Создавалась музыка, строились здания, изобретались машины. Да, данных чисел гораздо больше в нашей Вселенной, но данные числа наиболее близки и понятны мне. Многие открытия и методы изучения были бы невозможны без числа Авогадро, без золотого сечения. Та же монада Пифагора сильно повлияла на философские воззрения различных наций мира. И, сейчас, создавая новые подходы к изучению непознанного, не стоит забывать о ключевых «золотых» числах математики, играющих важную роль.

***Аннотация.** В статье рассматриваются наиболее известные числа, используемые в философии, приведены примеры использования данных числовых значений в научно-техническом прогрессе; показана роль математики в развитии философии и изучении естественнонаучных дисциплин.*

***Ключевые слова:** числа математики, число Авогадро, золотое сечение.*

***Abstract.** The article discusses the most famous numbers used in philosophy, provides examples of the use of these numerical values in scientific and technological progress; shows the role of mathematics in the development of philosophy and the study of natural science disciplines.*

***Key words:** math numbers, Avogadro number, golden ratio.*

Литература

1. Ковалев, Ф. В. Золотое сечение в живописи / Ф.В. Ковалев. - М.: РИП-Холдинг, 2013. - 192 с.
2. Вече. Живой Кристалл. Матрица Золотого Сечения: моногр. . - М.: Золотое Сечение, 2009. - 192 с.
3. Число Авогадро // Физическая энциклопедия. — Советская Энциклопедия, 1998. — Т. 5. — С. 275.
4. Жуков, А.В. Вездесущее число "пи" / А.В. Жуков. - Москва: Огни, 2017. - 397 с.

Раменская А. С. (студ., 1 курс)
Научный руководитель - ст. преп. Спирина Н.М. (студ., 1 курс)
*Воронежский государственный лесотехнический университет
им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, РФ)*

ПРОГРЕССИВНЫЕ ИДЕИ НАУЧНЫХ ТРУДОВ Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

Великий математик Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря (20 ноября) 1792 года в Нижнем Новгороде в бедной семье мелкого чиновника.

Девятилетним мальчиком он был привезен матерью в Казань и ее стараниями устроен вместе с двумя братьями в гимназию на казенное содержание, С этого времени его жизнь и работа протекают в Казани [1].

В гимназии, как мы знаем по "Воспоминаниям" С.Т.Аксакова, увлекательно преподавал математику талантливый учитель Г.И.Карташевский, воспитанник Московского университета. Он поставил изучение математики на значительную высоту. И когда юный 14-летний Лобачевский становится в феврале 1807 года студентом университета (тоже казеннокоштным), он уже вскоре проявляет особенную склонность к изучению физико-математических наук, обнаруживая выдающиеся способности.

3 августа 1811 г. Лобачевский утверждается магистром. Представив два научных исследования по механике и по алгебре ("Теория эллиптического движения небесных тел" (1812 г.) и "О разрешимости алгебраического уравнения $x^n - 1 = 0$ " (1813 г.), он был ранее срока в 1814 г. произведен в адъюнкт-профессоры (доценты) [2].

Со следующего года он самостоятельно преподает, постепенно расширяя круг читаемых им курсов и уже задумываясь над перестройкой начал математики. Еще через год он получает звание экстраординарного профессора.

С 1919 года, для искоренения «...враждебного инакомыслия в учении...» попечителем Казанского учебного округа был назначен Магницкий, который и приступил к энергичному "обновлению университета", увольняя инакомыслящих и тех, кто не желал подчиняться его руководству о «добродетели». Была установлена тщательная слежка за содержанием лекций и студенческих записок и введен суровый казарменный режим для студентов.

Семь лет этой церковно-полицейской системы принесли Лобачевскому тяжелые испытания. Выдержать этот гнет ему помогла только его обширная и многообразная научная и педагогическая деятельность.

Лобачевский упрямо работает над строгим построением начал геометрии. Первые следы этой работы есть ещё в студенческих записках его лекций по геометрии за 1817 г. Об ней же свидетельствует рукопись учебника "Геометрия" и его "Обозрения преподавания чистой математики" за 1822 - 1823 и 1824 - 1825 гг. И разрывая оковы тысячелетних традиций, Лобачевский приходит к созданию новой геометрии. 23 (11) февраля 1826 г. он делает на факультете доклад о новой "Воображаемой геометрии" где опровергает евклидовую аксиому о параллельных прямых[3].

Данная аксиома Евклида утверждает, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более чем одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая её (в евклидовой геометрии такие прямые называют параллельными). В геометрии Лобачевского эта аксиома заменяется следующей: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её (достаточно, чтобы это было выполнено для одной точки и одной прямой).

Этот доклад "Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных" был передан на отзыв профессорам И.М.Симонову, А.Я.Купферу и адъюнкту Н.Д.Брашману. Лобачевский хотел знать мнение своих сотрудников об открытии, величие

которого он сознавал, и просил принять своё сочинение в предполагаемое издание "Учёных Записок" отделения.

Но отзыва не последовало. Рукопись доклада до нас не дошла. Материал этого доклада был включен Лобачевским в его первое сочинение "О началах геометрии", вышедшее в 1829 - 1830 гг. в "Казанском вестнике".

Новый попечитель Казанского учебного округа М.Н.Мусин-Пушкин сумел оценить кипучую деятельную натуру Н.И.Лобачевского. Великого геометра избирают вскоре, в 1827 г., ректором и 19 лет он самоотверженно трудится на этом посту, добиваясь расцвета Казанского университета.

И вместе с тем он находит время для непрерывных и обширных научных исследований, посвященных, главным образом, развитию новой геометрии. Его идеи были настолько непривычны, глубоки и новы, он настолько обогнал свою эпоху, что современники не смогли понять его и правильно оценить. Его первая работа "О началах геометрии" (1829 - 1830 гг.) была представлена Советом университета в 1832 г. в Академию наук. Но даже академик М.В.Остроградский не понял ее значения и дал на нее отрицательный отзыв.

С 1835 по 1838 гг. он публикует свою наиболее обширную работу "Новые начала геометрии с полной теорией параллельных". Наконец, в 1840 г. выходят на немецком языке "Геометрические исследования по теории параллельных", где содержится предельно ясное и лаконичное изложение его основных идей.

За год до смерти он закончил свой последний труд "Пангеометрия", диктуя его своим ученикам, так как из-за болезни Н.И. Лобачевский ослеп.

24 (12) февраля 1856 г. кончилась жизнь великого ученого, целиком отданная русской науке и Казанскому университету.

Выводы. Николай Иванович Лобачевский был неординарным человеком, идущим до конца и заботящимся об окружающих. Его открытия предвосхитили бег времени, породив насмешку над ним, но в памяти своих учеников он остался именно Учителем, принесшим своим ученикам

бесценные плоды знаний. Данные формулы геометрии, открытые Лобачевским, используются в физике высоких энергий (для расчета ускорителей заряженных веществ). Геометрия Лобачевского просматривается в структуре кораллов, в организации клеточной структуры у растений, у некоторых цветов [4].

Аннотация. В статье рассматривается деятельность основоположника неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевского, его теории и годы преподавания; рассматривается предложенная этим ученым неевклидова геометрия.

Ключевые слова: Лобачевский, геометрия Лобачевского, неевклидова геометрия.

Abstract. The article considers the activity of the founder of non-Euclidean geometry N. I. Lobachevsky, his theories and years of teaching; the non-Euclidean geometry proposed by this scientist is considered.

Key words: Lobachevsky, Lobachevsky geometry, non-Euclidean geometry.

Литература

1. Jesse, Russell Лобачевский, Николай Иванович / Jesse Russell. - М.: VSD, 2012. - 659 с.
2. Атанасян, Л. С. Геометрия Лобачевского / Л.С. Атанасян. - М.: Лаборатория знаний, 2017. - 577 с.
3. Атанасян, Л.С. Геометрия Лобачевского / Л.С. Атанасян. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. - 990 с.
4. Делоне, Б. Н. Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского / Б.Н. Делоне. - М.: Издательство Академии Наук СССР, 1982. - 128 с.

МОДЕЛІ ГЕОМЕТРІЇ ЛОБАЧЕВСЬКОГО

Геометрія Лобачевського представляє теорію, багату змістом і має застосування як в математиці, так і у фізиці. Історичне її значення полягає в тому, що її побудовою Лобачевський показав можливість геометрії, відмінної від евклідової, що знаменувало нову епоху в розвитку геометрії і математики.

Джерелом геометрії Лобачевського послужив питання про аксіому про паралельні, яка відома також як V постулат Евкліда. Цей постулат, зважаючи на його складність у порівнянні з іншими, викликав спроби дати його доказ на підставі інших постулатів.

23 лютого 1826 російський математик Микола Іванович Лобачевський (1792-1856р) на засіданні фізико-математичного факультету Казанського університету проголосив про створення нової геометрії, названої ним *«уявною геометрією»*. Ця геометрія була заснована на тих же традиційних постулатах і аксіомах геометрії, як і у Евкліда (330-275 р. до н. е.), але з заміною його п'ятого постулату про паралельні: *«на площині через точку, взяту поза даною прямою, можна провести одну і тільки одну пряму, паралельну даній прямій, а всі інші прямі, що проходять через цю точку, перетинаються з даною прямою »*, на новий п'ятий постулат про паралельні: *«на площині через точку, взяту поза даною прямою, можна провести дві і тільки дві прямі, паралельні даній, а також нескінченна безліч прямих, що не перетинаються з даною прямою і їй не паралельні, і нескінченна безліч прямих, які перетинаються з даною прямою »*. [1]

Повне визнання і широке поширення геометрія Лобачевського отримала через 12 років після його смерті, коли стало зрозуміло, що наукова теорія, побудована на базі деякої системи аксіом (вихідних положень, прийнятих без доказу) вважається тільки тоді повністю завершеною, коли ця

система аксіом задовольняє трьома умовами : незалежності, несуперечності і повноти. Саме цим властивостям і задовольняє геометрія Лобачевського.

Розглянемо деякі моделі геометрії Лобачевського.

Доказ несуперечності геометрії Лобачевського проводиться за допомогою побудови інтерпретації (моделі). Першою такою інтерпретацією з'явилася *інтерпретація Бельтрамі* [2]. Еудженіо Бельтрамі знайшов модель для неевклідової геометрії, показавши у своїй праці “Досвід інтерпретації неевклідової геометрії” (1868р.), що разом з площинами, на яких здійснюється евклідова геометрія, і сферичними поверхнями, на які діють формули сферичної геометрії, існують і такі реальні поверхні, названі ним псевдосферами, на яких частково здійснюється планіметрія Лобачевського (рис. 1).

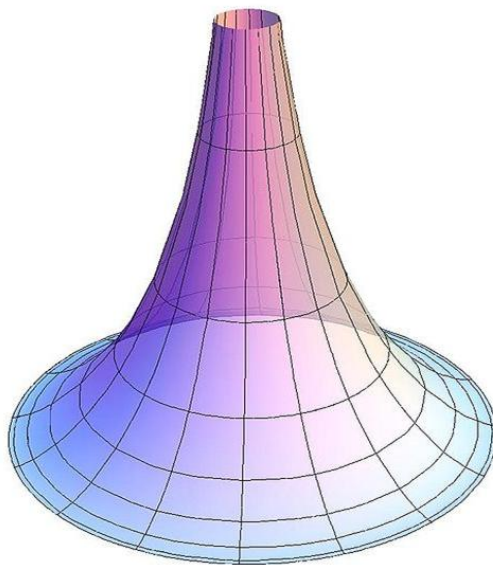


Рис.1. Інтерпретація Бельтрамі [3]

Геометрію Лобачевського називають також *гіперболічною* на тій підставі, що для опису математичних співвідношень даної геометрії були використані *гіперболічні функції*

$$\begin{aligned} sh(x) &= \frac{a^x - a^{-x}}{2} \\ ch(x) &= \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \end{aligned}$$

введені в XVIII столітті італійським математиком Вінцент Рікатті, де $e \approx 2,71828$ - число, введене Джоном Непером.

Наступна модель - це *модель Клейна*, яка є першою повноцінною моделлю геометрії Лобачевського.. За допомогою неї вдалося довести несуперечність геометрії Лобачевського в припущенні несуперечності Евклідової геометрії.

Площиною служить середина кола, прямою - хорда кола без кінців, а точкою - точка всередині кола (рис. 2). «Рухом» назвемо будь-яке перетворення кола в самого себе, яке переводить хорди в хорди. Іншими словами, «рух» це проєктивні перетворення, яке зберігає коло. Рівними називаються фігури всередині кола, що переходять одна в іншу такими «рухами».

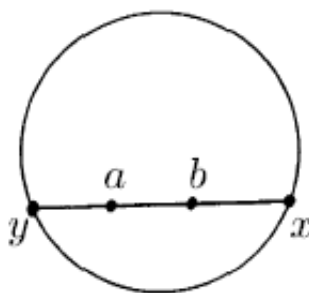


Рис.2. Модель Клейна

Точками моделі Клейна є внутрішні точки деякого кола. Відстань між точками a і b визначається як $p(a, b)$ для інтервалу (x, y) , де x і y точки перетину прямої ab з граничною окружністю даного кола. Якщо точки розташовані в такому порядку, як на рис. 2, то $\ln[a, b, x, y] > 0$. тобто

$$p(a, b) = \ln[a, b, x, y].$$

У моделі Клейна прямими є хорди кола та існує перетворення площини, яке зберігає подвійне відношення, яку переводить дане коло в себе і переводить його центр в довільну внутрішню точку.

Наступна *модель Пуанкаре*. Ця модель була запропонована Анрі Пуанкаре у 1882 році.

Дві зелені прямі паралельні до синьої прямої, а фіолетова ультрапаралельна до неї.(рис. 3)

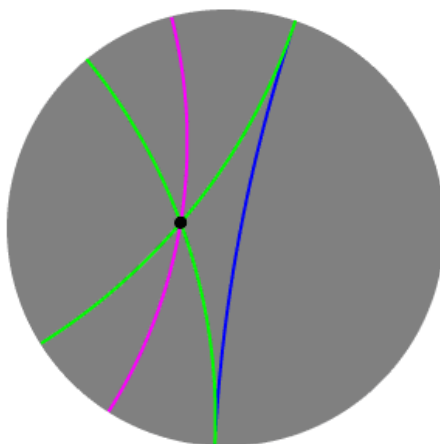


Рис. 3. Модель Пуанкаре [3]

Модель Пуанкаре чудова тим, що в ній кути зображаються звичайними кутами.

Геометрія Лобачевського продовжує розроблятися багатьма геометрами; в ній вивчаються: вирішення завдань на побудову, багатогранники, правильні системи фігур, загальна теорія кривих і поверхонь і т. п. Ряд геометрів розвивали також механіку в просторі Лобачевського. Ці дослідження не знайшли безпосередніх застосувань у механіці, але дали початок плідним геометричним ідеям. У цілому геометрія Лобачевського є великою областю дослідження, подібно геометрії Евкліда.

Література

- 1.Іовльов М.М. Введення в елементарну геометрію і тригонометрію Лобачевського. - Москва, 1930.
- 2.Попов А. Г. Псевдосферическіе поверхні - window.edu.ru / window / catalog? p_rid = 20725 / / Соросівський освітній журнал. - ISSEP, 2004. - Т. 8. - № 2. - С. 119-127
- 3.<https://e3e33bfe-a-62cb3a1a-sites.googlegroups.com/site/paralelnipramivnasomuzitti/home/lobacevci/>

Сердюк О.В.(студ., 1 курс)
Науковий керівник - ст. викл. Михайленко І.В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

РЕТРОСПЕКТИВНИЙ АНАЛІЗ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Логіка має довгу і багату історію. Логіка як наука пройшла в своєму розвитку складний шлях від аристотелівської логіки до сучасних неklasичних логік і охоплює часовий проміжок у 25 століть. Виникненню логіки як теорії передувала практика мислення, що йде вглиб тисячоліть. З розвитком трудової, матеріально-виробничої діяльності людей йшло поступове вдосконалення і розвиток їх розумових здібностей, перш за все здібності до абстракції і висновку. А це рано чи пізно, але неминуче повинно було привести до того, що об'єктом дослідження стало саме мислення з його формами і законами. Розвиток логіки як науки значною мірою стимулювався проблемою пошуку універсального методу доведень.

Математична логіка як самостійний розділ сучасної математики сформувався відносно нещодавно - на рубежі дев'ятнадцятого і двадцятого століть. Виникнення і швидкий розвиток математичної логіки були пов'язані з так званою кризою основ (засад) математики, одним з проявів якої є відомі парадокси або антиномії канторівської теорії множин.

Батьком математичної логіки вважається Лейбніц (XVII ст.), який вперше запропонував ідею побудови логічних числень з використанням формалізованих мов. Основи ж сучасної двозначної математичної логіки, яку часто називають класичною, були закладені тільки в другій половині XIX ст. в наукових працях Буля, де Моргана, Фреге, Пірса, Джевонса, Шредера, Пеано та ін.

Буль – один із засновників математичної логіки - в основу своїх досліджень поклав аналогію між алгеброю і логікою та розробив відповідне логічне числення, в якому застосував закони й операції математики. Алгебрологічний метод дав можливість Булю виявити нові типи висновків,

які не враховувались у традиційній силогістиці. Він детально проаналізував закони комутативності, асоціативності та дистрибутивності.

Де Морган – засновник логічного аналізу - сформулював основні принципи логіки висловлювань і логіки класів. У математичній логіці Морган сформулював закони, які носять його ім'я.

Фреге заклав основи логічної семантики. У своїй фундаментальній праці «Основні закони арифметики» він побудував систему формалізованої арифметики на основі розробленого ним розширеного числення предикатів з метою обґрунтування ідеї зведення математики до логіки. Ідеї Фреге багато в чому наперед визначили розвиток логіки ХХ ст. Він першим увів поняття багатомісного предиката та символи для позначення кванторів. Пірс – родоначальник семіотики (загальної теорії знаків) - у своєму численні використовував як строгу, так і нестрогу диз'юнкції. Він також сформулював закони матеріальної імплікації – імплікації, що використовується в класичній матлогіці. Дещо пізніше (десь до середини ХХ ст.) великий вклад у розвиток математичної логіки внесли Гільберт, Уайтхед, Рассел, Пеано та ін. [1].

Подальший розвиток класичної математичної логіки був пов'язаний, в основному, з запитамі математики та кібернетики. Великі заслуги тут належать Брауеру, Льюїсу, Лукасевичу, Геделю, Посту, Гейтінгу, Колмогорову, Новікову, Генцену, Мальцеву, Заде та іншим відомим математикам та логікам.

На початку ХХ ст. в математичній логіці появляються нові напрями в її розвитку – це так звані некласичні логіки (НЛ). НЛ – це логічні системи, в основі яких лежить інше, ніж у класичній математичній логіці тлумачення традиційних логічних операцій: заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації та кванторів.

Символіка та мова математичної логіки дають змогу стисло і точно описувати означення математичних понять, формування теорем та їх доведень. Математична логіка дає викладачеві нові засоби для формування у студентів навичок логічного мислення.

Характерною особливістю математичної логіки є використання математичної мови символів, операцій, формул, обчислень, числень, рівносілних перетворень тощо.

Розуміння формальних методів і моделей, уміння ними користуватися, знання й володіння законами математичної логіки є необхідним етапом у процесі вивчення спеціальних дисциплін при навчанні у технічному університеті. В епоху комп'ютеризації всіх сфер людського буття – виробництва, економіки, наукових досліджень, освіти, побуту – знання основ математичної логіки необхідне для формування фахівця у будь-якій галузі діяльності, розвинення в нього аналітичного і творчого мислення, ефективного використання обчислювальної техніки. Вивчення й засвоєння мови та методів сучасної формальної логіки сприяє набуттю навичок правильних міркувань і переконливої аргументації, чіткого формулювання думок і висновків, формування загальної культури мислення. Ці навички необхідні й корисні в усіх сферах людської діяльності.

Розвиток інформаційних технологій та програмування зумовлює невідпинне розширення сфери застосування математичної логіки. Стосовно загальносвітоглядного аспекту поняття і методи математичної логіки дають обґрунтування правильності тих чи інших способів отримання істинного знання. Щодо прагматичного аспекту апарат математичної логіки належить до основних засобів моделювання різноманітних предметних областей, він є основою, ядром сучасних інформаційних систем. З кожним роком зростає глибоке проникнення ідей та методів математичної логіки в інформатику, обчислювальну математику, лінгвістику, філософію.

Висновки. Логіка – наука про закони мислення. Математична логіка є наукою про закони математичного мислення. Предметом математичної логіки є математичні теорії в цілому, які вивчають за допомогою логіко-математичних мов. При цьому в першу чергу цікавляться питаннями несуперечливості математичних теорій та їх розв'язуваності. Серед областей, які використовують математичну логіку незамінним чином при

розробці своїх міркувань та аргументів, виділяються філософія, теорія множин, теорія чисел, конструктивна алгебраїчна математика та мови програмування.

Література

- 1.Стяжкин Н.И. Формирование математической логики / Н. И. Стяжкин. –М.: Наука, 1967. – 508 с.
2. https://arm.naiau.kiev.ua/books/logika/lections/lection1_5.html
3. Шкільняк С.С. Математична логіка; Основи теорії алгоритмів : навч. посіб. / С. С. Шкільняк. — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2009. — 280 с.

УДК 929 : 63

Сльота О. Л. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – доц. Овсієнко Ю. І.

Полтавська державна аграрна академія (Полтава, Україна)

ІСТОРИЧНІ АСПЕКТИ РОЗВИТКУ МЕХАНІЗАЦІЇ СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА НА ПОЛТАВЩИНІ

Полтавщина – одна із найрозвиненіших сільськогосподарських областей України, має вигідне географічно-кліматичне розташування, багаті чорноземні ґрунти, густу мережу річок, корисні копалини, що сприяє її господарському розвитку [1, с. 9-10]. У 1865 році у місті Полтава групою громадських діячів краю на чолі із Василем Кочубеем було організовано перше сільськогосподарське товариство. «...Маючи широкий діапазон функцій, вони здійснювали успішну пропаганду передових агротехнічних знань, активно дбали про підвищення ефективності сільськогосподарського виробництва, займалися комерційною діяльністю.» [5]. Згодом, восени 1895 року в Полтаві відбулося урочисте відкриття школи садівництва і городництва, вона стала центром пропаганди передового сільськогосподарського досвіду. З 1896 року Полтавське сільськогосподарське товариство розпочало видавництво щомісячника «Хуторянин», де висвітлювалася діяльність губерньського та повітового земства, успіхи і проблеми сільського господарства, подавалися поради спеціалістів, рекламувалася сільськогосподарська техніка, сортове насіння, породи худоби та ін. (рис. 1).

Вперше у Полтаві у 1895 році Полтавське губернське земство порушило перед урядом клопотання про організацію у місті сільськогосподарського інституту, але його відхилили, вдруге – у 1909 році, на честь 200-річчя перемоги в Полтавській битві, і знову клопотання було відхилене Державною думою [4].

В Україні початок індустріалізації сільського господарства припадає на 1923 рік, коли завод «Красный путиловец» (зараз група компаній «Кіровський завод») випустив першу партію тракторів «Фордзон». З 1930 року було налагоджене масове виробництво тракторів, що надало можливість відмовитись від їх імпорту [1, с. 7].



Рис. 1. Фото-фрагменти щомісячника «Хуторянин» (Народний музей історії Полтавської державної аграрної академії)

Після революційних подій, особливо з 1926 – 1927 років, база промисловості Полтавщини зміцнилася: розширено діючі підприємства, реорганізовано залізничні майстерні у паровозоремонтний завод; розгорнулася реконструкція ремонтно-механічного заводу «Метал» (ТОВ «Полтавський ремонтно-механічний завод»): ремонт техніки, виготовлення для текстильних фабрик устаткування, що раніше ввозилося з-за кордону.

Гостра потреба у кваліфікованих кадрах для народного господарства обумовила необхідність відкриття в місті нових навчальних закладів. Грудень 1919 р. знаменується заснуванням вищого сільськогосподарського навчального закладу на Полтавщині, що спочатку був як

сільськогосподарський факультет при Вищій робітничій школі. Подія відбулася завдяки підтримці видатного вченого-натураліста, академіка В. І. Вернадського, який у той час перебував у Полтаві [4]. У 1921 році факультет був реорганізований у сільськогосподарський технікум, потім – у агрокооперативний технікум, в 1929 році – у сільськогосподарський інститут, який через рік був реорганізований у факультет інженерів сільськогосподарського будівництва.

Наприкінці XIX - початку XX ст. перебудова сільського господарства відбувалася разом із індустріалізацією. «...На кінець першої п'ятирічки область стала одержувати у великій кількості сучасну техніку: трактори, сівалки, багатолемішні плуги, ... почалося масове виробництво таких механізмів, які раніше взагалі не застосовувалися на селі: комбайнів, кукурудзозбиральних машин, тракторних сінокосарок, універсальних сівалок та ін....» [1, с. 13]. Із ростом технічної оснащеності сільського господарства з'явилася потреба у створенні підприємств промислового типу – машинно-тракторні станції (МТС) і для сільського господарства [1, с. 14]. «...Нова техніка, що прийшла на село, сприяла появі нових професій, що стали різновидом індустріальних професій: тракторист, комбайнер, механік, електрик, інженер-механік та ін. ...» [1, с. 23].

Для підготовки фахівців робітничих професій у 1930 році в місті Хорол Полтавської області було засновано Хорольський технікум механізації сільського господарства, який спочатку був реальним училищем, згодом – професійною технічною школою, а потім – індустріальним технікумом. Виробниче навчання студенти проходили в МТС, де виконували, за браком фахівців, обов'язки бригадирів тракторних бригад, дільничних механіків. З 1957 року у технікумі відкрито заочне відділення зі спеціальності «Механізація сільського господарства», а в 1965 році відкрито спеціальність «Механізація та електрифікація тваринництва» [4].

Стрімкий розвиток сільськогосподарської машинобудівної галузі вимагав зміщення акцентів і в освітній сфері. На території Полтавщини ще

один навчальний заклад розпочав свою діяльність у 1929 році, коли було організовано сільськогосподарський технікум імені Петровського, де у 1948 році відкрилося відділення механізації. Пізніше до технікуму були приєднані інші навчальні заклади: Полтавська школа по підготовці голів колгоспів (1956 р.), Красногорівський сільськогосподарський технікум (1978 р.), Писарівський зоотехнікум (1978 р.) [3].

Механізація основних видів робіт на селі відкрила простір для розвитку продуктивних сил галузі на базі колгоспів і радгоспів, що стало рушієм розвитку сільськогосподарського машинобудування. Збільшення представників робочих професій ставило перед суспільством нові вимоги до підготовки керуючих кадрів. Так, наказом Міністерства сільського господарства СРСР від 18 квітня 1966-го в Полтавському сільськогосподарському інституті (нині Полтавська державна аграрна академія) було засновано новий факультет механізації сільського господарства [2, с. 148-167]. За період існування факультету підготовлено понад 6500 інженерів-механіків сільськогосподарського виробництва.

На Полтавщині немає жодного господарства чи агропромислового підприємства, де не працювали б випускники інженерно-технологічного факультету Полтавської державної аграрної академії. Їх можна також зустріти майже в усіх областях України і в близькому зарубіжжі.

***Анотація.** У роботі проведено дослідження окремих аспектів історії розвитку механізації сільського господарства на Полтавщині, зокрема акцентовано увагу на невід'ємному поєднанні суспільних запитів із формуванням сільськогосподарської освіти.*

***Ключові слова:** механізації сільського господарства, індустріалізація, навчальний заклад.*

***Summary.** The article studies the basic aspects of the history of agricultural mechanization in the Poltava region, and especially focuses on the connection between the needs of society and the formation of agricultural education.*

***Key words:** agricultural mechanization, industrialization, educational institution.*

Література

1. Копотун І. А. Від сохи до рала, або історія індустріалізації сільського господарства Полтавщини. Полтава : БАТ «Видавництво «Полтава», 2006. - 744 с.

2. Полтавська державна аграрна академія. 100 років звершень / за ред. А. А. Кочерги та ін. Кам'янець-Подільський : ТОВ «Друкарня «Рута», 2020. - 352 с.
3. ВСП "Березоворудський фаховий коледж ПДАУ ... – ПДАА : сайт. URL: <https://www.college-brudka.com.ua> (дата звернення: 05.04.2020).
4. Історія коледжу | Відокремлений структурний підрозділ ... : сайт. URL: <http://xapkpdaa.org.ua/istoriia-koledzhu/> (дата звернення: 05.04.2020).
5. Полтава. Исторический очерк – Сайт Бориса Тристанова : сайт. URL: <http://histpol.pl.ua/ru/poltava-istoricheskie-ocherki/istoricheskie-ocherki?id=3685#94> (дата

УДК 51(092)

Собчук Б.В.(студ., курс)
Науковий керівник - ст. викл. Григоренко К.В.,
Черкаський інститут пожежної безпеки імені Героїв Чорнобиля
(Черкаси, Україна)

ВКЛАД ОГЮСТЕНА ЛУЇ КОШІ В ТЕОРІЮ ПРУЖНОСТІ І ОПТИКУ

Ідеї Огюстена Луї Коші (він активно поєднував чисту і прикладну математику) сприймалися математиками-аналістами і математиками-прикладниками та відразу ж використовувалися. Наприклад, якщо Гаусс належав до XVIII ст., точніше водорозділу XVIII і XIX ст. (велике листування), то Коші – до XIX ст., – у нього все опубліковане за життя.

На початку XIX ст. диференціальні рівняння (звичайні і у частинних похідних) отримали потужні стимули для свого використання у задачах механіки і математичної фізики. Стає можливою тісна взаємодія теоретичних і практичних досліджень. Навколо розв'язання проблем математичної фізики групувалися великі колективи вчених, утворюючи наукові школи. Особливо значним було об'єднання вчених у Політехнічній школі у Парижі. Задачами математичної фізики успішно займалися Фур'є, Пуассон, Біо та інші. Коші не залишався осторонь цих проблем. Його дослідження у цій галузі знань теж надзвичайно плідні.

На початку 20-х років XIX ст. Коші разом з Пуассоном вивчив, зокрема, поширення хвиль у басейнах нескінченної глибини і обмежених стінками. Коші поставив ряд задач відносно поширення хвиль у басейнах різної форми, поширення тепла у твердих середовищах та ін. Одним з тих,

хто отримав розв'язки для кількох з них, був М.В. Остроградський. Коші дав високу оцінку його роботам, підкреслюючи їх важливість, повноту і чіткість. Лише це показує безпідставність спроб звинуватити Коші у непомірному намаганні самостійно одержувати нові результати.

Диференціальні рівняння теорії пружності для трьохвимірного випадку вперше виведені Л. Нав'є (1821 р.); при цьому він виходив з представлень молекулярної теорії і досліджував лише ізотропні середовища (Коші разом з Нав'є належить до основоположників математичної теорії пружності).

30 вересня 1822 року Паризькій академії був представлений мемуар Коші – «Дослідження рівноваги і внутрішнього руху твердих тіл і рідин, пружних і непружних». Зміст його опубліковано у другому і третьому томах «Математичних вправ» Коші, де він розвинув загальний континуальний підхід у механіці суцільних середовищ (континуальний підхід Ейлера-Коші).

У кінці 20-х років були одержані дві системи рівнянь теорії пружності, які характеризують ізотропне тіло однією (Нав'є) і двома (Коші) пружними константами.

Коші, починаючи з 1825 р., обґрунтовує спосіб описання цих явищ, який розглядає тіла як неперервне суцільне середовище і оперує двома «тензорами» – *напруженням* (Коші ввів це поняття) і *деформацією*. Він також ввів поверхню нормальних напружень, яка була названа пізніше його іменем (*квадрика Коші*). Введення цих понять є важливим кроком вперед в порівнянні з одним лише рівномірно розподіленим по всіх напрямках тиском рідини, яке було відоме в XVIII ст. Визначальним для розвитку теорії пружності і усієї механіки суцільних середовищ став континуальний підхід Коші, розроблений ним у 20-х роках. У 1827 р. Коші поширив цей підхід на анізотропні (кристалічні) середовища, а у 1828–1830 рр. йому вдалось дати на цій базі математичне обґрунтування найпростіших законів оптики Френеля – досягнення, якого він прагнув з початку своїх досліджень. В роботах по оптиці Коші дав математичне тлумачення теорії дисперсії і дифракції світла, яка була запропонована французьким фізиком Огюстеном

Жаком Френелем. Він також дослідив рух світлової хвилі в умовах подвійного заломлення, створив знамениту теорію хвиль на поверхні важкої рідини, створив загальне рівняння руху світлового ефіру, встановив закони заломлення і відбивання, не звертаючись до сумнівних гіпотез. Зокрема, вивів формулу для залежності показника заломлення від довжини хвилі.

Зазначимо, що в двох важливих пунктах його теорія розходила з спостереженнями Френеля і за його точкою зору:

1) вона вимагала, щоб коливання поляризованого світла, які, згідно Френеля, лежать в площині поляризації, були перпендикулярні цій площині;

2) вона в усіх середовищах поряд з поперечними коливаннями давала також і повздовжні, які, у відповідності із спостереженнями, в оптиці ніякої ролі не відіграють.

Обидва ці спірних питання були в полі зору найвидатніших фізиків і математиків до остаточної перемоги максвелловської теорії світла. Навіть у 1896 р., коли з'явилися рентгенівські промені, висловлювалась думка, що це і є шукані повздовжні коливання світла.

Коші також склав диференціальне рівняння рівноваги для елементарного прямокутного паралелепіпеда, розширив поняття деформації. Дослідив також деформацію прямокутних стержнів, зокрема задачу про кручення.

Крім цих невідповідностей, була ще одна широка область оптичних явищ, які не описувались з допомогою феноменологічної теорії – дисперсія світла. Коші (1835–1836 рр.) з допомогою молекулярних представлень якісно пояснює це явище, висунувши припущення, що відстані між молекулами не є малими в порівнянні з довжиною хвилі світла. Дисперсійна формула Коші

$$n = a + \frac{b}{\lambda} + \frac{c}{\lambda^2} + \dots$$

ще й нині застосовується по відношенню до середовищ,

полоси поглинання яких лежать в інфрачервоній частині спектра.

У 1828 р. Коші і Пуассон застосували загальні рівняння для оцінки придатності елементарної теорії згину тонких стержнів, а у наступному році Коші вивів наближені формули для скруту тонких прямокутних стержнів.

Ці дослідження Коші дали поштовх для розвитку загальної теорії згину призматичних стержнів у 50-х роках XIX ст.

Науковій творчості Коші властивий глобальний підхід до розв'язання поставлених проблем: знаючи результати для нескінченного числа значень досліджуваного об'єкта (що графічно зображується у вигляді кривої), він виводив загальні властивості функції для будь-якого значення об'єкта.

Анотація: У статті розглядається стан європейської науки у XVIII–XIX ст. та вклад Огюстена Луї Коші у розвиток, зокрема, теорії пружності та оптики. В роботі розглянуті дослідження Коші у теорії дисперсії та дифракції світла, рух світлової хвилі в умовах подвійного заломлення, закони заломлення і відбивання та його вплив на розвиток загальної теорії згину призматичних стержнів.

Ключові слова: Огюстен Луї Коші, поширення хвиль, теорія пружності, закони оптики, деформація стержнів, дисперсія світла.

Abstract: The article considers the state of European science in the XVIII–XIX centuries and the contribution of Augustin Louis Cauchy in the development, in particular, the theory of elasticity and optics. The paper considers Cauchy's research in the theory of light dispersion and diffraction, the motion of a light wave under birefringence, the laws of refraction and reflection, and its influence on the development of the general theory of bending of prismatic rods.

Keywords: Augustin Louis Cauchy, wave propagation, elasticity theory, laws of optics, rod deformation, light dispersion.

Література

1. Белхост Б. Огюстен Коши. – М., Наука, 1997. – 173 с.

АРХІМЕД – ЗАСНОВНИК МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Сучасна освіта природничо-математичного циклу завдячує багатьом видатним науковцям, вченим, математикам, фізикам та інженерам за свій значний вклад в формування, становлення й розвиток даних предметів.

Галузь математики та фізики бере свій початок ще з сивої давнини – VI-V ст. до н. е. Дослідженнями теоретичного та практичного змісту на той час займалися математики, механіки, астрономи, а саме такі вчені як: Піфагор (побудова геометрії і арифметики як теоретичних доказових наук, що вивчають властивості абстрактних понять про числа і геометричні форми); Арістотель та Феодор (відкриття несумірних величин); Платон (методологія математики); Евдокс Кнідський (геометричний фундамент математики); Архімед (математичний підхід до розв’язування фізичних задач, відкриття поняття «центр ваги», відкриття законів важеля та інше); Арістотель (різноманітні дослідження в області фізики); Герон та Папп Александрійський (продовжували розвивати діяльність Архімеда).

Багато сучасних вчених відмічають, що мотиви своїх відкриттів почерпнули у древніх. Зачатки аналізу помітні у Архімеда, коріння алгебри – у Діофанта, аналітична геометрія – у Аполлонія і т. д. Тому можемо говорити, що сучасна теоретично-практична база предметів природничо-математичного циклу завдячує ще найдревнішим науковцям.

Одним з найвидатніших вчених античності є Архімед (287-212 рр. до н. е.) – давньогрецький математик, фізик та інженер, якого вважають основоположником математичної фізики, адже він перший, хто підійшов до розв’язування фізичних задач з математичної точки зору.

З творів Архімеда, які відносяться до механіки та геометрії до нас дійшли тільки два: «Про рівновагу плоских фігур» і «Ефод, або послання

Ератосфену про механічні теореми». Однак уривки з його більш ранніх механічних творів «Про ваги» і «Про важелі» збереглися в творах ряду авторів. Найбільш важливі з них, які стосуються вчення про центр ваги є в «Механіці» олександрійського вченого I ст. н.е. Герона і в «Математичній бібліотеці» вченого III ст. н.е. Паппи Александрійського [1].

За Архімедом, центр ваги тіла – це деяка розташована всередині його (тіла) точка, така, що якщо за неї подумки підвісити тіло, то воно залишається в спокої і зберігає початкове положення [2]. Також, ним були описані принципи розрахунку центра ваги трикутника, паралелограма, трапеції, сегменту параболи, криволінійної трапеції, бічні сторони якої є дугами параболи. Заміна тіл їх геометричними моделями на той час була нововведенням в науці. Підтвердженням того, що це заслуга Архімеда є слова Герона, який пише: «Ніхто не заперечує, що про способи і відхилення в дійсності говорять тільки про тіла. Якщо ж ми говоримо про плоскі або тілесні (об'ємні) фігури, що деяка точка є їх центром повороту і центром ваги, то це досить роз'яснено Архімедом» [1].

Протягом багатьох століть основою механіки була викладена в праці Архімеда «Про рівновагу плоских фігур» теорія важеля. В основі цієї теорії лежать наступні постулати:

1. Рівні тяжкості на рівних довжинах врівноважуються, на нерівних ж не врівноважуються, але переважають тяжкості на більшій довжині;
2. Якщо при рівновазі тягарів на якихось довжинах до однієї з тягарів буде що-небудь додано, то вони не будуть врівноважуватися, але переважить та тяжкість, до якої було додано;
3. Точно так же якщо від одного з тягарів буде відібрано що-небудь, то вони не будуть врівноважуватися, але переважить та тяжкість, від якої не було втрачено;
4. При поєднанні одна з одною рівних і подібних плоских фігур сполучаться один з одним і їх центри ваги;

5. У нерівних ж, але подібних фігур центри ваги будуть подібно ж розташовані;

6. Якщо величини врівноважуються на якихось довжинах, то на тих же самих довжинах будуть врівноважуватися і рівні їм;

7. У всякій фігурі, периметр якої всюди опуклий в одну і ту ж сторону, центр ваги повинен знаходитися всередині фігури [4].

Роботи Архімеда зачепили майже всі області математики того часу: геометрії, арифметики та алгебри. Та найбільший вклад математичної діяльності Архімеда відноситься до сучасного математичного аналізу. Архімед знайшов набагато більш загальний метод обчислення площ або обсягів, ніж греки. Для цього він удосконалив і показав застосування методу вичерпання Евдокса Кнідського. У своїй роботі «Послання до Ератосфена про метод» (інша назва «Метод механічних теорем») він використовував нескінченно малі для обчислення обсягів. Згодом ці ідеї лягли в основу інтегрального числення [3].

В творі «Квадратура параболи» Архімед наводить доведення того, що площа сегмента параболи, який відсікає від неї пряма, складає $\frac{4}{3}$ від площі вписаного в цей сегмент трикутника. Під час доведення Архімед підрахував суму нескінченного ряду: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{4}{3}$. Це був перший в математиці приклад нескінченного ряду [3].

В предметах природничо-математичного циклу дуже важливо вміти знаходити найбільші і найменші значення змінних величин – екстремуми. Такі завдання в даний час можуть бути вирішені за допомогою диференціального числення. Саме Архімед першим побачив зв'язок цих завдань з проблемами визначення дотичних і показав, як знаходити екстремуми [5].

Отже, Архімед – це той, хто зробив безліч відкриттів в галузі геометрії, математичного аналізу, заклав основи механіки, гідростатики і є автором багатьох важливих винаходів. З його ім'ям пов'язане наближення числа π ,

крім того, його ім'я носять граф, копули, аксіома, спіраль. Роботи вченого використовували в своїх дослідженнях відомі математики і фізики XVI-XVII століть, такі як: Йоганн Кеплер, Галілео Галілей, Рене Декарт і П'єр Ферма. Відкриття Архімеда стали основою для подальшого розвитку природничо-математичних наук.

Анотація. В статті розкривається наукова діяльність видатного давньогрецького вченого, математика, фізика та інженера Архімеда. Здійснено аналіз досліджень природничо-математичного циклу Архімеда та наведено основні з них, зокрема означення центру ваги, теорія важеля та квадратура параболи.

Ключові слова: Архімед, математика, математичний аналіз, фізика, механіка, предмети природничо-математичного циклу, дослідження.

Abstract. The article reveals the scientific activity of the famous ancient Greek scientist, mathematician, physicist and engineer Archimedes. The analysis of the researches of the natural-mathematical cycle of Archimedes is carried out and the main ones are given, in particular the definition of the center of gravity, the theory of the lever and the squaring of the parabola.

Keywords: Archimedes, mathematics, mathematical analysis, physics, mechanics, subjects of the natural-mathematical cycle, research.

Література

1. Житомирский С. Раритетные издания. Архимед. *Электронная библиотека, наука и техника* : веб-сайт. URL: <http://n-t.ru/ri/zh/ar02.htm> (дата звернення: 21.03.2021).
2. Кудрявцев П. С. Курс истории физики : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ. спец. 2 изд., испр. и доп. Москва : Просвещение, 1982. - 448 с.
3. Веселовский И. Н. Архимед. Сочинения : перевод с арабского. Москва, 1962. - 640 с.
4. История математики. С древнейших времён до Нового времени : из-во в 3 томах / под ред. А. П. Юшкевича. Москва : Наука, 1970. - 129 с.

АКСІОМАТИЧНИЙ МЕТОД: ЕТАПИ СТАНОВЛЕННЯ

Слово «геометрія» грецького походження, яке в перекладі означає «землемірство», і складається з двох слів грецької мови: геос – земля, метрію – вимірюю.

Перші відомості про геометрію, як відомо, були здобуті ще жителями Стародавнього Сходу, а саме: Єгипту, Вавилону, Китаю та Індії, що пов'язане, насамперед, з розвитком землеробства. Геометрія на той час мала емпіричний характер і являла собою набір часткових розв'язків окремих геометричних задач. Так, наприклад, єгиптяни вміли [1, 3]:

- 1) обчислювати периметр та площу трикутника;
- 2) знаходити площу зрізаної чотирикутної піраміди;
- 3) обчислювати площу круга, знаючи його радіус.

З розвитком суспільного життя людям доводилося розв'язувати все більше й більше різноманітних практичних задач, пов'язаних з формою, розмірами і взаємним розміщенням предметів. При цьому вони з'ясовували все нові й нові геометричні факти. Лише тоді, коли геометрія досягла високого ступеня розвитку, виявилось можливим формулювати її положення у викладі, характерному для дедуктивної науки. Так виникли теореми і доведення [2, 4].

В Стародавній Греції геометрія почала розвиватись в VII - VI ст. до н.е. Родоначальником вважається видатний філософ Фалес (640 – 548 рр. до н.е.), який довів геометричні теореми про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника, вертикальних кутів та інші. Надалі математиками Стародавньої Греції були доведені майже всі теореми сучасного шкільного курсу геометрії.

Значний внесок зробили представники Піфагорійської школи (біля 570 – 471 рр. до н.е.). Ними було відкрито такі геометричні факти [2, с. 3–4]:

- 1) доведено теорему про суму кутів трикутника;
- 2) доведено теорему Піфагора;
- 3) встановлено існування п'яти типів правильних многогранників;
- 4) встановлено існування несумірних відрізків (даний факт було відкрито учнем Піфагора – Гіппасом).

Задача на побудову системи геометричних знань була поставлена стародавніми грецькими філософами Платоном (429 – 348 рр. до н.е.) й Аристотелем (384 – 322 рр. до н.е.). Останньому, який є засновником формальної логіки, належить ідея побудови геометрії у вигляді ланцюга тверджень, які впливають одне з одного на основі лише одних правил логіки.

У кінці III ст. до н.е. виникла потреба узагальнити та систематизувати весь зібраний геометричний матеріал. Цю задачу розв'язували (Гіппократ, Федій та інші) більшість грецьких авторів, але їх твори не дійшли до нашого часу, а після появи «Начал» Евкліда були зовсім забуті [1–3].

В тринадцяти книгах «Начал» Евклід підсумував 350-річний розвиток античної математики і заклав логічний фундамент її подальшого прогресу. «Начала» стали незаперечним взірцем побудови наукових теорій. Геометрія Евкліда будувалася і тривалий час тлумачилася як теорія, яка безпосередньо описує властивості реального фізичного простору.

У «Началах» Евклід, як послідовник Аристотеля, виклав геометричні факти так, що кожний із них логічно випливає із попередніх.

«Начала» Евкліда складаються з 13 частин: у перших шести викладається планіметрія, у сьомій, восьмій, дев'ятій частинах подаються елементи теорії чисел, десята частина присвячена геометричній теорії ірраціональних чисел, у наступних трьох – викладається стереометрія [1, 4].

Кожна частина «Начал» починається з означень тих термінів, які зустрічаються в ній; у першій книзі перелічено також аксіоми і постулати. Потім йдуть твердження – так Евклід називає теореми і задачі.

Поряд з логічними недоліками «Начал» велику увагу всіх учених привертав п'ятий постулат Евкліда, який здавався не таким очевидним, щоб його приймали без доведення. Тому протягом 2000 років вчені намагалися довести його (Прокл – V ст. до н.е.; Омар Хайям 1048–1123 рр.; Саккері та Ламберт XVIII ст.; Лежандр 1752 – 1833 рр.), але всі ці спроби були безуспішними [3, с. 10–13].

Першою людиною, яка виступила з публічною промовою про те, що п'ятий постулат довести неможливо, тобто про можливість геометричної системи, в якій цей постулат просто не виконується, був не математик, а професор – юрист Харківського університету Ф. Швейкарт (1780-1857 рр.).

Він виявив припущення, що поряд із звичайною евклідовою геометрією існує також незвичайна, інша геометрія, з іншою теорією паралельних. На Землі ця геометрія місця не має, але, можливо, вона виконується десь в інших світах на далеких зірках. Швейкарт назвав цю нову геометрію астральною, тобто «зоряною» [2].

В XIX ст. цю саму проблему було вирішено М. Лобачевським (1792 – 1856 рр.), який замінив V постулат його запереченням та розвинув нову геометрію. 1826 року він представив фізико-математичному факультету Казанського університету свою доповідь про теорію паралельних прямих, яка отримала назву «Міркування про принципи геометрії». Згодом за підтримки університету М. Лобачевський публікує статтю «Про начала геометрії» (1829 р.).

Одночасно з Миколою Івановичем теорією паралельних прямих займалися німецький вчений К.Ф. Гаус (1777–1855 рр.) та угорський математик Я. Больяї (1802–1860 рр.). К.Ф. Гаус за своє життя нічого не опублікував, оскільки боявся, що його не зрозуміють. Я. Больяї в 1832 р. опублікував латинською «Додаток, в якому викладено абсолютно правильне вчення про простір, незалежно від правильності чи хибності XI аксіом Евкліда...».

Геометрію Лобачевського в той період ніхто не визнавав, навіть М. В. Остроградський, і лише після смерті автора, на нову геометрію звернули увагу, вона знайшла своє застосування в математиці, фізиці та астрономії. А сприяла цьому робота Бельтрамі Еудженіо (1835–1900), який довів у 1862 році, що геометрія Лобачевського реалізується на поверхні постійної, взаємної Гаусової кривини [4].

У кінці XIX – початку XX ст. актуальним стає обґрунтування теорем Евкліда. Цими питаннями займалися М. Паш (1843–1930), Дж. Пеано (1858–1932), Г. Вейль (1885–1955), Д. Гільберт (1862–1943) та інші. Найбільш досконалими нині є праці Г. Вейля та Д. Гільберта, а саме: праця Д. Гільберта «Основи геометрії» (1899 р.), в якій автор поділив 20 аксіом на 5 груп [1–4].

На даному етапі, що триває і понині, узагальненню та систематизації аксіоматичного методу сприяють праці Д. Гільберта та вчених його школи, які створили формальні системи та формалізовану аксіоматичну теорію. Спочатку аксіоматичний метод був застосований в геометрії, а згодом він знайшов своє місце в теорії ймовірностей, арифметиці, в деяких розділах фізики, а саме: механіці, термодинаміці, електродинаміці. Сьогодні вчені намагаються застосовувати даний метод в етиці, соціології та біології.

Анотація У статті досліджено етапи становлення та розвитку аксіоматичного методу в геометрії, а саме: виникнення геометрії в Єгипті та Стародавній Греції, створення «Начал» Евклідом, 2000-річні спроби доведення V постулату Евкліда, відкриття нових неевклідових геометрій.

Ключові слова: аксіоматичний метод, геометрія Лобачевського, п'ятий постулат Евкліда, система аксіом.

Annotation The article examines the stages of formation and development of the axiomatic method in geometry, namely: the emergence of geometry in Egypt and Ancient Greece, the creation of "Principles" by Euclid, 2000 years of attempts to prove Euclid's V postulate, the discovery of new non-Euclidean geometry.

Keywords: axiomatic method, Lobachevsky geometry, Euclid's fifth postulate, system of axioms.

Література

1. Аргунов Б. И. Геометрические построения на плоскости / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – М.: УЧПЕД ГИЗ, 1955. – 268 с.
2. Трохименко В. С. Конспект лекції з курсу «Основи геометрії» / В. С. Трохименко. – В.: ВДПУ, 2011. – 70 с.
3. Ілляшенко В. Я. Основи геометрії: навчальний посібник для студентів спеціальності

«Математика» / В. Я. Ілляшенко. – Л.: РВВ «Вежа» Волин. нац.ун-ту ім. Лесі Українки, 2012. – 241 с.

4. Гельман В.В. Генеза аксіоматичного методу в геометрії. *Наумовські читання*: матеріали XVII студ. наук.-метод. конф., м. Харків, 14–15 листоп. 2019 р. Харків : ХНПУ, 2019. - С. 126-128.

УДК 514.122(091)

Хлебко С. В. (студ., 5 курс);
Науковий керівник— доц. Кравчук О. М.
*Волинський національний університет імені Лесі Українки
(Луцьк, Україна)*

РОЗВИТОК АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У XVII СТОРІЧЧІ

Знання історії становлення та розвитку аналітичної геометрії розширює кругозір як молодих вчителів, так і студентів та учнів. Вивчення аналітичної геометрії не ізольовано, а в контексті світової історичної спадщини сприяє формуванню логічного мислення та наукового світогляду людини, свідомого розуміння процесів і явищ навколишнього світу, природи математичних знань та тенденції розвитку геометрії як науки, дозволяє ознайомитися більш глибоко з окремими розділами геометрії.

Мета дослідження – дослідити історичні аспекти розвитку аналітичної геометрії та розглянути перші дослідження в цій галузі.

У першій половині XVII ст. виникла абсолютно нова гілка математики, так звана аналітична геометрія, що встановлює зв'язок між лініями на площині та алгебраїчними рівняннями з двома змінними. Це той рідкісний випадок у математиці, коли за одне – два десятиліття виділяється зовсім новий її розділ, сформований на дуже простій ідеї, якій протягом тривалого часу не приділяли належної уваги. Поява аналітичної геометрії у першій половині XVII ст. була не випадковою. Перехід передових європейських країн до нової, капіталістичної форми виробництва поставив нові вимоги перед тогочасною наукою, в тому числі і геометрією [1, т. 1, с. 180].

Під поняттям «аналітична геометрія» розуміють ту частину геометрії, де вивчаються геометричні фігури і перетворення, які задані алгебраїчними рівняннями [4, т. 2, с. 96].

До виникнення та розвитку аналітичної геометрії, незалежно один від одного і одночасно, причетні два з найвідоміших французьких математиків XVII ст. – П.Ферма і Р.Декарт.

Рене Декарт – видатний французький філософ, математик, фізик, фізіолог. Його геометрична теорія ґрунтувалася на двох ідеях:

1) «Арифметизація площини» за допомогою координат: координатами точки на площині Декарт називає абсцису і ординату цієї точки, тобто чисельні величини, що відповідають її відстаням (з відповідними знаками) до двох обраних на цій площині взаємно перпендикулярних прямих (координатних осей). Точка перетину координатних осей називається початком координат.

2) Розгляд будь-якого алгебраїчного рівняння з двома змінними як деякої лінії на площині за допомогою методу координат. До Декарта, у випадку одного алгебраїчного рівняння з двома невідомими, вважали, що задача невизначена, так як невідомих не можна з нього визначити. Таке «невизначене» рівняння не вважали цікавим. Декарт по-іншому підійшов до вирішення цього питання. Він запропонував у рівнянні з двома невідомими вважати x абсцисою точки, а відповідне йому значення y – її ординатою. Тоді, якщо змінювати безперервно x , то для кожного з цих x визначається з рівняння відповідне цілком певне y , і, отже, виходить, взагалі кажучи, сукупність точок, що утворюють лінію [3, с. 342].

Найважливіші відкриття Р. Декарта з геометрії містяться у його праці «Геометрія». Сам трактат «Геометрія» (1637) складається з трьох частин.

У першій частині Р. Декарт відмовляється від принципу однорідності, покладеного в основу античної геометричної алгебри. Щоб множина відрізків стала замкнутою відносно алгебраїчних операцій, він вводить поняття одиничного відрізка і з допомогою спеціальних геометричних

побудов для заданих відрізків a і b буде відрізки, що є їх добутком та часткою [2, с. 89].

З геометричного числення Р. Декарта до наших днів збереглася його зручна символіка.

У другій книзі «Геометрія» подано розмірковування про природу кривих ліній. В основу їх класифікації Р. Декарт поклав кінематичний принцип. Цей принцип класифікації кривих Р. Декарта згодом став базовим для однієї з фундаментальних теорем кінематики механізмів, яка стверджує, що за допомогою плоских шарнірних механізмів, у яких рух перших ланцюжків повністю визначає рух інших, можна описувати дуги будь-яких алгебраїчних кривих, але неможна описувати жодної трансцендентної.

Вираження складніших рухів через простіші геометричною мовою призвів до створення системи координат, яку пізніше назвали декартовою. Щоправда, сучасне поняття цієї системи значно вужче, ніж те, що запропонував Р. Декарт.

Ортогональну тривимірну систему координат він застосував у другій частині «Геометрія». Заклавши основи аналітичної геометрії, сам Р. Декарт досяг у цій галузі небагато, оскільки недосконалою була його система координат, в якій не розглядалися від'ємні абсциси. Проте, «Геометрія» Декарта мала величезний вплив на розвиток математики, і протягом майже 150 років алгебра і аналітична геометрія розвивалися у напрямках, визначених Декартом.

Основоположником аналітичної геометрії є також П. Ферма. Його роботи в галузі аналітичної геометрії мали б не менше значення для розвитку цієї науки, ніж роботи Декарта, але більшість із них були опубліковані його сином уже після смерті автора. Тому пріоритет отримали роботи Р. Декарта. П. Ферма не лише раніше від Р. Декарта, а й більш систематизовано ввів лінійні координати і застосував їх до вивчення геометрії. Він ввів рівняння прямої і кривих другого порядку, розглянув задачу про перетворення системи координат (переносив центр координат і повертав осі). Йому

належить твердження: якщо два рівняння з двома невідомими відрізняються лише сталими коефіцієнтами, то вони визначають криві одного типу [2, с. 91].

Аналітична геометрія є, таким чином, тією частиною математики, яка, застосовуючи координатний метод, досліджує геометричні об'єкти засобами алгебри і є абсолютно необхідним математичним методом для вивчення інших розділів математики, механіки, фізики та інших природничих наук. Вона є базовою дисципліною у вишах та коледжах для всіх природничих спеціальностей, її елементи вже вивчаються у шкільному курсі геометрії.

Основними частинами ідеї аналітичної геометрії, є метод координат і розгляд рівнянь, які об'єднують ці координати. Цей розділ геометрії є одним із етапів переходу від евклідової геометрії до неевклідової.

Анотація. В статті розглянуто окремі аспекти історичного розвитку аналітичної геометрії, зокрема відкриття французькими математиками П.Ферма та Р.Декартом у XVII ст. методу координат. Ознайомлення із історико – філософськими аспектами розвитку аналітичної геометрії розширює кругозір вчителів, студентів та учнів. Усвідомлення успіхів науки стимулює активність студентів та зростання інтересу до вивчення фундаментальної дисципліни.

Ключові слова: аналітична геометрія, метод координат, лінійні координати, абсциса точки, ордината точки, декартова система координат.

Abstract. The article considers certain aspects of the historical development of analytical geometry, in particular the discovery of the coordinate method by French mathematicians P. Fermat and R. Descartes in the XVII century. Familiarization with the historical and philosophical aspects of the development of analytical geometry expands the horizons of teachers, students and pupils. Awareness of the success of science encourages students to be active and increase interest in studying the fundamental discipline.

Keywords: analytical geometry coordinates method, linear coordinates, point abscissa, point ordinate, Cartesian coordinate system.

Література

1. Александрова А. Д. Математика: ее содержание, методы и значение / А. Д. Александрова, А. Н. Колмогорова, М. А. Лаврентьева. – М, 1956. – 293 с. – (Том I).
2. Бевз В. Г. История математики / В. Г. Бевз. – Х: Основа, 2006. – 176 с.
3. Декарт Рене Рассуждение о методе с приложениями Диоптрика, Метеоры, Геометрия / Рене Декарт. – Ленинград: Академия наук СССР, 1953. – 657 с. – (Классики науки).
4. Рыбников К. А. История математики, в 2-х томах: Том II / К. А. Рыбников. – М: Московский университет, 1963. – 336 с.

ЄГИПЕТСЬКІ ДРОБИ

Численні історико-математичні дослідження показують, що дробові числа з'явилися у різних народів в стародавні часи незабаром після натуральних чисел. Поява дробів зв'язується з практичними потребами: завдання, де потрібно робити поділ на частини, були дуже поширені. Крім того, в житті людини доводилося не тільки рахувати предмети, а й вимірювати величини. Люди зустрілися з вимірами довжин, площ земельних ділянок, обсягів, маси тел. При цьому траплялося, що одиниця вимірювання не вкладалася ціле число раз в вимірюваній величині. Наприклад, вимірюючи довжину ділянки кроками, людина зустрічався з таким явищем: в довжині вкладалося десять кроків, і залишався залишок менше одного кроку. Тому другою суттєвою причиною появи дрібних чисел слід вважати вимір величин за допомогою обраної одиниці виміру.

Таким чином, у всіх цивілізаціях поняття дробу виникло з процесу дроблення цілого на рівні частини. Першим дробом, з яким познайомилися люди, була половина.

Система запису дробів, правила дій з ними помітно різнилися як у різних народів, так і в різні часи у одного і того ж народу. Важливу роль грали також численні запозичення ідей при культурних контактах різних цивілізацій.



У стародавньому Єгипті користувалися тільки найпростішими дробами, у яких чисельник дорівнює одиниці (ті, які ми називаємо

«частками»). Математики називають такі дроби Аліквотні (від лат. Aliquot - кілька). Так само використовується назва основні дробу або поодинокі дробу.

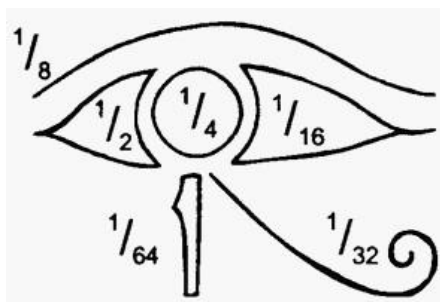
Єгиптяни ставили ієрогліф  (ер, «[один] з» або ре, рот) над числом для позначення одиничного дробу в звичайній запису, а в священних текстах використовували лінію. Наприклад:

$$\begin{array}{c} \text{мунд} \\ \text{III} \end{array} = \frac{1}{3} \quad \begin{array}{c} \text{мунд} \\ \text{N} \end{array} = \frac{1}{10}$$

Єгиптяни використовували тільки дві дробу не є частками – дві третини і три чверті. Ці дробу часто зустрічалися в обчисленнях. Для них існували спеціальні символи, був спеціальний знак і для дробу 1/2.

Ієрогліф	Значення	Наближена величина
	більша частина ока	1/2 (або 32/64)
	зіниця	1/4 (або 16/64)
	брова	1/8 (або 8/64)
	менша частина ока	1/16 (або 4/64)
	капля сльози (?)	1/32 (або 2/64)
	знак сокола (?)	1/64
	Уаджет	63/64

Крім того, єгиптяни використовували форми запису, засновані на ієрогліфі Око Гора (Уаджет). Для древніх характерно переплетення образу Сонця і ока. У єгипетській міфології часто згадується бог Гор, що втілює крилате Сонце і є одним з найпоширеніших сакральних символів. У битві з



ворогами Сонця, втіленими в образі Сета, Гор спочатку зазнає поразки. Сет вириває у нього Око - чудове око - і розриває його на шматки.

Той - бог вчення, розуму і правосуддя - знову склав частини ока в одне ціле, створивши «здорове око Гора». Зображення частин розрубаного Ока використовувалися при письмі в Стародавньому Єгипті для позначення дробів від $1/2$ до $1/64$. (7)

Єгипетський дріб в математиці - це сума кількох попарно різних дробів виду $\frac{1}{n}$ (так званих аліквотних дробів – звичайний дріб, в чисельнику якого стоїть одиниця). Іншими словами, кожна дріб суми має чисельник, що дорівнює одиниці, і знаменник, який представляє собою натуральне число.

$$\text{Наприклад: } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{16}$$

Єгипетський дріб являє собою позитивне раціональне число виду a/b ; наприклад, єгипетський дріб, записаний вище, може бути записаний у вигляді дробу $43/48$. Можна показати, що кожне позитивне раціональне число може бути представлено у вигляді єгипетського дробу (взагалі кажучи, декількома способами).



Єгиптяни використовували також і інші форми запису, засновані на ієрогліфі Око Хору для подання спеціального набору дробів виду $1/2^k$ (для $k = 1, 2, \dots, 6$), тобто, двоелементних раціональних чисел.

Єгипетські дробы були винайдені і вперше використані в стародавньому Єгипті. Одним з перших відомих згадок про єгипетські дробы є Математичний папірус Ринда. Три найбільш давніших текстів, в яких

згадуються єгипетські дроби - це Єгипетський математичний шкіряний сувій, Московський математичний папірус і Дерев'яна табличка Ахмім. Папірус Ринда був написаний переписувачем Ахмеса в епоху Другого перехідного періоду; він включає таблицю єгипетських дробів для раціональних чисел виду $2/n$, а також 84 математичних завдання, їх розв'язання і відповіді, записані у вигляді єгипетських дробів.

У них також були спеціальні символи для дробів $1/2$, $2/3$ і $3/4$ (останні два знака - єдині використовувані єгиптянами дробу, які не є Аліквотні), якими можна було записувати також інші дроби (більші ніж $1/2$).

Такі дробу використовувалися разом з іншими формами записи єгипетських дробів для того, щоб поділити Хекат ($\sim 4,785$ л), основну міру об'єму в Стародавньому Єгипті. Ця комбінована запис також використовувалася для виміру об'єму зерна, хліба і пива. Якщо після запису кількості у вигляді дробу Очі Хору залишався якийсь залишок, його записували в звичайному вигляді кратно ро, одиниці виміру, що дорівнює $1/320$ хеката.

За часів Античності і Середньовіччя Єгипетські дроби продовжували використовуватися. Математики стародавньої Греції, а згодом і всього світу до середньовіччя використовували Єгипетські дроби, незважаючи на наявні до них зауваження древніх математиків. Наприклад, Клавдій Птолемей говорив про незручність використання єгипетських дробів в порівнянні з Вавилонської системою.

Важливу роботу по дослідженню єгипетських дробів провів математик XIII століття Фібоначчі в своїй праці «Liber Abaci».

Основна тема «Liber Abaci» – обчислення, використовуючи десяткові і звичайні дроби, витіснили з часом єгипетські дроби. Фібоначчі використовував складну форму запис дробів, що включала запис чисел зі змішаною основою і запис у вигляді сум дробів, часто використовувалися і єгипетські дроби. Також в книзі були наведені алгоритми перекладу зі звичайних дробів в єгипетські.

Перший до нас загальний метод розкладання довільний дробу на єгипетські описав Фібоначчі в XIII столітті. У сучасній записи його алгоритм можна викласти наступним чином.

1. Дріб $\frac{m}{n}$ розкладається на 2 доданків:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{[n/m]} + \frac{(-n) \bmod m}{n [n/m]}.$$

Тут $[n/m]$ - частка від ділення n на m , округлене до цілого в більшу сторону, а $(-n) \bmod m$ - (позитивний) остаток від ділення $-n$ на m .

2. Перший доданок в правій частині вже має вигляд єгипетського дробу. З формули видно, що чисельник другого доданка строго менше, ніж у вихідного дробу. Аналогічно, за тією ж формулою, розкладемо другий доданок і продовжимо цей процес, поки не отримаємо доданок з чисельником 1.

Метод Фібоначчі завжди сходиться після кінцевого числа кроків і дає шукане розкладання.

Приклад:

$$\frac{7}{15} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$$

Однак отримане таким методом розкладання може виявитися не самим коротким. Приклад його невдалого застосування:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{1}{873960180913} + \frac{1}{1527612795642093418846225},$$

в той час як більш досконалі алгоритми призводять до розкладання:

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}.$$

У сучасній математиці замість єгипетських дробів використовуються прості і десяткові дроби, проте сучасні математики продовжують досліджувати ряд завдань, пов'язаних з єгипетським дробом.

В кінці минулого століття було дано оцінки максимального знаменника і довжини розкладання довільний дробу в єгипетські.

Анотація. Показано історію розвитку поняття єгипетського дробу, необхідність і важливість використання єгипетських дробів при вирішенні практичних завдань.

Ключові слова: єгипетські дробі,

Abstract. The history of development of the concept of the Egyptian fraction, necessity and importance of use of the Egyptian fractions at the decision of practical problems is shown.

Key words: egyptian fractions,

Література

- 1.https://uk.wikipedia.org/wiki/Єгипетський_дріб.
- 2.Глейзер Г. И. История математики в школе: IV – VI кл. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1981. — 240 с.
- 3.Бородин А.И. Из истории арифметики. Главное издательство «Ваша школа» - К.,1986.

УДК 510+531+539.3+929

Шишканова Г.А., доцент

Національний університет «Запорізька політехніка» (Запоріжжя, Україна)

НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ ПРОФЕСОРА РОЙТМАНА АНАТОЛІЯ БЕНІАМІНОВИЧА В ГАЛУЗІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ



Ройтман Анатолій Беніамінович – вчений в галузі механіки деформованого твердого тіла, міцності та надійності у машинобудуванні, доктор технічних наук, професор, лауреат Державної премії в галузі науки та техніки. Народився Анатолій Беніамінович 16.04.1938 р., в м. Нікополь Дніпропетровської області. Закінчив середню школу №13 м. Нікополя у 1955р. У 1960 – Дніпропетровський державний університет.

У 1960-1985 рр. – інженер, старший інженер, начальник конструкторського бюро, керівник дослідницького відділу міцності та надійності організації п/с 18, а пізніше – Запорізького моторобудівного заводу. У 1967 році захистив кандидатську дисертацію (захист відбувся у

Центральному інституті авіаційного моторобудування (ЦІАМ)). У 1980 році присвоєна ступінь доктора технічних наук, захист якої відбувся у ЦІАМ.

З 1985 – завідувач кафедри теоретичної механіки та теорії машин і механізмів Запорізького машинобудівного інституту. У 1985 році отримав вчене звання професора.

У 1995–2002 рр. – завідувач кафедри прикладної математики математичного факультету Запорізького державного університету.

З 2002р. по 2006р. працює титулярним професором кафедри фізики федерального університету штату Маран'яо, м. Сан-Луїс у Бразилії.

З 2006 р майже до своїх останніх днів (27.08.2018), проф. Ройтман А. Б. працював завідувачем кафедрою економіки і математичного моделювання Запорізького інститута імені Петра Сагайдачного.

Становлення А.Б. Ройтмана як вченого у більшій мірі визначилось його співробітництвом з академіком Академії наук України, проф.°Мосаковським°В. І., а також д-ром техн. наук, проф. Акимовим В.М., яких він вважав своїми вчителями.

Багато наукових робіт проф. Ройтмана А.Б. присвячено розв'язанню проблеми зниження рівня вібрацій деталей та вузлів авіаційних газотурбінних двигунів (ГТД), а також удосконаленню їх конструкційно-технологічних параметрів. Результати досліджень у галузі вібраційної діагностики пошкодження деталей та вузлів авіаційних ГТД були відзначені Державною премією УРСР в галузі науки та техніки у 1982 році.

Особливої уваги заслуговують наукові дослідження присвячені застосуванню авіаційних ГТД у наземних машинах та механізмах. Серед них слід виділити роботи по підвищенню надійності і зниженню шуму та вібрацій сільськогосподарської техніки. Дослідження в класичних областях теорії пружності, механіці деформованого твердого тіла, теоретичній фізиці також займають особливу нішу серед наукової спадщини. Як фахівець у галузі прикладної математики, Ройтман А.Б. має наукові роботи пов'язані з розв'язанням математичних проблем генетики та сучасної медицини. В

період роботи в університеті штату Маран'яо, м. Сан-Луїс Бразилії, де Ройтман А.Б. працював професором і викладав математику і механіку іспанською мовою, продовжував працювати над розв'язанням складних аерокосмічних проблем. Роботи по застосуванню математичних методів у літературознавстві додаються до його наукової спадщини саме у той час.

Проф. Ройтман А.Б. є автором більш 370 публікацій наукового, науково-методичного та літературного характеру. Має 7 монографій серед яких «Регрессионные методы в авиадвигателестроении», «Вибродиагностические методы в авиационном двигателестроении»; 19 навчально-методичних посібників і 3 підручника, один з яких «Наука управления»; 7 книг літератуно-дослідницької спадщини. Автор і співавтор 41 винаходів де 4 з них промислового зразка. Під керівництво проф. Ройтмана А.Б. 17 аспірантів та пошукачів вчених ступенів захистили кандидатські дисертації.

Анотація. Стаття присвячена науковій і педагогічній діяльності професора Анатолія Беніаміновича Ройтмана, з де більшого, біографічному опису його життя, та науковим досягненням.

Ключові слова: механіка, міцність, машинобудування, двигунобудування, вібродіагностика, авіаційні ГТД, спілка письменників України.

Annotation. This article is devoted to the lifework of professor Anatoliy Roytman in science and education. A short biographic overview, including a description of some of his scientific contributions are presented.

Keywords: mechanics, strength, machine-building, motor-building, video-diagnostics, gas turbine engines, Writers' Union of Ukraine

Література

- 1.Славетні запоріжці / Всі персоналії / РОЙТМАН Анатолій Беніамінович http://sites.znu.edu.ua/cms/index.php?action=news/view_details&news_id=7247&lang=ukr&news_code=
- 2.Літ.: Запорізький національний університет: історія і сучасність (1930 – 2005). Ювілейна книга. – Запоріжжя, 2006. – С.228.
- 3.Анатолій Беніамінович Ройтман.- Запоріжжя: Просвіта, 2008.– 54 с.
- 4.Національний університет «Запорізька політехніка» <https://zp.edu.ua/istoriya-kafedry-mehanika>

Яценко Н. В.(студ., 3 курс)
Науковий керівник – доц. Сіра І.Т.
Харківський національний університет імені Г.С. Сковороди
(Харків, Україна)

ТЕОРЕМА ПРО ЧОТИРИ КОЛЬОРИ

Математика сама по собі дуже багатогранна та різнобарвна, їй надають цікавості нестандартні задачі, а якщо в ці задачі додати прикладного змісту та кольору, то задачі стають ще більш яскравими та доступними для широкого кола людей.

В математиці є багато цікавих теорем, проте однією з найцікавіших є теорема про чотири кольори. Більш різнобічну теорему досить складно знайти в сучасній геометрії, вона одразу підкорює своєю яскравістю та захопливою історією.

У вересні 1976 року в журналі американської математичної спільноти «Bulletin of American Mathematical Society» вийшла стаття з голосною назвою: «Будь-яка географічна карта на площині може бути розфарбована чотирма кольорами». Ця стаття зробила фурор в математичній спільноті, столітня проблема чотирьох кольорів нарешті розв'язана. Більше ста років ця проблема бентежила уяву математиків, яка є неймовірно простою та наочною. Робота над даною проблемою дала поштовх для розвитку теорії графів. Історія вивчення проблеми чотирьох кольорів є досить захопливою. В 1840 році німецький астроном та геометр А. Мебіус довів, що «На площині не можна накреслити п'ять областей так, щоб кожні дві з них мали спільну границю». Саме ця не складна теорема поклала початок теоремі про чотири кольори[1].

В 1852 році в листі англійського математика Де Моргана своєму другові і колезі В. Гамільтону він пише про задачу придуману одним із його студентів: «Будь-яку мапу можна розфарбувати не більше ніж чотирма кольорами так, щоб будь-які дві сусідні країни були розфарбовані різними

кольорами». Чверть століття про цю задачу ніхто не згадував доки в 1878 році з трибуни британської географічної спільноти відомий англійський математик А. Келі знову сформулював проблему чотирьох кольорів. З того часу ця проблема, або гіпотеза, отримала велику відомість. Цією гіпотезою боліли тисячі, як відомих математиків, так і математиків любителів [1].

В 1880 році англійський адвокат публікує доведення гіпотези про чотири кольори в серйозному математичному виданні. І в продовж 10 років проблема вважається вирішеною. Проте, в 1890 році П. Хівуд знаходить в роботі Кампле помилку і доводить, що будь-яка мапа на сфері може бути правильно розфарбованою[1].

Проблеми розфарбування мапи на глобусі чи сфері еквівалентні. Так звісно ж в випадку мапи на сфері можна вирізати кусок внутрішньої області будь-якої країни: продірявлену сферу можна розтягнути на площину. На плоскій карті отвір перетвориться в «океан» ;, яка омиває з усіх сторін одну країну. Зрозуміло, довжини кордонів, їх форма, розміри країн піддадуться при розтягуванні значних змін, але сітка кордонів залишиться, додасться лише розтягнута кордон прорізаного отвори, зовнішня межа океану. Її можна прибрати, тобто розфарбувати океан так само, як і оточену їм країну. Такі деформації країн і їх кордонів, очевидно, не змінюють завдання розмальовки. Нижче розглядається плоска карта [2].

Почнемо з того, що замінимо задачу розмальовки плоскої карти на еквівалентну їй проблему, що стосується плоских графів. Виберемо столицю у кожної країни (Тобто виберемо по одній внутрішній точці в кожній з країн) і з'єднаємо дугами столиці країн, що мають загальний сегмент кордону. В результаті вийде так званий плоский граф [2].

Визначення Правильною n -розфарбуванням плоского графа G називається відображення $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, причому $f(u_1) \neq f(u_2)$ в разі, якщо існує таке ребро $r \in E(G)$, що межа r складається з u_1 і u_2 [2].

Нарешті, можна сформулювати проблему чотирьох фарб у вигляді наступного твердження.

Теорема про чотири кольори стверджує, що для розфарбування будь-якої карти достатньо чотирьох кольорів, щоб ніякі дві сусідні області не мали однакового кольору

Ось рішення цієї проблеми і зайняло більше століття. Однак на перший погляд трохи слабкіше твердження про правильну 5-розфарбовуванні довести досить просто. Для доказу знадобиться формула Ейлера, зв'язує число вершин, ребер і областей. нехай $|M|$ позначає число елементів кінцевого безлічі M [2].

Теорема Ейлера :Для будь-якого плоского графа $|V(G)| - |R(G)| + |D(G)| = 2$.

Зауважимо, що якщо не враховувати зовнішню нескінченну область, то формула Ейлера для триангуляції кінцевого плоского графа має вигляд $|V(G)| - |R(G)| + |D(G)| = 1$ [2].

Це означає, що якщо ми візьмемо мапу України, навіть з усіма нерівними границями, та присвоїмо кожній області свій колір, то для розмітки буде достатньо чотирьох кольорів.

Деяким мапам не потрібно всі чотири кольори, їм достатньо всього двох або трьох. Карта, яку можливо розфарбувати одним кольором, буде для нас не особливо цікавою, тому її ми пропустимо.

Здається неймовірним, що для розфарбування графу може вистачити лише чотирьох кольорів. Якщо намалювати графи деяких баз даних, де ребра будуть з'єднані об'єктами, що обмінюються інформацією між собою, то для такої бази даних може знадобитись дюжина кольорів.

Для виконання теореми про чотири кольори граф повинен бути планарним, тобто пласким (Рис. 1). Це означає, що ніякі ребра не повинні перетинатися. Тобто якщо ми маємо граф с перетинами який не можна накласти на площину, то теорема про чотири кольори до нього не застосовується (Рис. 2).

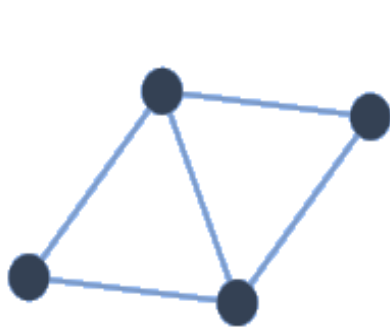


Рис. 1

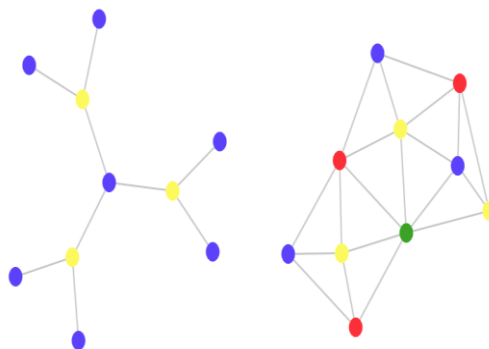
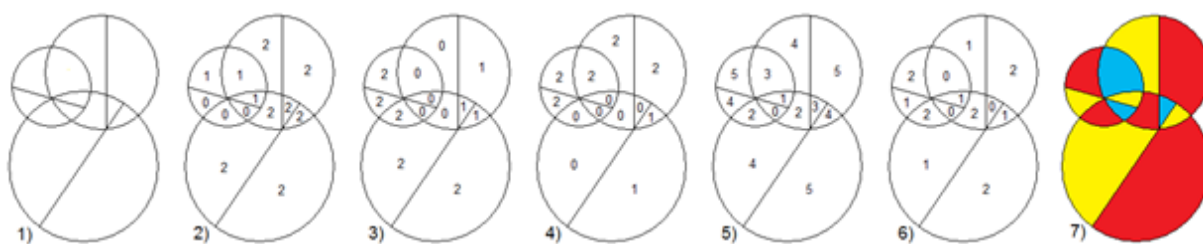


Рис. 2

Задача. На площині намальовано n кіл. У кожного кола проведено по хорді так, що хорди двох кіл мають між собою що найбільше одну спільну точку. Доведіть, що отриману карту на малюнку зліва завжди можна розфарбувати трьома фарбами так, щоб будь-які дві області, які мають спільну ділянку кордону, були розфарбовані в різні кольори.



Але повернемося до мап і спробуємо розфарбувати карту України. Зазначимо, що це вдалося нам не з першої спроби. Ми спробували розфарбувати карту для початку трьома кольорами, але їх виявилось замало. Проте питанням стоїть розфарбувати мапу чотирма кольорами. Нам вдалося це зробити тільки якщо ми починали з центру та по годинниковій стрілці йшли по колу (Рис.3).

Проблема чотирьох фарб, яка на перший погляд здавалася ізольованим завданням, навіть грою, мало пов'язаною з іншими розділами математики та практичними застосуваннями, використовується у наш час в архітектурі баз даних.

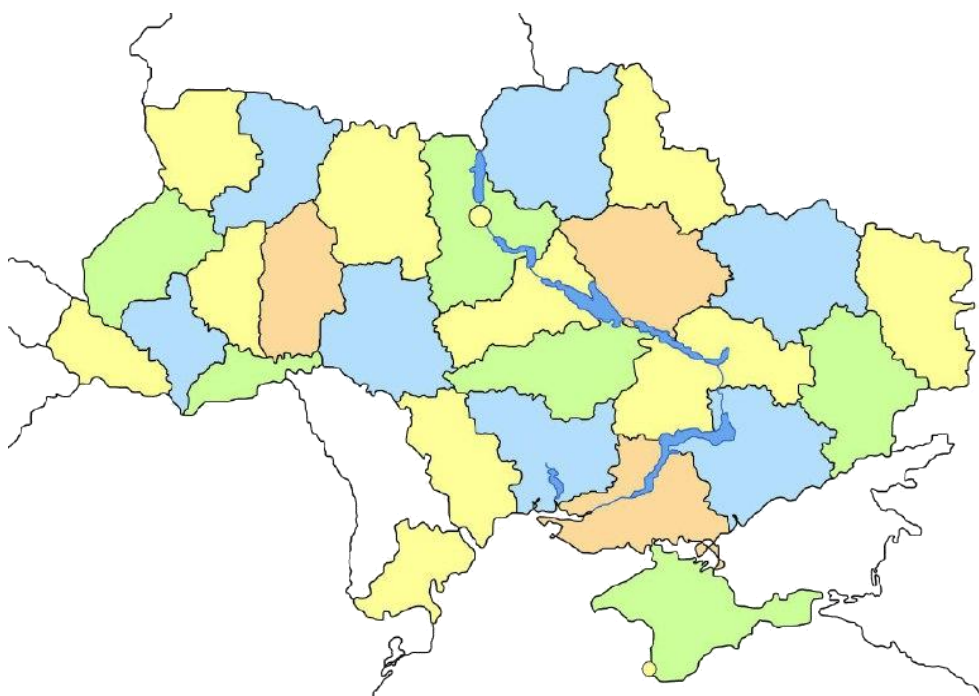


Рис.3

Анотація. Викладається історія теореми про чотири фарби. Її надзвичайно довгий доказ, притому що використовує комп'ютер для перевірки частини тверджень, викликає питання про те, що розуміти під доказом в математиці і яке її місце серед інших точних наук.

Ключові слова: теорема про чотири фарби. Мапа.

Abstract. The history of the theorem on four colors is stated. Its extremely long proof, which uses a computer to verify some of the statements, raises the question of what is meant by proof in mathematics and what is its place among other exact sciences.

Key words: theorem on four colors. Map.

Література

1. Научно-популярный физико-математический журнал "Квант" (издается с января 1970 года) URL: http://kvant.mccme.ru/1977/01/raskraska_v_chetyre_cveta.htm
2. Проблема четырех красок: неоконченная история доказательства (Самохин А.В., 2000), МАТЕМАТИКА URL : http://window.edu.ru/resource/367/20367/files/0007_091.pdf

НОВІТНІ МАТЕМАТИЧНІ ТА ПЕДАГОГІЧНІ ПІДХОДИ У ВИВЧЕННІ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Андрижейко К. О. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Климова І. М.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

ВПРОВАДЖЕННЯ ОСНОВНИХ ПРИНЦИПІВ КОМБІНАТОРИКИ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ КЛАСИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ЧИСЛО СПОСОБІВ РОЗБИТТЯ НА ГРУПИ

Представникам різних спеціальностей доводиться вирішувати завдання, в яких «розглядаються ті чи інші комбінації, складені з букв, цифр або інших об'єктів». Комбінаторика - розділ математики, в якому вивчаються питання про те, скільки різних комбінацій, підлеглих тим чи іншим умовам, можна скласти з заданих об'єктів. Комбінаторика пов'язана з багатьма іншими областями математики - алгеброю, геометрією, теорією ймовірностей і має широкий спектр застосування в різних областях знань (наприклад, в генетиці, інформатики, статистичної фізики). Термін «комбінаторика» був введений видатним німецьким математиком Лейбніцем, який в 1666 році опублікував свою працю «Міркування про комбинаторном мистецтві».

Основний інструмент у вирішенні комбінаторних завдань - це принципи (правила) комбінаторики. Було взято для прикладу принцип множення, який формулюється таким чином: нехай об'єкт А вибирається m способами, об'єкт В вибирається n способами, то обидва об'єкти можна вибрати mn способами. Все дуже просто - кожен з m способів вибору об'єкта А комбінується з кожним з n способів вибору об'єкта В, тобто кількість способів просто множиться один на одного.

У повсякденному житті часто зустрічаються об'єкти, які можна розглядати як комбінаторні. Прикладом є реєстраційні номери машин. Реєстраційний номер машини - це показник, що застосовується для ідентифікації автомобільного транспорту. Завдяки цілій системі, розробленої

вже давно, за рахунок присвоєння індивідуальних номерів кожному автомобілю, все машини легко поставити на реєстраційний облік. Потім можна координувати всі рухи по документації щодо будь-яких змін по правовладенію машиною, а також фіксувати правопорушення та відслідковувати боржників і штрафників. Кожен такий номер в першу чергу прив'язаний за територіальним критерієм до пункту реєстрації де оформлюються машина на власника. Двох однакових номерів існувати не може, так як це є шахрайством і штрафуються, а також постановкою автомобіля на штрафну стоянку. Номери повинні відрізнятися хоча б однією цифрою або буквою, або порядком їх розташування. Крім цього існує певний порядок для видачі державних номерів. Розглянемо більш просту ситуацію, коли номер Європейського формату. Дуже часті зміни в номерах спостерігаються в третій цифрі. І тоді, наприклад, в номері JRT426 зміниться ситуація на наступну - JRT422.

Виходячи з розглянутих правил, можна скласти задачу про кількість реєстраційних номерів машин.

Завдання 1. Розглянемо реєстраційний номер машини певного регіону, що складається з трьох букв і трьох цифр, що йдуть в певній послідовності: одна буква, три цифри, дві літери. Букви в державному номері повинні збігатися з буквами латинського алфавіту, Скільки існує варіантів реєстраційних номерів машин в Нижегородської області?

Розв'язання. У латинському алфавіті 26 букв: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z. Використовуються всі букви (всього 26 варіантів). Так як в номері машини можуть повторюватися і букви і цифри, відповідно, використовується формула розміщення з повтореннями $A_n^k = n^k$. Вибираються три букви з 26 можливих варіантів. Виходячи з формули, це можна зробити 17576 способами. Також номер містить цифри від 0 до 9. Використовуються три цифри з 10 можливих з можливістю повтору. Виходячи з формули, вийде 1000 різних способів розстановки. Виходячи з

цього, в загальному і цілому вийде $1000 * 17576 = 17576000$ способів розстановки - принцип множення.

Також за тим же принципом можна розглянути специфічну модель реєстрації машин у Великобританії.

Діюча система номерних знаків Великобританії була введена в 2001 році. Кожен номер (індексування номерного знака) складається з семи знаків. Зліва направо знак складається з таких символів.

1. Код регіону (area code) складається з двох букв. Перша ідентифікує регіон, в якому зареєстровано транспортний засіб, тобто можна використовувати літери такого вигляду: A B C D E F G H K L M N O P R S V W Y (всього 19 варіантів). Друга літера позначає код офісу реєстрації. Для неї використовують букви: A B C D E F G H J K L M N O P R S T U V W X Y (всього 23 варіанти). I, Q і Z не використовуються в даному коді.

2. Двозначний ідентифікатор терміну служби (age identifier). Він змінюється два рази на рік, в березні і у вересні. Цей код міститься в двох останніх цифрах, або номер року, (наприклад 05 для 2005), якщо він був присвоєний в інтервалі з березня по серпень, або, якщо реєстрація проходила з вересня по лютий наступного року, то іншу цифру, яка відображатиме номер року (до неї буде додано 50). Номер ідентифікатора діє з 2001 року, значить, ця система існує 18 років.

3. Серія - довільна комбінація послідовності з трьох букв. Для цієї комбінації використовують тільки 23 літери: A B C D E F G H J K L M N O P R S T U V W X Y. Вони не повинні повторюватися. Цей набір індивідуальний для кожного автомобіля. Рішення. Код регіону складається з двох букв. Як зазначено в умові, для першої літери коду буде 19 варіантів. Для другої літери 23 варіанта. За правилом твору існує $19 * 23 = 437$ комбінацій для коду регіону. Номер ідентифікатора включається номер автомобіля 18 років, тоді за правилом твору буде $18 * 2 = 36$ варіантів, так як існує два періоди реєстрації номера ідентифікатора. Якщо номер отриманий з березня по серпень, то залишають дату випуску машини, а якщо реєстрація проходила з

вересня по лютий, то до року випуску машини додається число 50. Так як серія складається з трьох букв, і вони не повинні повторюватися, то можна застосувати формулу розміщення без повторень $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. $k = 3, n = 23$; $A_{23}^3 = \frac{23!}{(23-3)!} = 10626$ варіантів серії. Виходячи з правила множення у Великобританії може існувати $437 \cdot 36 \cdot 10626 = 167168232$ номери.

Номер ідентифікатора має дві переваги:

- покупець вживаного автомобіля може теоретично визначити рік першої реєстрації автомобіля без необхідності перевіряти його додатково.

- у разі якщо поліція буде проводити розслідування нещасного випадку або злочину, пов'язаного з даним транспортним засобом, свідки зазвичай згадають початковий шифр на щитку номерів; згодом буде простіше звузити коло підозрюваних автомобілів до невеликого числа шляхом перевірки по базі даних, без необхідності знати повний номер.

Відповідно до цієї схеми номерів повинно вистачити для реєстрації автомобілів до 2050 року.

Як бачимо, навіть із достатньо складним завданням, від якого залежить як мінімум планування випуску певною кількістю матеріалу номерних знаків, а як максимум – великий пласт економічної системи держави та навіть союзу держав можна вирішити за допомогою комбінаторних принципів дуже швидко. Абсолютно усі принципи комбінаторики із легкістю застосовуються у побутових та глобальних ситуаціях.

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ УЧНІВ

Зміст математичної освіти в школі зазнає великих змін і до сьогодні. У стандарті освіти, який використовують останні 10 років, вказано, що основною метою освітньої галузі “Математика” є формування в учнів математичної компетентності. У зміст цього поняття вкладено досить багато, але головне – це створення умов для розвитку особистості, яка здатна застосовувати свої знання в навчальних і реальних життєвих ситуаціях.

Щоб реалізувати компетентнісний підхід при вивченні математики слід визначити шляхи набуття учнями математичної компетентності. Більшість педагогів вважають самостійні роботи одним з основних шляхів реалізації розвитку в школярів математичної компетентності.

Звідси випливає, що вибір вчителем системи прийомів та методів для оволодіння учнями навиками самостійної роботи, повинен враховувати їх індивідуальність, математичну підготовку та пізнавальну активність.

Сучасний темп життя вимагає від учнів необхідність віддавати перевагу предметам, які розвивають інтелектуальні здібності, ініціативність, пристосованість і впевненість для роботи в сучасних умовах. Математика завтрашнього дня потребує від учня не стільки орієнтації на виконання певного завдання, скільки вміння вирішувати проблеми, орієнтуватися в сучасних умовах.

Питання розвитку в школярів самостійності, здатності творчо та критично мислити бере свої початки ще за часів античності. Першими вченими, що наголошували на значимості оволодіння дитиною знань самостійно були Сократ, Платон та Арістотель.

В епоху середньовіччя в практиці процвітав догматизм, який не давав змоги розвивати самостійність, вдумливість та здатність аналізувати поняття. Навчання перейшло до звичайного зубріння. Тому у 1762 році Ж.-Ж. Руссо публікує свою книгу про власну теорію виховання, в якій радив не передавати учню знання в готовому вигляді, а надати йому право самостійно відкрити істину. Ті ж думки розвивали педагоги Я.А. Коменський, І.Г. Песталоцці, К.Д. Ушинський та ін.

Вітчизняний педагог В.О. Сухомлинський говорив, що розум не формується без розумового напруження, без думки, без самостійних пошуків. Самостійна робота, на його думку, формує у вихованців уміння працювати самостійно, здійснювати самоконтроль і взаємоконтроль.

Великий вклад в розвиток поняття самостійної роботи зробив Я.А. Коменський. Вчений проводив аналіз області застосування самостійних робіт, вивчав їх види, вдосконалив методiku їх використання в школі на різних ланках освіти.

У останні роки ХХ ст. досить велика кількість педагогів та психологів працювали над розвитком теорії самостійності і творчої активності учнів у процесі навчання. Вчені визначили, що один з ефективних засобів розвитку самостійності і творчої роботи учнів є самостійна робота. М.І. Алексєєв, І.Я. Лернер, К.В. Яресько та ін. вважали, що самостійна діяльність учня супроводжується усвідомленими і умотивованими самостійними діями школяра, що завершуються певним результатом. Однак ця діяльність передбачає керування зі сторони вчителя цим процесом, а саме пояснення мотиву та цілі діяльності а також підтримки (підведення до вирішення, уточнення, виправлення, коригування тощо) [6].

Що ж стосовно поняття «компетентність», то воно з'явилося в педагогіці порівняно нещодавно. Перші використання цього слова беруть свій початок в 60-х роках ХХ ст., в таких країнах, як США, Німеччина та Франція. Поняття «компетентність» зараз досить популярне у всьому світі, воно розкриває нові перспективи розвитку школяра.

На основі аналізу психолого-педагогічної літератури можна зробити висновок, що зараз відсутнє єдине визначення поняття «самостійна робота». Більшість передових педагогів вкладали власний сенс в це поняття, основні з цих визначень представлені в таблиці.

Спробуємо виділити основні істотні ознаки поняття «самостійна робота». Але щоб підійти до визначення з правильної позиції, потрібно розглянути його в зв'язку з поняттями активності та самостійності. Слід відмітити, що активність учня необхідна у всіх етапах процесу навчання. Без високої активності учня не можна уявити самостійне отримання ним нових знань і умінь, виконання творчої роботи, в якій потребується застосування знань для вирішення будь-яких нових задач. Активність припускає ту чи іншу ступінь самостійності думки учня. Учитель, який прагне здійснити в навчанні принцип активності учнів, піклується про те, щоб і при слуханні викладу знань, і при бесіді, і при спостереженні демонстративних об'єктів, і при слуханні відповідей однокласників учні самостійно мислили. Однак це ще не дає підстави відносити названі види діяльності до самостійної роботи учнів. Самостійна робота включає в себе з'єднання самостійної думки учнів з самостійним виконанням розумових або фізичних (або і тих і інших) дій [22].

Отже, самостійна робота – це робота, яка виконується без безпосередньої участі вчителя, але за його завданням, в спеціально наданий для цього час, при цьому учні свідомо прагнуть досягти поставлені цілі.

У процесі навчання застосовуються різні види самостійної роботи учнів, за допомогою яких вони набувають знання, вміння і навички. Всі види самостійної роботи, застосовувані в навчальному процесі, можна класифікувати за різними ознаками:

1. За характером керівництва і способу здійснення контролю за якістю роботи з боку вчителя можна виокремити:

- а) самостійну роботу учнів на уроці;
- б) позакласну самостійну роботу (домашнє завдання);

в) самостійну роботу під контролем вчителя, індивідуальні заняття з вчителем.

2. За рівнем обов'язковості виділяють:

- а) обов'язкову, за навчальним планом і робочою програмою (виконання домашніх завдань, практичних робіт та лабораторних робіт, завдань творчого характеру);
- б) добровільну (участь у олімпіадах, конкурсах, вікторинах, турнірах, розробка проектів).

3. За дидактичною метою поділяють на:

- а) вивчення нового матеріалу (опрацювання теми за підручником, знаходження інформації додаткових джерел), на цьому виді самостійної роботи базується випереджене навчання;
- б) закріплення і вдосконалення знань та навичок (розв'язування завдань практичного характеру);
- в) перевірка та контроль знань (різноманітні тести, диктанти, відповіді на запитання, з метою перевірки закріплення знань, умінь та навичок).

4. За формою організації діяльності поділяють на:

- а) колективну (фронтальну або групову);
- б) індивідуальну.

5. За характером діяльності поділяють на:

- а) репродуктивна самостійна робота;
- б) реконструктивна самостійна робота;
- в) евристична самостійна робота;
- г) творча самостійна робота.

6. За джерелом знань поділяють на:

- а) робота з навчальною книгою (ознайомлення з структурою підручника, читання окремих розділів, пошук відповідей на певні питання, вивчення матеріалу, рішення прикладів і завдань);
- б) виконання досліду (проведення експерименту, виконання практичної роботи або завдання);

- в) робота з використанням аудіовізуальних методів навчання, використання ТЗН (підготування презентацій, аудіо або відео робіт);
- г) робота при слуханні викладу вчителя і доповідей учнів;
- д) робота з роздатковим матеріалом.

Самостійні роботи можна ділити за різними критеріями на безліч видів. Тому перед вчителем постає задача обрати такий вид самостійної роботи, який би враховував необхідні задачі уроку та індивідуальність учнів. Різноманітність видів дає змогу вчителю весь час змінювати вид самостійних робіт, щоб мотивувати учнів до роботи та розвивати їхню математичну компетентність [4].

Навчальну роботу більшість вчених поділяють на такі форми організації, як: індивідуальну, фронтальну та групову. Самостійна робота не є виключенням. Індивідуальна робота спрямована на самостійну діяльність учня на рівні його можливостей. Фронтальна робота включає в себе опрацювання всіма учнями одного й того ж завдання. Групова робота передбачає спільне планування навчальної діяльності. Серед її форм розрізняють: бригадну (тимчасові групи), ланкову (постійні групи), парну [1].

Розглянемо більш детально форми організації самостійних робіт під час вивчення курсу математики. Можна виділити такі форми: лабораторна робота; практикум; математичний диктант; тест; контрольна робота; домашня робота; математичні олімпіади; проектна робота [2].

Зміст роботи, форма її виконання повинні викликати інтерес в учнів, бажання виконати роботу до кінця. Самостійна робота організовується так, щоб в учнів формувались навички та звички до праці.

Самостійну роботу доцільно проводити:

- під час перевірки домашнього завдання;
- під час вивчення нового матеріалу;
- під час закріплення і поглиблення вивченого матеріалу;
- під час аналізу контрольних робіт [1].

Самостійну роботу учнів є однією із загальновідомих форм навчання, яка на різних етапах уроку має свої функції. Кожна самостійна робота має відповідати вимогам до її організації:

1. Будь-яка самостійна робота на уроці повинна мати конкретну ціль і учень повинен знати шляхи її досягнення.
2. Самостійна робота повинна відповідати навчальним можливостям учня. Перехід від одного рівня складності до другого повинен бути поступовим.
3. Вчитель забезпечує комбінацію різних видів самостійної роботи і управління самим процесом роботи.
4. Самостійна робота повинна мати мінімум шаблонності, бо основна її задача розвиток пізнавальних здібностей, ініціативи та творчості учня [3].

Отже, в організації самостійної роботи необхідно враховувати, що для оволодіння знаннями, вміннями і навичками різними учнями потрібен різний час. Здійснювати це можна шляхом диференційованого підходу. При виконанні самостійної роботи необхідно здійснювати розумне поєднання викладу матеріалу вчителем із самостійною роботою учнів у придбанні знань, умінь і навичок.

Література.

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики / Г.П. Бевз – Київ: Вища школа, 1989. – 376 с.
2. Буряк В.К. Самостоятельная работа учащихся / В.К. Буряк – Москва: Просвещение, 1984. – 64 с.
3. Моторіна В.Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку / В.Г. Моторіна – Харків, 2012. – 318 с.
4. Пидкасистый П.И. Самостоятельная деятельность учащихся / П.И. Пидкасистый – Москва: Педагогика, 1972. – 184 с.
19. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ / С.А. Раков – Харків: Факт, 2005. – 360 с.
6. Слепкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слепкань – Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

ВПЛИВ ПОЗАКЛАСНОГО ЧАСУ НА УЧНІВ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАКЛАДАХ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Коли мова заходить про організацію або поліпшення навчального процесу, багато хто замислюється над уроками або змінами, випускаючи з уваги позакласні години, які здатні позитивно вплинути як на учнів, так і на самих педагогів.

Почнемо з самого поширеного способу провести час після уроків: додаткові заняття для всіх тих, кому відведеного на урок часу здалося недостатньо. На жаль, не рідкісні випадки, коли 45 хвилин не вистачає для пояснення об'ємної складної теми, через що вчителю доводиться залишати певний обсяг навчальних відомостей поза увагою або віддати його учням на самостійне вивчення. Обидва варіанти не є ефективними, адже набагато краще запропонувати учням залишитися після уроків в кабінеті, де можна буде не поспішаючи і всеосяжно відповісти на будь-яке питання присутніх. Крім самої очевидної користі даного варіанту проведення часу, додаткові заняття можуть показати дітям, що учитель – проста людина, яка бажає поповнити їх багаж знань і навчити корисним навичкам. Саме тому він часом буває суворим і прискіпливим, а не з власної примхи.

Відвернемося від шкільної програми і звернемо увагу на творчий потенціал дітей, які не поспішають його розвинути. Для вирішення цього завдання можна створити клуби за інтересами, гуртки, секції і тому подібні об'єднання, які здатні дати юним талантам потужний поштовх, за допомогою спілкування з викладачами та обговорення з іншими дітьми цікавих задумок. Щоб діти відчували прогрес і усвідомлювали розвиток своїх творчих талантів слід раз в декілька місяців влаштовувати виставки, завдяки яким молоді художники покажуть свої роботи іншим, отримають похвалу і цінну критику. Для любителів спорту можливістю продемонструвати свої успіхи є фестивалі

і турніри, до початків яких важливо гарненько попрацювати над своєю формою і навичками. Подібні заняття розширяють кругозір учнів, розвинути їх здатності, а також допоможуть відшукати однодумців.

Якщо ж в колективі учнів спостерігаються якісь проблеми зі згуртованістю, найкраще познайомити дітей ближче. Заради цієї мети рекомендується «прогулятися» з учнями, тобто сходити в театр, музей, парк тощо. Так в учнів з'являться теми для обговорення, приємні спогади і можливості дізнатися про своїх однокласників багато нового. Відзначимо, що прогулянки підвищують культурний рівень дітей і прищеплять їм непідробну любов до мистецтва. Важливо, щоб діти подивилися один на одного і на вчителів під іншим кутом, завдяки чому розуміли, що у кожного є свої захоплення, цікаві риси характеру, мрії і бажання.

Хтось може заперечити, що все перераховане вище вже зустрічається в навчальних закладах і це буде правдою. Однак кількість подібних позакласних занять залишає бажати кращого, адже спільні прогулянки відбуваються раз в декілька місяців, поїздки куди-небудь – виключно на канікулах, хоча можна було б знайти час і на вихідних. Про гуртках і клубах за інтересами сказати особливо нічого, адже їх або немає, або вони знаходяться в зародковому стані. У зв'язку з цим вкрай важливо уточнити, що позакласне проведення часу має бути регулярним і захоплюючим, а інакше воно не принесе ніякої користі, не дивлячись на безліч вкладених зусиль.

Додаємо, що одним з незвичайних способів зацікавити учнів є дозвіл дітям самим проводити заняття. Наприклад, нехай дівчинка, яка захоплюється баскетболом, розповість своїм однокласникам про історію даного виду спорту, про найгучніші матчі і про неймовірно талановитих гравців. Пристрасть, з якою людина буде розповідати про своє захоплення, приверне увагу до теми обговорення і навіть зможе надихнути слухачів на спортивні досягнення. Такий метод прекрасний своєю простотою і своїми приємними наслідками, а саме знайомству дітей з хобі один одного, розвитку ораторських здібностей, ліквідації замкнутості і страху сцени.

Уточнимо, що учні можуть розповідати не тільки про своїх улюблених темах, а й допомагати викладачам навчати іншим. Ровесники краще розуміють один другого, тому не буде нічого дивного, якщо якусь складну тему краще пояснить учень, ніж учитель. Плюс, це також здатне зародити і зміцнити дружні відносини в колективі.

Розглянемо деякі можливості організації позакласної роботи з математики в закладах середньої освіти: наукові кружки, заходи з вивчення математики за допомогою засобів інформаційно-комунікаційних технологій, конструкторська діяльність.

Кожен учень закладу середньої освіти мріє займати призові місця у різноманітних конкурсах, заходах та олімпіадах. Так, починаючи з 5-го класу учні можуть відвідувати предметні олімпіади, підготовка до яких відбувається тільки у позаурочний час. Перемоги на олімпіадах з математики потребують ґрунтовних знань з предмету, які можна отримати тільки в систематичній праці та розвитку.

Починаючи з 9-го класу учні, яким подобається математика в своїй науковості, можуть брати участь у написанні науково-дослідницьких робіт у відділення «Математика» Малої академії наук та представляти свої досягнення на публічних захистах.

Виконання такого виду робіт не тільки підвищує їх навчальні досягнення та знання з предмету, а й надає можливість самостійно отримувати наукові результати, публічно доповідати їх та конструктивно давати відповіді на питання. Такий вид діяльності можливо організувати лише в позаурочний час. Підготовка до МАН зближує учнів та вчителя, робить їх однодумцями, заставляє аналізувати роботу та отримані результати, а сама процедура захисту надає учням можливість познайомитися з учнями різних шкіл одного міста, області чи навіть всієї України, в залежності від результативності роботи.

Одним із видів позакласної роботи з математики також можна назвати ознайомлення учнів з засобами інформаційно-комунікаційних технологій та

використання їх в процесі організації навчання. Так системи комп'ютерної математики чи засоби доповненої реальності можуть зацікавити учнів своєю простотою та можливістю візуалізації математичних понять, теорем, ознак чи властивостей.

Оскільки часу на уроках недостатньо для ознайомлення з такими технологіями, то саме проведення позакласних заходів сприятиме не тільки отриманню нових знань учнями, а й надасть їм можливість самостійно знаходити такі засоби ІКТ, розуміти особливості застосування засобів у процесі навчання математики, обґрунтовувати доцільність їх використання.

Для розкриття прикладної та міжпредметної реалізації математики, що є вкрай необхідним моментом процесу навчання, доцільно проводити позакласні заходи, що будуть містити в собі елементи конструкторської діяльності.

Проведення інженерного тижня, тижня природничо-математичних дисциплін нададуть можливість не тільки зацікавити учнів математикою, а й створять умови для розвитку творчого потенціалу учнів, покажуть математику під незвичним кутом та сприятимуть загальної зацікавленості учнів математикою.

Підсумовуючи вище сказане можна стверджувати, що навчання математикою у закладах середньої освіти можна організовувати не тільки під час роботи в класі за розкладом, а й використовуючи їх позаурочний час. Така організація процесу навчання математики сприятиме не тільки якісному засвоєнню навчального матеріалу, а й створить умови для згуртованості учнів, умінню допомагати один одному, не боятися помилятися, виступати перед іншими, генерувати ідеї та доводити їх до логічного завершення.

Анотація. В статті розглянуто деякі аспекти організації позакласної роботи учнів з математики в закладах середньої освіти. Описані можливі способи підвищення якості навчання математики шляхом уведення додаткових занять з предмету; відображення міжпредметних зв'язків та організації конструкторської діяльності учнів.

Ключові слова: позакласна робота, інформаційно-комунікаційні технології і засоби, заклад середньої освіти.

РОЗРАХУНОК ЙМОВІРНІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОФЕСІЙНО-ПРИКЛАДНОЇ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗА ТЕМОЮ «СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ»

У статті наведено приклад розв'язання типової задачі професійно-прикладної спрямованості для здобувачів будівельних спеціальностей ЗВО за темою СМО. Розв'язання завдання ґрунтується на визначеннях і властивостях дисциплін: теорія ймовірностей, математична статистика, а також на знаннях вищої математики.

Задача. Будівельний майданчик обладнаний 2 кранами, які після відмови і ремонту продовжують працювати на майданчику. Відмова кожного крана може статися в будь-який момент часу. За статистикою інтенсивність відмов кожного крана λ_1, λ_2 , відповідно. Час відновлення (ремонту) кожного крана являє собою випадкову величину, розподілену за показовим законом з інтенсивністю μ_1, μ_2 , відповідно.

Побудувати розмічений граф, що ілюструє роботу системи (переходи з одного стану в інший). системи (переходи из одного состояния в другое).

Скласти по розміченому графу (рис.1) систему Колмогорова для ймовірностей $p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ станів S_0, S_1, S_2, S_3 , якщо виконуються початкові умови $t = 0: p_0(0) = 1, p_1(0) = 0, p_2(0) = 0, p_3(0) = 0$.

Розв'язання.

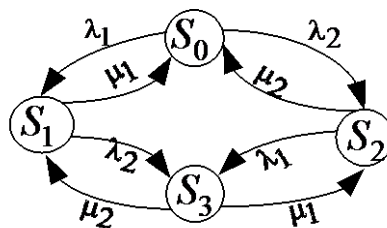


Рис.1. Можливі стани системи

S_0 - обидва будівельні крани знаходяться в робочому стані; S_1 - сталася відмова першого крана з переходом зі стану S_0 в стан S_1 з інтенсивністю λ_1 , другий кран знаходиться в робочому стані; S_2 - сталася відмова другого крана з переходом зі стану S_0 в стан S_2 з інтенсивністю λ_2 , перший кран знаходиться в робочому стані; S_3 - обидва крани знаходяться в стані відмови.

При відновленні з інтенсивністю μ_1 першого крана в робочий стан система переходить зі стану S_3 в стан S_2 . При відновленні з інтенсивністю μ_2 другого крана в робочий стан система переходить зі стану S_2 в стан S_0 .

При складанні i -го ($i = 0,1,2,3$) рівняння слід розглянути стан S_i на розміченому графі системи. У лівій частині рівняння повинна знаходитися похідна ймовірності стану за часом $\frac{dp_i(t)}{dt}$. У правій частині рівняння повинна знаходитися сума добутків інтенсивності та ймовірності станів, на які вказує стрілка, зі знаком (+) до стану S_i та зі знаком (-), якщо стрілка має напрямок від стану S_i .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_1 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) - \lambda_2 p_0(t) + \mu_2 p_2(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_1 p_0(t) - \mu_1 p_1(t) - \lambda_2 p_1(t) + \mu_2 p_3(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_2 p_0(t) - \mu_2 p_2(t) - \lambda_1 p_2(t) + \mu_1 p_3(t), \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_2 p_1(t) + \lambda_1 p_2(t) - \mu_1 p_3(t) - \mu_2 p_3(t), \\ p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0. \end{array} \right.$$

З плином часу ($t \rightarrow \infty$) в системі випадковим чином настає стаціонарний режим, коли ймовірності кожного стану не залежать від часу.

Похідні від них за часом стають рівними нулю, тобто $\frac{dp_i}{dt} = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$,

і система рівнянь А. Н. Колмогорова перетворюється в систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язання якої дозволяє визначити величини стаціонарних (граничних) ймовірностей. Оскільки граничні ймовірності системи не залежать від часу, то $\frac{dp_0}{dt} = \frac{dp_1}{dt} = \frac{dp_2}{dt} = \frac{dp_3}{dt} = 0$, система

приймає вигляд:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_1 p_0 - \lambda_2 p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2, \\ 0 = \lambda_1 p_0 - \lambda_2 p_1 - \mu_1 p_1 + \mu_2 p_3, \\ 0 = \lambda_2 p_0 - \lambda_1 p_2 - \mu_2 p_2 + \mu_1 p_3, \\ 0 = \lambda_2 p_1 + \lambda_1 p_2 - \mu_1 p_3 - \mu_2 p_3. \end{cases}$$

система з чотирьох рівнянь зводиться до системи з трьома рівняннями, оскільки одне з них є лінійною комбінацією трьох інших рівнянь.

Доповнюємо систему умовою нормування для ймовірностей станів системи

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$\begin{cases} -(\lambda_1 + \lambda_2)p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = 0, \\ \lambda_1 p_0 - (\lambda_2 + \mu_1)p_1 + \mu_2 p_3 = 0, \\ \lambda_2 p_0 - (\lambda_1 + \mu_2)p_2 + \mu_1 p_3 = 0, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок системи

$$\begin{cases} p_0 = \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}, \\ p_1 = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \right), \\ p_2 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \right), \\ p_3 = 1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} + \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}. \end{cases}$$

Зручно ввести нові позначення $M_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}$; $M_2 = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}$,

які дозволять записати граничні ймовірності в компактному вигляді:

$$p_0 = M_1 M_2; \quad p_1 = (1 - M_1) M_2;$$

$$p_2 = (1 - M_2) M_1; \quad p_3 = (1 - M_1)(1 - M_2).$$

Відносний час знаходження системи у певному стані визначається ймовірністю стану:

$$T_0 = M_1 M_2; \quad T_1 = (1 - M_1) M_2;$$

$$T_2 = (1 - M_2) M_1; \quad T_3 = (1 - M_1)(1 - M_2).$$

Середній час знаходження системи в кожному стані: T_0 часу буде знаходитися в стані S_0 (обидва вузли працюють), T_1 — в стані S_1 (перший вузол ремонтується, другий працює), T_2 - в стані S_2 (другий вузол ремонтується, перший працює) і T_3 часу - в стані S_3 (обидва вузли ремонтуються).

Література

1. Есипов Б. А. Методы исследования операций: Учебное пособие. – Изд. Лань, 2013. – 304 с.
2. Емельянов А. А. Модели процессов массового обслуживания / Прикладная информатика. - 2008. - №5 (17) – С. 92-130.

Вовк В. Ю. (студ., 3 курс),
Собко Е. Р. (магістрант, 5 курс)
Науковий керівник – доц. Рудик О. Ю.
Хмельницький національний університет (Хмельницький, Україна)

РОЗРАХУНОК ПРИСТОСУВАНЬ ДЛЯ ЗАМІНИ САЙЛЕНТБЛОКІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Знос сайлентблока безпосередньо пов'язаний з тривалою експлуатацією, тому при великому пробігу необхідно буде зробити його заміну. До ознак зносу автодеталей відносять: гучний стукіт у районі підвіски на швидкості; вібрації з боку підвіски; люфт заднього сайлентблока; прокручування сайлентблока при ослаблених болтах; занос автомобіля під час руху. Перед заміною сайлентблоків важливо переконатися у необхідності цього, так як після випресування вони вже практично непридатні [1].

Заміна сайлентблока задніх важелів передбачає зняття автодеталі. Якщо ж потрібна заміна сайлентблока переднього важеля, то його випресовують, що можна робити тільки при наявності професійних інструментів. Тому розглянемо пристосування для заміни сайлентблоків авто ВАЗ (рис. 1 – [1]).

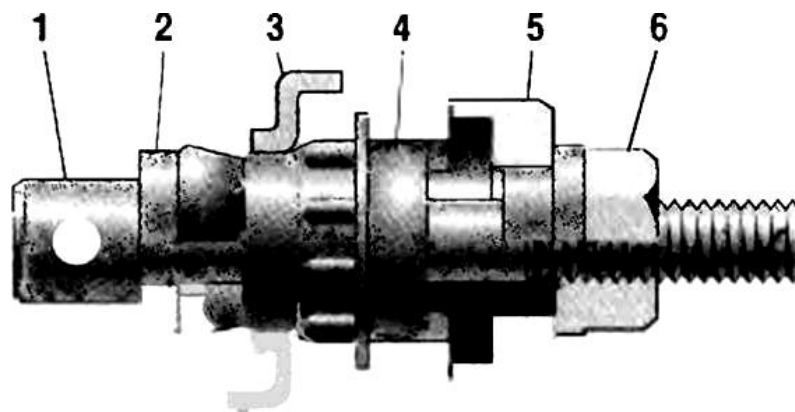


Рис. 1. Пристосування для випресування сайлентблока верхнього важеля: 1 – гвинт; 2 – шайба; 3 – важіль; 4 – сайлентблок; 5 – стакан; 6 – гайка

Стакан 5 розміщений зовні важеля, в нього буде виходити сайлентблок, який випресовується; шайба 2 знаходиться всередині важеля, саме вона

випресовує сайлентблок, проходячи через посадковий отвір важеля. За проходом шайби потрібно спостерігати.

Звичайно, для будь-якого пристосування потрібно провести міцнісні та інші розрахунки. Застосуємо для цього програму SolidWorks (інтегроване середовище тривимірного моделювання, яке продукує візуальні та анімаційні моделі [2, 3]). У процесі моделювання створюється алгоритм, який описує деталь. Задаються розміри та геометричні взаємозв'язки між елементами, що визначають форму деталі. Зі зміною розмірів змінюється форма і розміри деталі. На рис. 2 наведена 3D-модель пристосування, представленого на рис. 1.

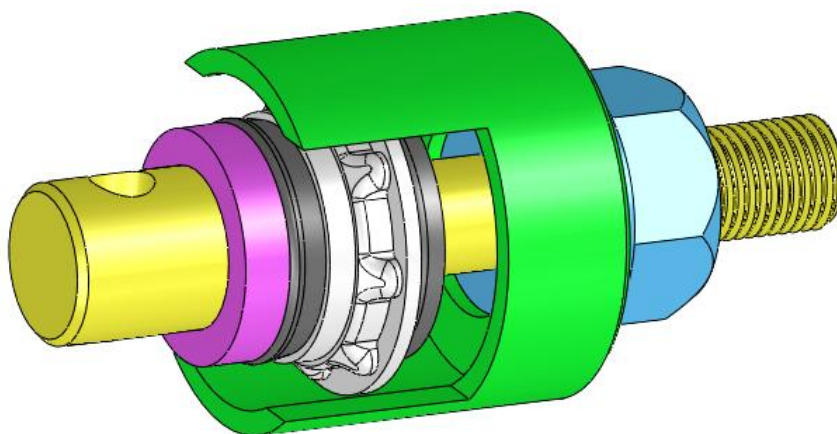


Рис. 2. 3D-модель пристосування для випресування сайлентблока

Міцнісні розрахунки проводять за допомогою додатку програми SolidWorks – SolidWorks Simulation [4]. В його основі є метод скінченних елементів (МСЕ), який є найпоширенішим у наш час чисельним методом розв'язання задач механіки твердого тіла. Пов'язане це з тим, що МСЕ має значимі переваги обчислювального апарату, а також дає конкретний і чіткий фізичний сенс усім невідомим, визначення яких потрібно отримати.

Основна ідея МСЕ полягає у тому, що будь-яку безперервну величину (напруження, деформацію, переміщення тощо) можна апроксимувати дискретною моделлю, яка будується на безлічі кусково-неперервних функцій, визначених на скінченному числі підобластей [5].

Загалом, алгоритм розрахунків МСЕ – це: розбивка конструкції на скінченні елементи й вибір базових невідомих; вибір базових функцій, апроксимація функцій переміщень в елементах; побудова матриць жорсткості й піддатливості; побудова системи алгебраїчних рівнянь з наступним визначенням параметрів крайової задачі.

Проведемо за допомогою SolidWorks Simulation статичний аналіз гайки 6 (див. рис. 1) пристосування. При моделюванні створювалася геометрична модель гайки, потім вводилися властивості матеріалу, з якого вона виготовлена (сталь 45 ГОСТ 535-88). Після цього проводилась дефініція опор гайки, задавалася область навантаження (нормальна сила $F = 13685 \text{ Н}$ [5]), визначалися контактні взаємодії, створювалася скінченно-елементна модель системи (рис. 3), рішення поставленої задачі та визначення запасу міцності конструкції.

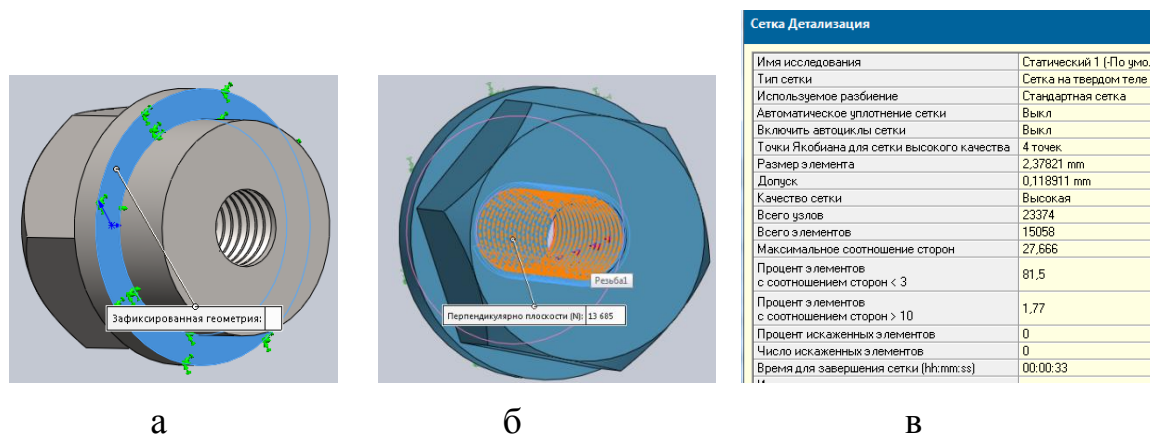


Рис.3. Дефініція опор гайки (а), прикладення до неї навантаження (б), параметри сітки (в)

Встановлено: максимальне напруження, яке виникає у гайці, $\sigma = 131,4 \text{ МПа}$ (вузол 23183); максимальне результуюче переміщення $h = 0,004319 \text{ мм}$ (вузол 491); максимальна еквівалентна деформація $\delta = 0,0004493$ (елемент 6064); мінімальний запас міцності $k = 6,315$ (вузол 23183), що більше допустимого $[k] = 3$.

Отримані результати підтверджують актуальність проведеного дослідження при визначенні міцності гайки пристосування для випресування сайлентблоків верхніх важелів автомобілів ВАЗ.

Анотація. За допомогою SolidWorks проведений статичний аналіз гайки пристосування для випресування сайлентблока верхнього важеля авто ВАЗ.

Ключові слова: сайлентблок, пристосування, гайка, SolidWorks, МСЕ.

Abstract. With the help of SolidWorks, a static analysis of the nut of the device for pressing the silent block of the upper lever of the VAZ car was performed.

Key words: silentblock, fixture, nut, SolidWorks, finite element method.

Література

1. Приспособления для ремонта автомобилей [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://chertezhi.ru/modules/ebook/showfile.php?lid=696>
2. Rudyk O. Yu. Using of SolidWorks for simulation of screw puller of bearings [Electronic resource] / O. Yu. Rudyk, P. V. Kaplun, R. V. Solovyov. – Access mode: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/10062>
3. Psol S. V. Using SolidWorks to ensure passability of automotive equipment [Electronic resource] / S. V. Psol, Y. Leshchak, O. Yu. Rudyk. – Access mode: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/10060>
4. Рудик О. Ю. Застосування SolidWorks Simulation для забезпечення професійної підготовки майбутніх випускників [Електронний ресурс] / О. Ю. Рудик, А. В. Ружицький. – Режим доступу: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/8416>
5. Рудик О. Ю. Забезпечення живучості трибосистеми ковзання ГРМ [Електронний ресурс] / О. Ю. Рудик, В. О. Ладунець. – Режим доступу: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/8493>
6. Натяг сайлентблока в рычаге при запрессовке [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.drive2.ru/c/477001405429711030/>

УДК 37.016:5

Вовчанчина Т. І. (магістр, 1 курс)

Науковий керівник – проф. Савченко О. Г.

Херсонський державний університет (Херсон, Україна)

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ STEM-ТЕХНОЛОГІЙ В НАВЧАННІ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

Аналіз останніх досліджень. Аналіз психолого-педагогічної і методичної літератури свідчить, що концептуальні підходи та практичні напрями реалізації STEM-освіти цікавлять багатьох науковців: М. В. Лазарева [5], О. М. Кривоноса [4]. Про необхідність застосування STEM-підходів у навчанні зазначають Ю. Ботузова [1], О. Барна, О. Гриб'юк [3], І. Василяшко, Д. Васильєва [2], С. Волянська, О. Данилова, В. Єлізарова, Н. Морзе, О. Ткаченко, В. Юнчик та інші. Зокрема Л. В. Рождественська [2] пропонує STEM проєкт, в якому учні можуть моделювати кімнату з

підручних засобів чи будувати 3D-макет за допомогою геометричних фігур в просторі (площин, призм, пірамід, сфер, конусів, циліндрів тощо) з використанням системи динамічної математики GeoGebra. STEM-підходи у навчанні розглядають: О. Семеніхіна і М. Друшляк [6], П. Кобильник. Вони пропонують застосовувати безкоштовне програмне забезпечення Gran1, GeoGebra, LEGO MINDSTORMS для підготовки учителів математики та інформатики, а також для навчання школярів.

Мета статті: розкрити основні методи та елементи новітніх технологій для викладання математично-природничих дисциплін.

Виклад основного матеріалу. Для формування математичних, інформаційно-цифрових та ключових компетентностей можуть сприяти міжпредметні і внутрішньопредметні зв'язки в процесі навчання математики, фізики та інформатики.

Активізації пізнавальної діяльності учнів на уроках математики, фізики та інформатики вчителям допомагають досягати різні засоби. А саме: наочні засоби навчання, які приділяють особливу увагу особистісно-орієнтованому навчанню, вивченню і впровадженню інтерактивних форм та методів навчання. До них відносяться уроки-конференції, уроки-семінари, уроки з інтерактивними вправами: «пошук інформації», «коло ідей», «мозковий штурм», «асоціативний куш», робота в динамічних парах і в малих групах.

На уроках STEM учні вирішують проблеми і здійснюють пошук рішень. STEM-освіта забезпечує гнучкий процес навчання для проєктування. У цьому процесі учні визначають проблему, ведуть попередні дослідження, висувують кілька ідей для їх рішень, розробляють і створюють прототип, а потім його тестують, оцінюють і реалізують. STEM-навчання інтегрує математику і природничі науки. Необхідним є створення планів спільної роботи вчителів різних предметів. Використання на уроках знань з різних предметів навчає учнів розуміти, що при об'єднанні математики і інших наук можна вирішувати важливі життєві проблеми. Це призведе до зростання інтересу до математики та природничих наук [5].

Під час вивчення стереометрії можна пропонувати учням створювати різноманітні комбінації фігур у програмах для 3D-принтингу. Потім, за наявності 3D-принтеру, їх можна і роздрукувати. На уроках математики доцільно залучати учнів до дослідницької діяльності, під час якої ознайомити з основними етапами наукового дослідження – такими як спостереження та експеримент [2].

Зокрема, як показує статистика у деяких шкіл є комплекти з робототехніки, які переважно використовуються під час роботи відповідних гуртків у позаурочний час. Ми пропонуємо, на традиційних лабораторних роботах використовувати набір LEGO MINDSTORMS Education EV3. Як приклад можна запропонувати лабораторну роботу з теми: «Вивчення понять швидкості». Мета такої лабораторної експериментально дослідити характеристики швидкості під час рівномірного прямолінійного та прискореного руху. В таких лабораторних роботах доречно буде учням задати подібне завдання: розрахуйте на скільки градусів повинні повернутися колеса для переміщення робота вперед на 88 см. З'ясувавши, що при повороті коліс на 360° робот проїде 176 мм і наочно перевібивши, учні отримають відповідь – на 180° повинні повернутися колеса для переміщення робота вперед на 88 см. Також учням можна запропонувати позмагатися, давши їм одну спробу для переміщення своїх роботів на задану відстань. Хто виявиться ближче всіх до фінішної смуги, той переможе. Також такі заняття можливо використовувати щоб продемонструвати зв'язки природничих наук з математикою.

У цьому полягає необхідність розвивати STEM-освіту з дедалі більшим скороченням програми шкільного курсу математики, зокрема суттєвим зменшенням кількості годин на розв'язування задач на побудову з використанням циркуля та лінійки, розділу розв'язування трикутників та застосуванням векторів.

Висновки: Запровадження STEM-навчання має відбуватися поступово. Проектне та інтегроване навчання - це освіта, яка закладає інтерес до

дослідницької діяльності та готує учнів до технічно-розвиненого життя для реалізацій конкретних проєктів, застосування науково-технічних знань у реальному житті також набувати знання через гру та конструювати пристрої.

З метою залучення учнів до практичної діяльності бажано розширити діапазон форм і методів навчання, способів навчальної взаємодії. Впровадження в освітній процес STEM сформулює в учнів найважливіші риси, які визначають компетентного фахівця та дають принципово нову модель природничо-математичної освіти з новими можливостями і результатами як для вчителів, так і для учнів.

На сьогоднішній день існує нагальна потреба в підготовці та перепідготовці вчителів, які б могли працювати в зазначеному напрямі і перевести процес впровадження STEM-освіти з поодинокого на масовий рівень.

Анотація: В статті досліджуємо, як впливатимуть використані елементи STEM-освіти на уроках математики та природничих наук в закладах середньої освіти. Розглянуто можливості STEM-освіти у формуванні ключових компетентностей, необхідних для подальшого успішного навчання, пізнання навколишнього світу та вміння розв'язувати практичні завдання.

Ключеві слова: STEM технології, STEM-освіта, природничо-математичні дисципліни, уроки математики.

Abstract: In the article we show how the used elements of STEM-education will affect the lessons of mathematics and natural sciences in secondary schools. The possibilities of STEM-education in the formation of key competencies necessary for further successful learning, knowledge of the world around and the ability to solve practical problems are considered.

Key words: STEM technologies, STEM-education, natural science and mathematics, math lessons.

Література

1. Ботузова Ю.В. Динамічні моделі GeoGebra на уроках математики як основа STEM-підходу. *Фізико-математична освіта*. 2018. Випуск 3(17). С. 31–35.
2. Використання елементів STEM-освіти на уроках математики. Збірник матеріалів роботи творчої групи викладачів математики. Рівне: НМЦ ПТО, 2019. - 95 с.
3. Гриб'юк О. О. Комп'ютерне моделювання та робототехніка в навчально-виховному процесі сучасного навчального закладу Матеріали 7 міжнародної науково-практичної конференції FOSS Lviv-2017: Збірник наукових праць. Львів, 27-30 квітня 2017 р. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2017. С. 38-43.

- 4.Кривонос О. М. Робототехніка в школі. Теорія і практика використання інформаційних технологій в навчальному процесі.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2017. С. 90-91.
- 5.Лазарев М. В. О связи робототехники с механикой, электроникой и программированием, а также о междисциплинарных связях. *Вестник ТГПУ (TSPU Bulletin)*. 2013. №11 (139). С. 132-136.
- 6.Український проект «Якість освіти». WEB-STEM-школа-2018. URL: <http://yakistosviti.com.ua/uk/web-stem-shkola-programa-2018>

УДК 378.147

Гаран І. О. (студ., 4 курс)
Науковий керівник – доц. Кузьмич В. І.
Херсонський державний університет (Херсон, Україна)

ВИКОРИСТАННЯ МНОЖНИКІВ ПІДСУМОВУВАНOSTІ ПРИ ВИВЧЕННІ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

На сучасному етапі розвитку математичної освіти в Україна важливим є формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики у процесі навчання в педагогічних закладах вищої освіти, що обумовлюється специфікою педагогічної підготовки, своєрідністю математичного знання й майбутньою професійною діяльністю. Серед освітніх компонент, які забезпечують якісну підготовку майбутнього педагога, важливе місце посідає вивчення математичного аналізу, яка формує у здобувачів вищої освіти розуміння наукових ідей та методів математики, що слугують основами шкільного курсу математики.

Однією з основних тем у курсі математичного аналізу є вивчення рядів та послідовностей, які є ефективними інструментами математичних досліджень і важливим засобом побудови практичних чисельних методів. Ряди відіграють вагомую роль у вирішенні різних математичних проблем, зокрема, під час розв'язування алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, обчисленні значень інтегралів і функцій, при наближеному інтегруванні диференціальних рівнянь.

Дослідження рядів на збіжність є головною проблемою теорії рядів. Багато вчених математиків займалися пошуком відповіді на питання збігається чи розбігається даний ряд, серед них Огюстен Луї Коші, Йоганн

Карл Фрідріх Гаусс, Ернст Едуард Куммер, Йозеф Людвіг Раабе, Готфрід Вільгельм Лейбніц, Жан Лерон Д'Аламбер, Петер Густав Лежен Діріхле, Нільс Генрік Абель, Артур Уільям Рассел Бертран та ін. Результатом їхніх досліджень є найвідоміші ознаки збіжності, які використовують в теорії рядів, названі на їх честь. Серед цих ознак найбільш вживаними є ознаки порівняння, ознаки Д'Аламбера, Коші, Раабе, Куммера, Бертрана, Гаусса, інтегральна ознака Маклорена-Коші. Ці ознаки працюють безпосередньо з членами ряду, характеризуючи їх поведінку при нескінченному збільшенні номера загального члена ряду.

Протягом довгого часу більшість математиків, серед яких були Бернуллі, Лейбниц, Лагранж, Д'Аламбер та інші, безуспішно сперечалися щодо того, чому дорівнює сума розбіжного ряду. Поштовхом до вирішення цієї проблеми стала пропозиція Ейлера змінити погляд на сприйняття поняття «суми» ряду, як результату додавання всіх його членів, із загально прийнятого на, здавалося б, йому суперечне, а саме: «сумою деякого нескінченного ряду є скінчений вираз, із розкладу якого виникає цей ряд» [1, с. 7].

Ці міркування заклали підґрунтя для подальшого зародження теорії множників збіжності, а у більш загальному випадку – множників підсумовуваності рядів, яка почала активно розвиватися в кінці XIX – на початку XX століття завдяки її ефективності при отримання ознак збіжності та підсумовуваності рядів. На сучасному етапі розвитку математичної науки множники підсумовуваності є однією з провідних ланок теорії рядів, завдяки їх широкому застосуванню в інших математичних дисциплінах.

Ідея одержання ознак збіжності рядів за допомогою множників підсумовуваності полягає в тому, що члени a_n досліджуваного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

представляють у вигляді добутку: $a_n = \varepsilon_n u_n$, де $\{\varepsilon_n\}$ – деяка числова послідовність, тобто, замість ряду (1) розглядають ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n. \quad (2)$$

Якщо поведінка ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (3)$$

нам відома, то збіжність ряду (2), а отже і ряду (1), залежить лише від послідовності $\{\varepsilon_n\}$. У випадку збіжності ряду (2) числа ε_n називаються множниками збіжності ряду (1).

Класичним прикладом теорем про знаходження множників збіжності може бути наступна теорема Дедекінда-Адамара [2, с. 168].

Теорема. а) Ряд (2) збігається при будь-якому збіжному ряді (3) тоді і лише тоді, коли збігається ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n|. \quad (4)$$

б) Ряд (2) збігається при будь-якому обмеженому ряді (3) тоді і лише тоді, коли збігається ряд (4) і виконується умова: $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Частинним випадком цієї теореми є ознака Діріхле [2, с. 168]:

Ознака. Ряд (2) збігається, якщо ряд (3) обмежений (обмеженою є послідовність частинних сум ряду) і виконується умова: $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Узагальненням поняття збіжності ряду є поняття його підсумовуваності деяким методом. Такі методи, зокрема, можуть визначатись нескінченими дискретними матрицями $A = (a_{n,k})$. Якщо для ряду (3) ряд $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k a_{n,k}$

збігається при кожному значенні $n = 1, 2, \dots$ і, крім того, виконується рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = U$, то кажуть, що ряд (3) підсумовується до числа U методом A з матрицею перетворення ряду в послідовність, або коротко записують: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = U(A)$.

У випадку, коли вивчається не збіжність, а підсумовуваність ряду деяким методом підсумовування рядів, відповідні множники називають множниками підсумовуваності [2, с. 169].

Використовуючи методи знаходження множників підсумовування, можна знаходити різні типи множників підсумовування без застосування загальних теорем теорії рядів. До основних таких методів належать, зокрема, безпосередній метод, який полягає у наступному: припустивши, що ряд (3) є підсумовуваним методом $\mathcal{A}$, встановити достатні умови для чисел ε_n і довести, що при виконанні цих умов ряд (2) буде підсумовуваним методом $\mathcal{B}$ (множники підсумовуваності типу $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$). Необхідність умов для чисел ε_n доводиться методом від супротивного, а саме, доводиться, що при невиконанні розглянутої умови для чисел ε_n існує хоча б один ряд (3) такий, що для нього ряд (2) не підсумовується методом $\mathcal{B}$ [2, с. 172-173].

На сучасному етапі розвитку математичної освіти є актуальним використання множників збіжності (підсумовуваності) до отримання ознак збіжності рядів при вивченні теми «Ряди та послідовності» у курсі математичного аналізу. Такий підхід, на нашу думку, сприяє поглибленню знань здобувачів та формуванню професійної компетентності майбутніх вчителів математики в закладах вищої освіти.

Анотація. Гаран І.О. Використання множників підсумовуваності при вивченні збіжності рядів. У статті розглянуто питання застосування множників підсумовуваності при вивченні збіжності рядів в курсі математичного аналізу.

Ключові слова: ряд, послідовність, збіжність, ознаки збіжності, множники збіжності, множники підсумовуваності.

Abstract. Garan I. The use of summation factors in the study of series convergence. The article considers the application of summability factors in the study of series convergence in the course of mathematical analysis.

Key words: series, sequence, convergence, signs of convergence, convergence factors, summation factors.

Література

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. Москва: Изд-во Иностранной литературы, 1951. - 504 с.
2. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин: Валгус, 1977. - 280 с.

Гетало Д. І. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Ємельянова Т. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЧНИХ ЙМОВІРНОСТЕЙ СТАНІВ ПРОФЕСІЙНО-ПРИКЛАДНОЇ ЗАДАЧІ БУДІВЕЛЬНОЇ ГАЛУЗІ ЕКОНОМІКИ

Головною задачею аналізу процесу управління є задача про розуміння процесу як послідовності певних станів системи у відповідні моменти часу, що відбувається з реальною системою, Розв'язання подібних задач стимулює та формує розуміння і вміння математичного опису конкретного процесу у системі, як послідовної зміни стану системи.

З цією метою розробляються професійно-прикладні типові завдання, вирішення яких сприяє розвитку математичної компетентності здобувачів вищої освіти.

Математичні методи і моделі, розроблені для вирішення прикладних задач управління, в тому числі завдань управління системами обслуговування, дають можливість встановити зв'язки між основними характеристиками систем з метою оптимізації управління: надходження сировини, матеріалів, комплектуючих виробів на склад і видачі їх зі складу; організації та ремонту обладнання; визначення оптимальної чисельності обслуговуючих відділів і служб підприємств; у будівельній галузі: організації складських приміщень, будівельних майданчиків, вантажно-розвантажувальних робіт, складуванні вантажів; в транспортних технологіях: при вирішенні завдань транспортної логістики, розміщенні вантажів на складах, прогнозі та організації доставки продукції тощо.

Теорія масового обслуговування займається аналізом процесів управління в системах управління, системах обслуговування, в яких однотипні дії повторюються багаторазово (автоматичні лінії виробництва, транспортна логістика телекомунікація тощо),

Вивчення процесу як послідовності станів, що залежать від попередніх моментів часу, вимагає знання основних методів і моделей теорії ймовірностей і математичній статистиці, а також базових знань вищої математики.

Часто інтерес представляє лише стаціонарний режим, який встановлюється в системі після досить тривалої роботи і представляється послідовністю станів, ймовірності яких перестають залежати від часу. Ймовірності станів системи відповідають характеристикам, які досліджуються.

Задача. Будівельний майданчик обладнаний 2 кранами, які після відмови і ремонту продовжують працювати на майданчику. Відмова кожного крана може статися в будь-який момент часу. За статистикою інтенсивність відмов кожного крана λ_1, λ_2 , відповідно. Час відновлення (ремонту) кожного крана являє собою випадкову величину, розподілену за показовим законом з інтенсивністю μ_1, μ_2 , відповідно. Побудувати розмічений граф, що ілюструє роботу системи (переходи з одного стану в інший). системи (переходи из одного состояния в другое).

Знайти граничні ймовірності станів системи при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \mu_1 = 2, \mu_2 = 3$. Оцінити середній дохід від застосування системи в стаціонарному режимі, якщо робота в одиницю часу першого і другого вузлів приносить дохід, відповідно, в 10 і 6 гр. од., а їх ремонт вимагає витрат, відповідно, в 4 і 2 гр. од. Оцінити економічну ефективність наявної можливості зменшення вдвічі середнього часу ремонту кожного з двох вузлів, якщо при цьому доведеться вдвічі збільшити витрати на ремонт кожного вузла (в одиницю часу).

Розв'язання.

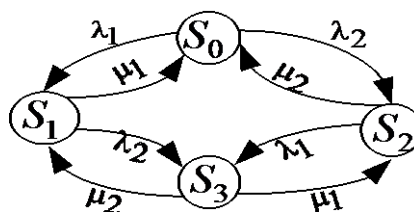


Рис.1. Розмічений граф станів системи

Можливі стани системи представлені на рис.1:

S_0 - обидва будівельні крани знаходяться в робочому стані; S_1 - сталася відмова першого крана з переходом зі стану S_0 в стан S_1 з інтенсивністю λ_1 , другий кран знаходиться в робочому стані; S_2 - сталася відмова другого крана з переходом зі стану S_0 в стан S_2 з інтенсивністю λ_2 , перший кран знаходиться в робочому стані; S_3 - обидва крани знаходяться в стані відмови.

При відновленні з інтенсивністю μ_1 першого крана в робочий стан система переходить зі стану S_3 в стан S_2 . При відновленні з інтенсивністю μ_2 другого крана в робочий стан система переходить зі стану S_2 в стан S_0 .

Складаємо по розміченому графу (рис.1) систему Колмогорова для ймовірностей $p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ станів S_0, S_1, S_2, S_3 , з початковими умовами $t = 0: p_0(0) = 1, p_1(0) = 0, p_2(0) = 0, p_3(0) = 0$.

При складанні i -го ($i = 0, 1, 2, 3$) рівняння слід розглянути стан S_i на розміченому графі системи. У лівій частині рівняння повинна знаходитися похідна ймовірності стану за часом $\frac{dp_i(t)}{dt}$. У правій частині рівняння повинна знаходитися сума добутоків інтенсивностей та ймовірності станів, на які вказує стрілка, зі знаком (+) до стану S_i та зі знаком (-), якщо стрілка має напрямок від стану S_i .

З плином часу ($t \rightarrow \infty$) в системі випадковим чином настає стаціонарний режим, коли ймовірності кожного стану не залежать від часу.

Похідні від них за часом стають рівними нулю, тобто $\frac{dp_i}{dt} = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$,

і система рівнянь А. Н. Колмогорова перетворюється в систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язання якої дозволяє визначити величини стаціонарних (граничних) ймовірностей.

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_1 p_0 - \lambda_2 p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2, \\ 0 = \lambda_1 p_0 - \lambda_2 p_1 - \mu_1 p_1 + \mu_2 p_3, \\ 0 = \lambda_2 p_0 - \lambda_1 p_2 - \mu_2 p_2 + \mu_1 p_3, \\ 0 = \lambda_2 p_1 + \lambda_1 p_2 - \mu_1 p_3 - \mu_2 p_3. \end{cases}$$

Система з чотирьох рівнянь зводиться до системи з трьома рівняннями, оскільки одне з них є лінійною комбінацією трьох інших рівнянь. Доповнюємо систему умовою нормування для ймовірностей станів системи $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$$\begin{cases} -(\lambda_1 + \lambda_2) p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = 0, \\ \lambda_1 p_0 - (\lambda_2 + \mu_1) p_1 + \mu_2 p_3 = 0, \\ \lambda_2 p_0 - (\lambda_1 + \mu_2) p_2 + \mu_1 p_3 = 0, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Для заданих параметрів системи граничні ймовірності стаціонарного режиму

$$p_0 = 0,40; p_1 = 0,20; p_2 = 0,27; p_3 = 0,13.$$

визначають середній час знаходження системи в кожному стані: 40% часу буде знаходитися в стані S_0 (обидва вузли працюють), 20% — в стані S_1 (перший вузол ремонтується, другий працює), 27% - в стані S_2 (другий вузол ремонтується, перший працює) і 13% часу - в стані S_3 (обидва вузли ремонтуються).

Розглядаючи стани системи, граф якої зображено на рис. 1, робимо висновок, що перший вузол працює без відмови в середньому $p_0 + p_1 = 0,40 + 0,27 = 0,67$ години; другий вузол $p_0 + p_1 = 0,40 + 0,20 = 0,60$ години. В той же час перший вузол

ремонтується в середньому $p_1 + p_3 = 0,20 + 0,13 = 0,33$ години; а другий вузол $p_2 + p_3 = 0,27 + 0,13 = 0,40$ години.

Від застосування системи середній дохід в одиницю часу дорівнює різниці між доходами та витратами

$$Д = 0,67 \cdot 10 + 0,60 \cdot 6 - 0,33 \cdot 4 - 0,40 \cdot 2 = 8,18 \text{ гр. од}$$

Скорочення вдвічі середнього часу ремонту кожного вузла означає збільшення вдвічі інтенсивності потоку закінчень ремонтів вузла. Таким чином, при $\mu_1 = 4, \mu_2 = 6$ система лінійних алгебраїчних рівнянь стаціонарного режиму з нормувальною умовою приймає вигляд

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2, \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3, \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок системи

$$p_0 = 0,60; p_1 = 0,15; p_2 = 0,20; p_3 = 0,05.$$

Таким чином, система у перший стані працює без відмови в середньому $p_0 + p_2 = 0,60 + 0,20 = 0,80$ години; у другому стані $p_0 + p_1 = 0,60 + 0,15 = 0,75$ години. В той же час система у першому стані ремонтується в середньому $p_1 + p_3 = 0,15 + 0,05 = 0,20$ години; а у другому - $p_2 + p_3 = 0,20 + 0,05 = 0,25$ години.

Витрати на ремонт збільшені вдвічі і складають тепер 8 гр.од. і 4 гр.од.

Середній дохід в одиницю часу при зменшенні часу ремонту дорівнює

$$Д = 0,80 \cdot 10 + 0,75 \cdot 6 - 0,20 \cdot 8 - 0,25 \cdot 4 = 9,9 \text{ гр. од}$$

Дохід системи при зменшенні часу ремонту з збільшенням його вартості підвищується на 20%, це говорить про економічну доцільність прискорення ремонту вузлів системи.

Висновок. Дохід системи при зменшенні часу ремонту з збільшенням його вартості підвищується на 20%,

Рекомендації. Для підвищення доходу системи економічно доцільно зменшення часу ремонту з збільшенням його вартості.

Література

1. Есипов Б. А. Методы исследования операций: Учебное пособие. – Изд. Лань, 2013. – 304 с.
2. Емельянов А. А. Модели процессов массового обслуживания / Прикладная информатика. - 2008. - №5 (17) – С. 92-130.

УДК 373.016:51

Ільїна Я. О. (студ., 4 курс);
Науковий керівник – доц. О. Л. Швай
*Волинський національний університет імені Лесі Українки
(Луцьк, Україна)*

ЗАСТОСУВАННЯ КОНГРУЕНЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

Постановка проблеми. Олімпіадні задачі в математиці – термін для позначення кола задач, для розв'язання, яких потрібен несподіваний і оригінальний підхід. Серед великої кількості олімпіадних задач є такі, які об'єднують під рубрику «Задачі на подільність». Загалом вони формулюються так: «Довести, що довільне число a ділиться на довільне числа b , але не ділиться на довільне число c » або ж «Знайти остачу при ділення довільного числа a на довільне число b ». Відповідь у цих задачах вимагає повного розв'язання задачі та аргументованого доведення.

Мета дослідження – показати ефективність застосування конгруенцій при розв'язуванні задач на подільність.

Результати дослідження. Поняття конгруенцій не вивчається в курсі математики середньої школи, але його доцільно розглянути з учнями на факультативних заняттях у 9-11 класах. Одна з можливих послідовностей вивчення теми: спочатку опрацювати теоретичні відомості, потім розібрати з учнями готові розв'язання олімпіадних задач і лише після цього перейти до

самостійного розв'язування учнями задач, поступово підвищуючи складність пропонованих завдань.

Спеціально підібрана система вправ з використанням конгруенцій та їх властивостей розвиватиме в учнів математичну інтуїцію, вміння аналізувати, а це, у свою чергу, сприятиме розвитку їх математичного мислення, а отже, й загального розвитку школярів.

Покажемо, що при доведенні подільності виразів, які містять степінь з натуральним показником, доцільно використовувати конгруенції та їх властивості.

Означення. Цілі числа a та b називаються конгруентними (або порівняними) за модулем m , де m – будь-яке натуральне число, якщо їх різниця ділиться на m . Записують $a \equiv b \pmod{m}$. [1, с. 54]

Позначимо буквами a, b, c, d цілі числа, m і n – натуральні. Тоді справедливими є наступні властивості конгруенцій:.

1. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
2. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.
3. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $ac \equiv bc \pmod{m}$.
4. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$ і $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.
5. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$ і $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.
6. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $an \equiv bn \pmod{m}$. [1, с. 56]

Розглянемо приклад олімпіадних задач, «ключиком» до розв'язання яких є конгруенції.

Задача 1. Довести, що число $n^5 + 4n$ ділиться на 5 при будь-якому натуральному значенні n . [2, с. 67]

Доведення. При діленні натурального числа n на число 5 можливі такі випадки:

1. $n \equiv 1 \pmod{5}$.

За властивістю 6 конгруенцій:

$$n^5 \equiv 1 \pmod{5} \quad \text{та} \quad 4n \equiv 4 \pmod{5}.$$

Тоді за властивістю 4 маємо, що $n^5 + 4n \equiv 5 \pmod{5}$, а звідси випливає, що $n^5 + 4n \equiv 0 \pmod{5}$, тобто число $(n^5 + 4n) \square 5$.

2. $n \equiv 2 \pmod{5}$.

За властивостями конгруенцій:

$$n^5 \equiv 2 \pmod{5} \quad \text{та} \quad 4n \equiv 3 \pmod{5}.$$

За властивістю конгруенцій 6, маємо $n^5 + 4n \equiv 5 \pmod{5}$, а звідси випливає, що $n^5 + 4n \equiv 0 \pmod{5}$, тобто число $(n^5 + 4n) \square 5$.

3. $n \equiv 3 \pmod{5}$.

За властивостями конгруенцій:

$$n^5 \equiv 3 \pmod{5} \quad \text{та} \quad 4n \equiv 2 \pmod{5}.$$

Використавши властивість 6, маємо $n^5 + 4n \equiv 5 \pmod{5}$, а звідси випливає, що $n^5 + 4n \equiv 0 \pmod{5}$, тобто число $(n^5 + 4n) \square 5$.

4. $n \equiv 4 \pmod{5}$.

За властивостями конгруенцій:

$$n^5 \equiv 4 \pmod{5} \quad \text{та} \quad 4n \equiv 1 \pmod{5}.$$

Отже, за властивістю 6 конгруенцій, $n^5 + 4n \equiv 5 \pmod{5}$, а звідси випливає, що $n^5 + 4n \equiv 0 \pmod{5}$, тобто число $(n^5 + 4n) \square 5$.

Отже, $(n^5 + 4n) \square 5$ при будь-якому $n \in N$, що і потрібно було довести.

Задача 2. Знайти остачі при діленні на 3 чисел $2n^2 + 1$, де $n \in N$. [2, с. 186]

1. Нехай $n : 3$, тоді $n^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $2n^2 \equiv 0 \pmod{3}$.

За властивістю конгруенцій: $2n^2 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$.

2. Нехай $(n - 1) : 3$ або $(n + 1) : 3$, тоді

$$n - 1 \equiv 0 \pmod{3},$$

або

$$n + 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Тоді за властивістю конгруенцій:

$$n \equiv 1 \pmod{3},$$

або

$$n \equiv -1 \pmod{3}.$$

Звідси $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Отримали, що:

$$2n^2 \equiv 2 \pmod{3},$$

а, тому $2n^2 + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3}$.

Отже, остача від ділення чисел $2n^2 + 1$, де $n \in N$, на число 3 дорівнює:

- 1, якщо n кратне 3,
- 0, якщо n не кратне 3.

Висновок. При доведенні подільності виразів, які містять степінь з натуральним показником, доцільно використовувати конгруенції та їх властивості. Вивчення на факультативних заняттях теорії конгруенцій не лише дозволить учням підготуватися до участі у математичних олімпіадах, але й сприятиме розвитку уявлень школярів про математику як потужний метод наукового пізнання.

Анотація. В статті обґрунтовано застосування методу конгруенцій при розв'язуванні олімпіадних задач на подільність, зокрема для виразів, які містять степінь з натуральним показником. Наведено приклади олімпіадних задач, які розв'язуються цим методом.

Ключові слова: конгруенція, подільність, олімпіадна задача.

Annotation. The article substantiates the application of the method of congruences in solving Olympiad problems on divisibility, in particular for expressions that contain a degree with a natural exponent. An example of the Olympic problem solved by this method is given.

Keywords: congruence, divisibility, Olympic problem.

Література

1. Філозоф К. Ф. Основи теорії чисел / К. Ф. Філозоф, Т. В. Волошина, Р. О. Сорока. – Луцьк: РВВ "Вежа" Волинського державного університету ім. Лесі Українки, 2010. – 132 с.
2. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: навч. посіб. / О.А. Сарана. – К.: А.С.К., 2004. – 344 с.
- [3] - Корнілов М. Ю. Про трикутник Герона // У світі математики: Зб. наук. - популярних статей / М. Ю. Корнілов, В. В. Платохник. – К.: Радянська школа. – №19. – 134 с.

Коленко Н. Д. (студ., 2 курс),
Обихвост Р. В. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – доц. Гадецька С. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВИХ ВИПАДКІВ КОЛА ДЕВ'ЯТИ ТОЧОК

У роботі розглянуто задачу кола дев'яти точок, що властиве будь-якому трикутнику. Доведено існування такого кола у окремих випадках тупокутного і прямокутного трикутників.

Колись, в далекій давнині, геометрія уособлювала всю математику. І незважаючи на те, що за останні століття виникла маса різних математичних напрямків, геометрія зберегла завжди притаманну їй привабливість, а як наука стала ще більш корисною, ніж була коли-небудь раніше.

З давніх часів відомий цілий ряд геометричних задач, які вражають кожного, хто стикається з ними. Варто тільки згадати знамениті завдання старовини - подвоєння куба, трисекцію кута і квадратуру кола, спроби вирішити яких привели до розвитку нових гілок математики. У XIX столітті в геометрії було проведено багато серйозних досліджень. Вони привели до встановлення ряду співвідношень в трикутнику.

До відомих класичних «чудових» точок, прямих і кіл було приєднано багато особливих геометричних об'єктів. Мета цієї роботи полягає в тому, щоб розповісти про деякі з них, а також надати докази наведених фактів для деяких цікавих окремих випадків.

Почнемо з розгляду деяких понять з геометрії трикутника, які будуть потрібні для викладення подальшого матеріалу: трикутник, отриманий з'єднанням середин сторін даного трикутника, називається серединним; центроїд трикутника - це точка перетину його медіан; ортоцентр трикутника - це точка перетину його висот.

Справедливим є наступне твердження [1 – 3].

Теорема 1. Ортоцентр, центроїд і центр описаного кола трикутника лежать на одній прямій (яка називається прямою Ейлера). Центроїд ділить відстань від ортоцентра до центра описаного кола у відношенні 2: 1.

Зауважимо, що точки, які є серединами відрізків висот даного трикутника, починаючи від вершин і до ортоцентра, також носять ім'я Ейлера. Наведемо теорему, окремі випадки якої є предметом даного дослідження.

Теорема 2. Основи трьох висот трикутника, середини трьох його сторін і точки Ейлера лежать на одному колі (яке називається колом дев'яти точок). Радіус цього кола дорівнює половині радіуса описаного кола трикутника, а центр належить прямій Ейлера і знаходиться посередині між ортоцентром трикутника і центром описаного кола.

Встановимо існування аналогічної окружності у випадках тупокутного і гострокутного трикутників.

У тупокутному трикутнику ABC (рис. 1) відмітимо всі зазначені дев'ять точок.

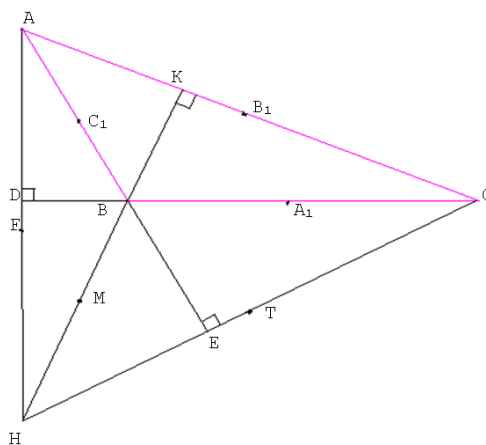


Рис. 1. Особливі точки тупокутного трикутника ABC

Позначивши на рис. 1 через H ортоцентр трикутника, розглянемо точки A_1 , B_1 , C_1 – середини сторін BC , AC , AB відповідно, точки E , D , K – основи висот трикутника, точки F , M , T – точки Ейлера і покажемо, що вони належать одному колу, перейшовши для цього до розгляду гострокутного трикутника AHC . З рис.1 видно, що вершина B тупого кута є ортоцентром Δ

АНС. Змінюються при переході до розгляду трикутника АНС і ролі дев'яти точок трикутника АВС: точки D, E, K- основи висот трикутника АНС, точки F, T, B₁ - середини його сторін, а точки M, C₁, A₁ - його точки Ейлера. Але тоді за теоремою 2 всі ці дев'ять точок лежать на одному колі, що й треба було довести. Отже, теорема про коло дев'яти точок є справедливою і для тупокутного трикутника.

У випадку прямокутного трикутника (рис. 2) розгляд дев'яти точок фактично зводиться до п'яти точок B, A₁, K, O, C₁ (дві точки Ейлера збігаються з центрами сторін - точками A₁ і C₁, а третя точка Ейлера і основи двох висот співпадають з вершиною B прямого кута).

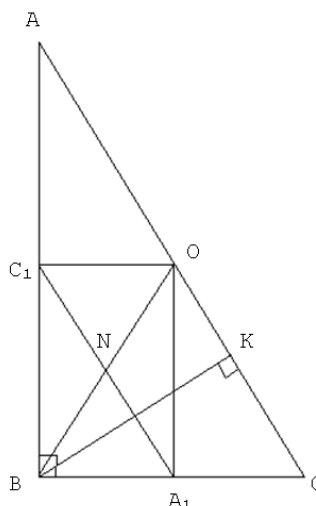


Рис. 2. Особливі точки прямокутного трикутника АВС.

Очевидно, коло, описане навколо прямокутника BA₁OC₁, має центр в точці N перетину його діагоналей і проходить через точку K як через вершину прямого кута, що спирається на діагональ BO як на діаметр. Це коло є в даному випадку шуканим.

Література

1. С.И. Зетель. Новая геометрия треугольника. – Москва: Учпедгиз, 1962. – 152 с.
2. Г.С.М.Кокстер. Введение в геометрию. – Москва: Наука, 1966. - 648 с.
3. Г.С.М.Кокстер, С.Л.Грейтцер. Новые встречи с геометрией. – Москва: Наука, 1978. - 224 с.

Конотоп К. А. (магістр, 1 курс)
Науковий керівник – проф. Савченко О. Г.
Херсонський державний університет (Херсон, Україна)

ПЕРШЕ ЗНАЙОМСТВО З ЛИСТОМ МЕБІУСА ЯК ФУНКТОРІАЛЬНИМ ПРОСТОРОМ

Постановка проблеми. Більшість людей вважають математику одноманітною наукою. Проте ми хочемо зазначити, що математика – це область знань, яка містить багато цікавих та несподіваних логічних висновків.

Мета статті: запропонувати здобувачам середньої освіти 9–11 класів один з варіантів ознайомлення з листом Мебіуса як функторіальним простором.

Виклад основного матеріалу.

Спочатку пропонуємо здобувачам середньої освіти власноруч склеїти прямокутний аркуш паперу за вказаними напрямками.

Розглянемо наступні випадки склеювання:

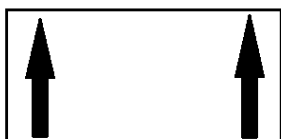


Рис. 1



Рис. 2

Рис. 1 – найпростіший приклад склеювання. Очевидно, що ми отримаємо циліндр. Здобувачі середньої освіти мають переконатися, що ця поверхня є двобічною і границя її складається з двох кіл.

Щоб отримати поверхню гомеоморфну циліндру також можна провести склеювання перевернувши один з кінців прямокутника двічі. Дана поверхня буде відмінна від усім нам знайомого циліндра іншим розташуванням у тривимірному евклідовому просторі.

Також цікавим і неочікуваним є приклад поверхні, якщо один з напрямів склеювання змінити на протилежний.

На рис. 2 зображено склеювання, результатом якого є лист Мебіуса. Він, на відміну від циліндра, є однобічною поверхнею, границею якої є лінія, гомеоморфна колу. Лист Мебіуса як і циліндр реалізується у тривимірному просторі.

Здобувачам середньої освіти цікаво буде дізнатися, що середні лінії у циліндра і листа Мебіуса однакові – це коло. Але на відміну від циліндра, якщо лист Мебіуса розрізати по середній лінії, то поверхня залишиться одним цілим.

Наступним етапом у процесі склеювання протилежних сторін прямокутника є склеювання не однієї, а двох пар протилежних сторін.

Якщо склеювання здійснювати за схемою вказаною на рис. 3, то учні отримають наступну знайому з дитинства поверхню – тор.

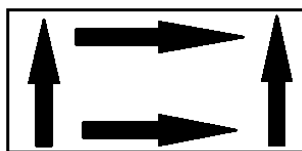


Рис. 3

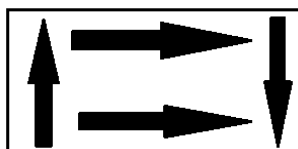


Рис.4

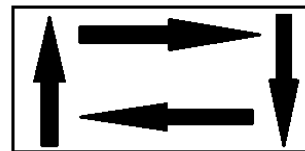


Рис.5

звісно, що найдопитливіші учні запропонують за аналогією пунктів 1–2 змінити напрями склеювання і в пунктах 4–5.

Проте, якщо намагатися склеювання проводити за схемою рис. 4, то ми «отримаємо» поверхню (це пляшка Клейна), яка у тривимірному просторі глобально не реалізується.

Якщо ж на рис. 4 змінити напрями склеювання за горизонтальними лініями, то отримаємо приклад ще одного двовимірного простору (двовимірний проективний простір), який також глобально не реалізується у тривимірному просторі (див. рис. 5). [2]

Досить цікавим є процес склеювання за напрямками вказаними на рис. 6, який ми розглянемо детальніше.

Для ретельного ознайомлення з термінологією теорії функторів, яку ми будемо надалі використовувати, ми відсилаємо читача до робіт [1–5].

На першому етапі в одиничному квадраті $I^2 = [0; 1] \times [0; 1]$ ототожнимо точки відносно діагоналі $y = x$.

Далі ми будемо розглядати тільки нижній трикутник. Це пов'язано з будовою простору $\text{exp}_2 X$, де еквівалентними мають бути пари $(x, y) \sim (y, x)$.

Уявляючи коло S , як відрізок $I = [0; 1]$, у якого склеєні кінцеві точки 0 та 1, простір $\text{exp}_2 S$ можна уявити як трикутник на рис. 6, у якого склеювання відбувається згідно вказаних напрямів та з урахуванням того, що $(x, 0) \sim (1; x)$, а також $(0; 0) \sim (0; 1) \sim (1; 0)$.

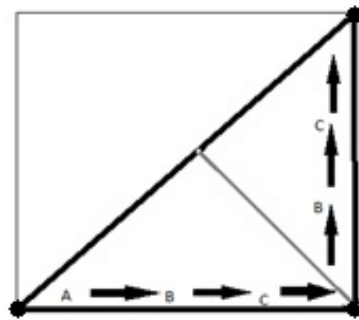


Рис. 6

Тепер залишається здобувачам середньої освіти переконатися у тому, що отриманий простір співпадає з листом Мебіуса. Для цього потрібно провести склейки згідно вказаних напрямів. Але здійснити це у тривимірному просторі проблематично. Для цього учням потрібно здогадатися (!) провести необхідний розріз з наступним склеюванням як вказано на рис. 6.

Ця операція є аналогічна тій, яку необхідно провести для доведення гомеоморфізму «звичайного» циліндру та фігури отриманої у результаті склеювання прямокутника, де одна з пар протилежних сторін була перевернута двічі.

Отже, підсумовуючи можемо сказати, що симетричний квадрат кола $exp_2 S$ гомеоморфний листу Мебіуса.

Висновки. Здобувачі середньої освіти знайомляться з поверхнями, які утворюються у результаті склеювання прямокутників за різними схемами. При цьому отримуються однобічні та двобічні поверхні (зауважимо, що деякі з них не допускають реалізації у тривимірному просторі).

Указаний цикл занять з факультативної підготовки знайомить здобувачів середньої освіти з властивостями листа Мебіуса. Тобто учні переконуються, що неочікувана геометрія поруч.

Анотація. Ціль нашої роботи – указати цикл занять з факультативної підготовки для учнів 9–11 класів про властивості листа Мебіуса. Також у цій статті ми пропонуємо розглянути склеювання прямокутників, у результаті чого отримуємо різні поверхні.

Ключові слова: лист Мебіуса, склеювання, гомеоморфізм, компакт.

Abstract. The purpose of our work is to indicate a series of classes on optional training for students in grades 9–11 on the properties of the Mobius's letter. Also in this article, we propose to consider gluing rectangles, which will result in different surfaces.

Key words: Moebius's letter, gluing, homeomorphism, compact.

Література

1. Федорчук В. В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q -многообразия. *Успехи математических наук*. 1981. Т. 36. Выпуск 3 (219). С. 177 -195.
2. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Топология гиперпространств и ее приложения. М.: Знание, 1989. С. 3-23
3. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов. *Успехи математических наук*. 1981. Т. 36., Вып. 3. С. 3-62.
4. Savchenko A.G. Functor exp_n^c , absolute retracts and Hilbert space. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 1985. № 38 (6). P. 986-992.
5. Savchenko A. G. Properties of the mapping $exp_n^c f$. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*. 1985. №1. P.19-25.

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ГІДРОПРИВОДА РУЛЬОВОГО КЕРУВАННЯ КОЛІСНОГО ТРАКТОРА

На теперішній час системи рульового керування з застосуванням об'ємного гідропривода (ОГП) використовуються практично на всіх самохідних колісних будівельних і дорожніх машинах та сільськогосподарських тракторах [1;2]. Для забезпечення якості таких систем рульового керування весь час ведуться роботи по їх вдосконаленню та модернізації їх основного вузла – насоса-дозатора [3;4]. Для забезпечення потрібної якості роботи системи ОГП розглянемо аналіз динамічних процесів в силовому рульовому контурі, для чого використаємо методику імітаційного моделювання. Для проведення аналізу динамічних процесів в силовому контурі рульової системи розглянемо розрахункову схему ОГП (рис. 1), яка містить дві системи – систему рульового керування з блоком насоса-дозатора НД та систему керування робочим обладнанням трактора (блок Р). Обидві системи живляться від одного насоса Н. Насос живлення Н з приводом від коробки передач КП та двигуна внутрішнього згоряння ДВЗ нагнітає робочу рідину (РР) під тиском p_n до вхідного каналу НД, де вона через зворотний клапан КО потрапляє на вхід гідророзподільника Рнд.

Особливість цієї системи рульового керування полягає в тому, що в ній використовується насос-дозатор фірми Lifam моделі SUB 400-S1 з вбудованим пріоритетним клапаном. Тому крім основних вихідних каналів L і R , цей насос-дозатор НД містить додатковий, який є вихідним каналом $p_n(EF)$ вбудованого пріоритетного клапана, і до якого підключена система керування агрегатами робочого обладнання трактора. Вхідний напірний канал p_n насоса-дозатора НД з'єднано з виходом насоса живлення Н, а зливний канал T з'єднується із зливною магістраллю всієї гідросистеми,

звідки РР потрапляє в гідробак Б через оливоохолоджувач АТ та фільтр Ф. Вмонтована в гідророзподільник Рнд функція пріоритету за лінією $p_n(EF)$ забезпечує подачу частини витрати насоса Q_n в першу чергу до системи рульового керування в кількості, що визначається швидкістю обертання керма, а решта відводиться до системи керування робочим обладнанням трактора.

Основні вихідні канали L і R насоса-дозатора НД з'єднані з порожнинами виконавчих гідроциліндрів Ц1 і Ц2, штоки яких підключені зустрічно до сошки, від якої через систему важелів задають кут повороту керованим колесам. Тиск в каналі підведення РР до гідроциліндрів на схемі позначено p , і $p_{зл}$ в каналі відведення РР.

Розглянемо динамічні процеси в гідроциліндрах системи повороту коліс при різних величинах витрати $Q_{\text{сум}}$ від насоса-дозатора НД та різних значеннях зустрічного зовнішнього навантаження $F_{\text{сум}}$. Для проведення такого дослідження використаємо методику імітаційного математичного моделювання, розглядаючи зміну тиску в порожнинах гідроциліндрів та переміщення їх штоків.

Вихідним параметром насоса-дозатора є витрата $Q_{\text{сум}}$, яка може змінюватися за своїм значенням залежно від швидкості обертання рульового колеса. Іншою складовою дії на гідроциліндри є зовнішнє навантаження з боку коліс $F_{\text{сум}}$, для подолання якого створюється необхідний тиск p . При побудові математичної моделі силової частини системи ОГП рульового керування приймаємо наступні припущення: щільність РР (ρ) приймаємо постійною; нехтуємо витоками крізь поршневі та штокові ущільнення в гідроциліндрах; не враховуємо хвильові процеси в трубопроводах з причини їх невеликої довжини; розглядаємо додання системою значних навантажень, при яких тиск на виході з гідроциліндрів $p_{зл}$ незначний і їм можна знехтувати.

$$Q_{\text{сум}} = V_{\text{нд}} \cdot n_{\text{к}};$$

$$Q_{1\text{п}} = S_{1\text{п}} \cdot v;$$

$$Q_{2\text{шт}} = S_{2\text{шт}} \cdot v,$$

(2)

де $V_{\text{нд}}$ – робочий об’єм дозуючого вузла насоса-дозатора;

$n_{\text{к}}$ – швидкість обертання керма;

$$S_{1\text{п}} = \frac{\pi \cdot D_{\text{п}}^2}{4} \quad \text{і} \quad S_{2\text{шт}} = \frac{\pi}{4} (D_{\text{п}}^2 - d^2) \quad - \text{площі поршня діаметром } D_{\text{п}} \text{ та}$$

ефективна площа штокової порожнини гідроциліндра при діаметрі штоку d , відповідно;

v – швидкість переміщення штоків гідроциліндрів.

Деформаційна витрата визначається як

$$Q_{\text{деф1}} = [(V_{01} + S_{1\text{п}}) / E] (dp / dt); \quad Q_{\text{деф2}} = [(V_{02} + S_{2\text{шт}}) / E] (dp / dt), \quad (3)$$

де p – тиск в порожнинах гідроциліндрів Ц1 і Ц2 (приймаємо однаковим згідно закону Паскаля для РР);

V_{01} і V_{02} – початкові об’єми в поршневій (для Ц1) та штоковій (для Ц2) порожнинах, відповідно (надалі приймаємо $V_{\text{сум}} = V_{01} + V_{02}$);

E – модуль пружності РР.

Після перетворень формула для балансу витрат РР для ділянки вихідного каналу насоса-дозатора приймає вид

$$Q_{\text{сум}} = v \frac{\pi}{4} (2D_{\text{п}}^2 - d^2) + \frac{V_{\text{сум}} + y \frac{\pi}{4} (2D_{\text{п}}^2 - d^2)}{E} \cdot \frac{dp}{dt}. \quad (4)$$

Після перетворення до форми Коші відносно похідної dp / dt і інтегрування визначаємо зміну тиску в часі в гідроциліндрах

$$p = \int_0^t E \frac{Q_{\text{сум}} - v \frac{\pi}{4} (2D_{\text{п}}^2 - d^2)}{V_{\text{сум}} + y \frac{\pi}{4} (2D_{\text{п}}^2 - d^2)} dt. \quad (5)$$

Рівняння руху штоків навантажених гідроциліндрів Ц1 і Ц2, виходячи з принципу Даламбера, має вид

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \left[(S_{1п} + S_{2п} - S_{2шт})p - F_1 - F_2 - F_{1ж.тр} - F_{2ж.тр} - \right. \\ \left. - F_{1тр} - F_{2тр} \right], \quad (6)$$

де m – маса, що підлягає повороту;

$F_1 + F_2 = F_{\Sigma}$ – сумарне зовнішнє зусилля (навантаження), що долається двома гідроциліндрами;

$F_{1ж.тр}$ і $F_{2ж.тр}$ – рідинне тертя в гідроциліндрах Ц1 і Ц2, відповідно;

$F_{1тр}$ і $F_{2тр}$ – напівсухе тертя поршнів та штоків гідроциліндрів Ц1 і Ц2, відповідно.

Після двох послідовних інтегрувань цього рівняння маємо вирази для швидкості та переміщення штоків гідроциліндрів при повороті машини

$$v = \int_0^t \frac{1}{m} \left[\frac{\pi}{4} (2D_{п}^2 - d^2) p - F_{\Sigma} - F_{ж.тр} - F_{тр} \right] dt; \quad y = \int_0^t v dt. \quad (7)$$

У подальшому для проведення динамічного аналізу роботи системи скористаємося обчислювальними блоками пакету VisSim з урахуванням використання блоків Variable. При моделюванні системи рульового керування з двома гідроциліндрами аналізуються перехідні процеси в системі і її вихід на сталий режим. При розрахунках за допомогою цих блоків задаємо лінійний закон зміни сили зовнішнього навантаження та витрати РР або задаємо їх числовими значеннями.

Література

1. Аврунін Г.А. Гідравлічне обладнання будівельних та дорожніх машин / Г. А. Аврунін, І. Г. Кириченко, В. Б. Самородов. – Підручник, ХНАДУ, 2016. – 438 с.
2. Аврунін Г.А. Основи об'ємного гідропривода і гідропневмоавтоматики: навчальний посібник / Г. А. Аврунін, І. І. Кириченко, І. І. Мороз; під ред. Г. А. Авруніна. – Харків : ХНАДУ, 2009. – 424 с.
3. Трактор ХТЗ-17021. Инструкция по эксплуатации 170.00.000.ИЭ. ХТЗ, 1999. – 170 с.
4. Усовершенствование конструкции насоса-дозатора системы гид-рообъемного рулевого управления самоходных машин / Н. І. Иванов, О. О. Моторная, Л. П. Середя, А. М. Переяславский. // MOTROL: Commission of motorization and energetics in agriculture: Polish Academy of sciences.– Lublin, 2014.– Vol. 16, №5. – С. 103-114.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ДЕЯКИМИ ОСОБЛИВИМИ ТОЧКАМИ КОЛА

У роботі розглянуто задачі, пов'язані з різними особливими точками геометричних фігур. Наведено окремі властивості таких точок, задіяно апарат геометрії трикутника для встановлення деяких цікавих геометричних фактів.

У деяких задачах розмітки аркуша в процесі проектування виникають проблеми, що призводять до вивчення різних особливих точок геометричних фігур. Метою роботи є розгляд окремих питань, пов'язаних з колом дев'яти точок, а також з іншими колами, що проходять через різні «визначні» точки.

Задача 1. Бісектриси внутрішніх кутів трикутника ABC продовжені до перетину з описаним колом в точках A_1 , B_1 , C_1 відповідно. Нехай L – точка перетину бісектрис. Доведемо, що середини відрізків AL , BL , CL , A_1L , B_1L , C_1L , A_1B_1 , A_1C_1 , B_1C_1 лежать на одному колі (рис. 1).

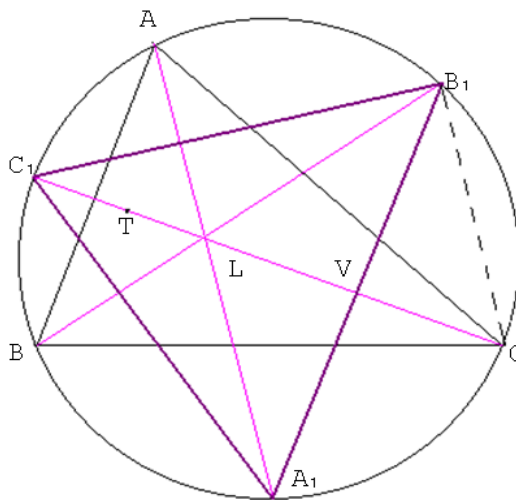


Рис. 1. Рисунок до задачі 1

Покажемо, що цю задачу можна розв'язати, застосовуючи теорему про коло дев'яти точок [1 - 3] до $\Delta A_1B_1C_1$. Наведемо формулювання цієї теореми. Теорема. Основи трьох висот трикутника, середини трьох його сторін і точки Ейлера лежать на одному колі (яке називається колом дев'яти точок). Радіус цього кола дорівнює половині радіуса описаного кола трикутника, а центр належить прямій Ейлера і знаходиться посередині між ортоцентром трикутника і центром описаного кола.

Позначимо: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Тоді для дуг, на які спираються відповідні їм вписані кути, маємо:

$$\cup BA_1 = \cup A_1C = \alpha/2, \cup CB_1 = \cup B_1A = \beta/2, \cup AC_1 = \cup C_1B = \gamma/2.$$

Позначимо через V точку перетину відрізків A_1B_1 і CC_1 . Оскільки кут $\angle VB_1C_1$ дорівнює куту $\angle A_1B_1C_1$, що спирається на дугу C_1A_1 величиною $(\alpha+\gamma)/2$, а кут $\angle VC_1B_1$ дорівнює куту $\angle CC_1B_1$, що спирається на дугу CB_1 величиною $\beta/2$, то з ΔC_1VB_1 маємо:

$$\angle C_1VB_1 = 180^\circ - \angle VB_1C_1 - \angle VC_1B_1 = 180^\circ - (\alpha+\gamma)/2 - \beta/2 = 90^\circ,$$

звідки випливає, що C_1V – висота $\Delta A_1C_1B_1$, а точка T , яка є серединою відрізка C_1L , – точка Ейлера цього трикутника.

Оскільки кути $\angle BB_1A_1$ і $\angle CB_1A_1$, що спираються на рівні дуги BA_1 і A_1C , рівні, то висота B_1L трикутника LB_1C є також і його бісектрисою. Звідси маємо, що точка V являється серединою відрізка CL , тобто є однією з дев'яти точок трикутника. Аналогічні міркування можна провести для середин відрізків A_1L , B_1L , AL , BL . Підводячи підсумок, одержуємо, що середини відрізків AL , BL , CL – це основи висот $\Delta A_1B_1C_1$, середини відрізків A_1L , B_1L , C_1L – це точки Ейлера $\Delta A_1B_1C_1$, а середини відрізків A_1B_1 , A_1C_1 , B_1C_1 – це середини сторін $\Delta A_1B_1C_1$. Це означає, за теоремою про коло дев'яти точок, що середини усіх вказаних відрізків лежать на одному колі.

Задача 2. Доведемо, що якщо діагоналі вписаного чотирикутника перпендикулярні, то середини його сторін і основи перпендикулярів, опущених з точки перетину його діагоналей на сторони, лежать на одному колі.

Нехай $ABCD$ - даний чотирикутник (рис. 2).

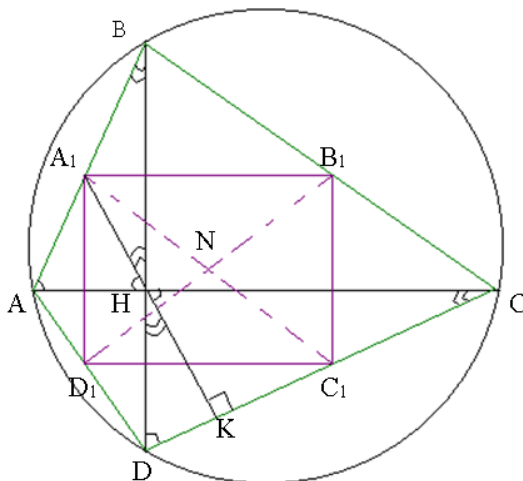


Рис. 2. Рисунок до задачі 2

Відмітимо на рисунку 2 точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 - середини його сторін. Тоді чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є прямокутником (за властивостями середньої лінії трикутника), а точка N перетину його діагоналей - центр описаного навколо $A_1B_1C_1D_1$ кола. Далі, за теоремою Браhmaгупти ([2]), при виконанні умов задачі медіана HA_1 трикутника ABC і висота NK трикутника DCN лежать на одній прямій (це можна довести безпосередньо, якщо використовувати рівність кутів, відмічених на рисунку). Тоді зазначене вище коло проходить і через точку K як через вершину прямого кута, що спирається на відрізок A_1C_1 як на діаметр. Аналогічно доводиться приналежність до цього кола інших трьох основ перпендикулярів, проведених з точки N на сторони $ABCD$. Таким чином, існування кола, що проходить через 8 вказаних в задачі точок, доведено.

Література

1. С.И. Зетель. Новая геометрия треугольника. – Москва, Учпедгиз, 1962. - 152 с.
2. Г.С.М.Кокстер. Введение в геометрию. – Москва, Наука, 1966. - 648 с.
3. Г.С.М.Кокстер, С.Л.Грейтцер. Новые встречи с геометрией. – Москва, Наука, 1978. - 224 с.

Морозова С. Ю. (магістр, 1 курс)
Науковий керівник – проф. Савченко О. Г.
Херсонський державний університет (Херсон, Україна)

ПЕРШЕ ЗНАЙОМСТВО ШКОЛЯРІВ З ОПЕРАЦІЄЮ СКЛЕЮВАННЯ ПРОСТОРІВ

У середині XIX століття виникла зовсім нова течія в геометрії, якій судилося стати однією з головних рушійних сил сучасної математики. Предметом нової галузі, званої топологією (або *analysis situs*), є вивчення властивостей геометричних фігур, що зберігаються навіть тоді, коли ці фігури піддаються таким перетворенням, що знищують всі їх метричні і проєктивні властивості.

Можна вважати, що у певному сенсі топологія - це наука, що вивчає неперервність: виходячи з неперервності простору або форм, вона поступово переходить до узагальнень, які потім за аналогією призводять до нового розуміння неперервності, а «звичайний» простір, як ми собі звикли його уявляти, залишається далеко позаду [3, с. 18]. Зазвичай топологи уникають будь-яких картинок, відчуваючи до них певну недовіру. Тополог цікавиться тими властивостями «предметів» (трактованих поки що в геометричному сенсі), які найбільш стійкі, тобто які витримують деформації, стиснення і розтягування.

Із вище сказаного випливає, що топологія сприяє розвитку просторової уяви та виробленню абстрактного мислення. Тому у даній статті ми хочемо показати, що елементи цього розділу математики корисно почати розглядати ще в закладах середньої освіти.

Найперше, що можна розповісти здобувачам освіти, це як із звичайного прямокутного аркуша паперу утворити *циліндр*. Це досить легко зробити, адже достатньо просто склеїти протилежні точки двох сторін аркуша.

А якщо, наприклад, склеїти протилежні точки, що мають різні напрямки, то утвориться один із найцікавіших прикладів, які можна

розглянути з учнями. Він має назву *стрічки Мебіуса*. Це однобічна двовимірна поверхня, границя якої є лінія, що гомеоморфна колу.

Модель стрічки Мебіуса може бути легко створена зі смужки паперу або пластику, повернувши один з кінців смужки впівоберта і з'єднавши його з іншим кінцем в замкнуту фігуру. Якщо почати малювати олівцем лінію на поверхні стрічки, то лінія піде вглиб фігури і пройде під початковою точкою лінії, ніби пішовши на "іншу сторону" стрічки. Якщо продовжувати лінію, то вона повернеться в початкову точку. При цьому довжина намальованої лінії буде вдвічі більше довжини смужки паперу. Цей приклад показує, що у стрічки Мебіуса лише одна сторона і межа є лінією, що гомеоморфна колу.

Що буде, якщо стрічку Мебіуса розріжуть навпіл, уздовж краю? Можна подумати, що утвориться два звичайних кільця, але це не так. Насправді, з'явиться одна велика стрічка Мебіуса.

А якщо спробувати розрізати лист не навпіл, чітко посередині, а ближче до краю? Більшість не знатиме відповіді на це питання. Насправді утворяться два листи Мебіуса, і слід відзначити, що один із них більший, ніж інший, і до того ж стрічки зчеплені між собою.

Якщо, як і при побудові «звичайного» циліндра, смужку паперу перевернути двічі, то утворена поверхня буде гомеоморфна циліндру. Але «наочно» продемонструвати цей гомеоморфізм у тривимірному просторі неможливо (у даному випадку це можливо у шестивимірному просторі!).

Далі рекомендується запропонувати дітям склеїти аркуш зі сторін по точкам, що лежать на спільній горизонталі і одночасно склеїти сторони, що лежать на спільній вертикалі [1, с. 24]. Утвориться геометричне тіло, яке має назву *тор*.

Якщо ж намагатися склеїти протилежні сторони по діаметрально протилежним точкам відносно центру, то таку поверхню буде неможливо реалізувати у вигляді фігури у тривимірному просторі. А точніше така спроба приведе до поверхні, яка повинна пронизувати сама себе без самоперетинів. Цю поверхню частково можна помістити в R^3 , якщо

розділити її на частини певним чином, але це порушує принцип «неперервності» склеювання. Отримана фігура називається *двовимірним проєктивним простором RP^2* [1, с. 25].

Не менш цікавим об'єктом є *пляшка Клейна*. На відміну від звичайної пляшки, у цього об'єкта немає «краю», де б поверхня закінчувалася. На відміну від кулі, можна пройти шлях з середини назовні, не перетинаючи поверхню (тобто насправді у цього об'єкта немає «всередині» і немає «зовні»).

Пляшку Клейна можна отримати в результаті склеювання двох стрічок Мебіуса по краях. У звичайному тривимірному просторі зробити це, не утворюючи самоперетину, неможливо. Тому справжня пляшка Клейна існує тільки у чотиривимірному просторі!

Анотація. Дана стаття містить інформацію про те, які елементи топології можна показати на уроках математики у закладах середньої освіти. Учні матимуть можливість дізнатися як зі звичайного аркуша паперу можна утворити циліндр, стрічку Мебіуса, тор, а також спробувати уявити пляшку Клейна. Це допоможе дітям розвинути просторову уяву та виробити абстрактне мислення.

Ключові слова: топологія, циліндр, стрічка Мебіуса, тор, двовимірний проєктивний простір, пляшка Клейна.

Abstract: This article contains informations about with elements of topology can be shown in mathematics lessons in secondary schools. Students will have the opportunity to learn how to form a cylinder, a Mobius strip, a torus from an ordinary sheet of paper, as well as try to imagine a Klein bottle. This will help children develop spatial imagination and develop abstract thinking.

Key words: topology, cylinder, Mobius strip, torus, two-dimensional projective space, Klein bottle.

Література

1. Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Фоменко Т. М. Введение в топологию. 2-е изд. доп. – М.: Наука. Физматлит., 1995. - 416 с.
2. Вербицкий М. С. Начальный курс топологии в листочках: задачи и теоремы. М.: МЦНМО, 2017. - 352 с.
3. Виро О. Я., Иванов О. А., Нецветаев Н. Ю., Харламов В. М. Элементарная топология. М.: МЦНМО, 2010. - 352 с.
4. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения / Перевод с английского Данилова Ю. А., под редакцией Смородинского Я. А. Москва: Мир, 1971. - 511 с.
5. Махоркин В. В., Худенко В. Н. Лекции по топологии / Калинингр. ун-т. Калининград, 2000. - 111 с.

Никишина Ю. Д. (студ., 1 курс)
Научный руководитель – ст. преп. Спирина Н. М.
*Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф.
Морозова (Воронеж, РФ)*

МАТЕМАТИКА В ИССЛЕДОВАНИИ ЗАГАДОК ПИРАМИД ЕГИПТА

Исторические сведения о Египетских пирамидах

Египетские пирамиды являются величайшими архитектурными памятниками Древнего Египта, включая одно из "семи чудес света" - пирамиду Хеопса и почетного кандидата в "новые семь чудес света" - пирамиды Гизы.

Слово "пирамида" по-гречески означает многогранник. По мнению некоторых исследователей, прототипом пирамиды стала большая куча пшеницы. По мнению других ученых, это слово произошло от названия поминального тортика пирамидальной формы.

* Пирамида Хеопса (IV династия): размер основания-230 м (высота-146,6 м);

* Пирамида Хефрена (IV династия): 215 м (143 м);

* Розовая пирамида, Снофру (IV династия): 219 м (105 м);

* Сломанная пирамида, Снофру (IV династия): 189 м (105 м);

* Пирамида Мейдума, Снофру (IV династия): 144 м (94 м);

* Пирамида Джосера (III династия): 121 x 109 м (62 м).

Математические загадки Египетских пирамид.

Геометрические факты

Египетские пирамиды - удивительный пример геометрического и математического мистицизма.

Великая пирамида (пирамида Хеопса) имеет квадратное основание, в настоящее время длины сторон равны: северная - 230,25 м, южная - 230,4 м, восточная - 230,38 м, западная-230,35 м. До потери облицовки - 232,5 м. Таким образом, периметр здания составляет около 1 км. Площадь основания пирамиды составляет 5,4 га (54 тыс. м²). Его высота составляет 146,6 м.

Объем всего сооружения составляет более 2 500 000 м³. Для сравнения, в нем легко разместится любой из европейских храмов, а из камня, использованного в пирамиде, можно построить все знаменитые храмы Европы. Во всех деталях Великой пирамиды сохранены совершенные (золотые) пропорции.

Степень точности соотношений кажется невероятной, учитывая размеры всей конструкции. Это нельзя объяснить простой случайностью.

Например, постоянная π , которую искали столько веков, материализовалась, так сказать, в Великой пирамиде. Сложив длину сторон основания памятника, первоначальная длина которого составляла 232,805 м, получим периметр пирамиды, равный 931,22 м. Теперь разделим длину периметра на удвоенную высоту пирамиды, которая достигала 148,208 м в момент ее возведения, и в результате получим число π :

$$931.22 / (2 \times 148.208) = 3.1416.$$

Некий Яролимек в 1890 году опубликовал статью, в которой пытается доказать, что открыл применение метода "золотого сечения" в пирамиде. Он исходит из чисел 3 и 7, которые считались особенно священными, разность которых (4) и сумма (10) играли символическую роль первостепенной важности, выводит из этого локоть, в четыре раза длиннее, и строит таким образом свою золотую лестницу: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, вплоть до десятой ступени 144, перед которой каждый мыслящий исследователь останавливается в изумлении! В результате получается последовательность чисел Фибоначчи.

Астрономические факты

Известно, что если провести горизонтальную линию через центр Земли до пересечения с ее окружностью, затем провести линии от точек пересечения до центра Луны, а от центра Луны обратно до Земли, то это будут точные пропорции Великой Пирамиды.

В Великой Пирамиде нет ни одной ветви, сегмента или направления, ни одного объема, склона или выступа, которые не имели бы особого,

точного, возвышенного и определенного значения. Формы Великой пирамиды содержат основные принципы мироздания. Памятники Гизы функционируют как огромные космические часы. Египтологи и пирамидологи выводят многие космологические закономерности и параметры из значений высоты и длины основания Великой пирамиды, основными из которых являются: 3,4 - длина спирали ДНК для всех живых существ; 3: 40-отношение площадей поверхности Земли; 1:49 - отношение объемов Луны и Земли; 1:81,3 - отношение масс Луны и Земли; 3.14 - число "Пи"; 499 (секунд) - время, за которое солнечный свет проходит расстояние до Земли.

Длина стороны основания, выраженная не в метрах, а в египетских локтях, точно соответствует длине земного года-365 дней.

Аббат Море, директор Буржской обсерватории во Франции, был первым, кто обнаружил эти корреляции. Именно он умножил высоту Великой пирамиды 146,21 м на миллион и получил расстояние от Земли до Солнца в километрах-146,210,000 км. Он также разделил периметр на удвоенную высоту и получил число Пи.

Кстати, по словам директора Буржской обсерватории, архитекторы Великой пирамиды знали и многое другое, что им удалось воплотить в камне: длину високосного года, расстояние, которое Земля проходит по своей орбите за 24 часа, плотность земного вещества, а также среднюю температуру нашей планеты, поскольку тепловая единица Великой Пирамиды равна средней температуре Земной поверхности.

Цифровое значение кода, кодирующего информацию о Вселенной в пирамиде, число 365, выбрано не случайно. Прежде всего, это годовой жизненный цикл нашей планеты. Кроме того, число 365 состоит из трех цифр 3, 6 и 5. Что они означают? Если в Солнечной системе Солнце проходит под номером 1, Меркурий-2, Венера-3, Земля-4, Марс-5, Юпитер - 6, Сатурн -7, Уран -8, Нептун -9, Плутон -10, то 3-это Венера, 6-Юпитер и 5-Марс. Поэтому Земля особенно связана с этими планетами. Сложив числа 3,

6 и 5, мы получим 14, из которых 1-Солнце, а 4 - Земля. Число 14 вообще имеет глобальное значение. Число 14, в частности, основано на строении рук человека, общем количестве фаланг пальцев, каждая из которых также равна 14.

Таким образом, этот уникальный в мире памятник является поистине осязаемым воплощением чрезвычайно важных математических соотношений, на понимание которых человеческий разум потратил неимоверные усилия.

Аннотация. В статье рассматриваются особенности египетских пирамид с точки зрения математики, также пирамиды как источник информации в познании современного мира.

Abstract. The article discusses the features of the Egyptian pyramids from the point of view of mathematics, as well as the pyramids as a source of information.

Ключевые слова: пирамида, семь чудес света, золотое сечение, корреляции, числа Фибоначчи.

Key words: pyramid, seven wonders of the world, golden ratio, correlations, chisla Fiboniacci.

Литература

1. А.В. Волошинов. Математика и искусство, М: «Искусство», 1985. – 400 с.
2. Г.И. Глейзер. История математики в школе, М: «Просвещение», 1982. – 240 с.
3. И. Исупова. Всё обо всём Т.8, М: «Слово», 1997. – 510 с.
4. Б. Риен. Ст. «Магический кристалл», «Аномалии». - 1998. - №2.
5. К. Гридин. Ст. «Искать ответы никогда не поздно», «Загадки Земли». – 1999. - №2.
6. А. Богдановский. Ст. «Прогнозы Сергея Проскурякова подсказаны строителями пирамид», «Комок». – 1998. - №6.
7. Питер Томпкинс «Тайны великой пирамиды Хеопса», М: «Центрополиграф». – 2005.

АНАЛІЗ ВИБРАНИХ АЛГОРИТМІВ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТУ В МЕРЕЖІ

В основі методів динамічного програмування лежить принцип Р.Беллмана: частина оптимальної траєкторії також є оптимальною траєкторією [3, с. 135]. Тобто в деякій керованій системі, яка може знаходитись в декількох станах, знаходять оптимальний стан на деякій ланці, після чого переходять до наступного кроку.

Метою статті є порівняльний аналіз умов застосування певних алгоритмів пошуку оптимальних шляхів в мережі.

Задача оптимальної маршрутизації полягає у виборі найкоротшого шляху між двома пунктами мережі, яка задається набором вершин та ребер – графом. В залежності від умов поставленої задачі ребра можуть бути задані вагами. В такому випадку граф буде зваженим, а ребра називатимуться дугами. Якщо пари вершин, з'єднаних ребром, впорядковані, то граф буде орієнтованим (орграфом). Цільова функція задачі оптимальної маршрутизації також може виражати найдешевший маршрут (ваги ребер позначають вартість перевезення між двома пунктами мережі); найменший час на подолання маршруту; найменшу кількість пересадок (або час очікування) з одного виду транспорту на інший тощо. Отже, методи оптимізації на мережах дають змогу розв'язувати ряд задач прикладного характеру в галузях економіки, комп'ютерних технологій, менеджменту, радіотехніки тощо.

Розглянемо деякі алгоритми пошуку оптимальних маршрутів в зваженому орграфі. Всі методи базуються на алгебраїчних операціях додавання та порівняння.

Алгоритм знаходження найкоротшого шляху від початкової вершини до кінцевої в мережі без дуг з від'ємними вагами був запропонований

нідерландським вченим Е.Дейкстрою в 1959 р. Реалізується шляхом введення міток, які зберігають інформацію, отриману після кожної ітерації. Позначимо початкову вершину мережі за s , а кінцеву за t . На кожному кроці досяжним вершинам x присвоюється значення $d(x)$ - довжина найкоротшого шляху від s до x [2, с. 45].

Крок 1. Покласти $d(s)=0$, $d(x)=\infty$, $\forall x \neq s$. Відмітити як пройдену вершину s і покласти $y=s$ (y - остання з відмічених вершин). Всім пройденим вершинам присвоюються постійні мітки, значення яких не змінюється в процесі виконання кроків алгоритму.

Крок 2. Для кожної невідміченої вершини x перерахувати величину $d(x)$ за наступним правилом: $d(x)=\min\{d(x), d(y)+a(y,x)\}$, де $a(y,x)$ - довжина дуги, яка з'єднує вершини y та x . При $d(x)=\infty$ для всіх невідмічених вершин закінчити процедуру алгоритму. В іншому випадку відмітити ту з вершин x_k , для якої $d(x_k)$ буде мінімальною. Покласти $y=x_k$.

Крок 3. При $y=t$ закінчити процедуру алгоритму.

Зазначимо, що присвоєння певній вершині постійної мітки дає можливість відмітити і дугу, кінцем якої є ця вершина. Отже, щоб знайти найкоротші шляхи від s до всіх вершин орграфа, потрібно побудувати орієнтоване дерево з коренем в початковій вершині, яке покриває всі відмічені вершини після процедури.

Постає питання, яким чином знайти оптимальний шлях в мережі, яка містить дуги з від'ємними вагами. Відповідь на це дає алгоритм Беллмана - Форда (запропонований в 1969 р.). Це модифікація алгоритму Дейкстри, яка полягає в наступному [2, с. 49]:

На другому кроці алгоритму Дейкстри перерахунок величин $d(x)$ за допомогою співвідношення $d(x)=\min\{d(x), d(y)+a(y,x)\}$ проводиться для всіх вершин, а не тільки відмічених. Тобто $d(x)$ можуть зменшуватись як для невідмічених, так і відмічених вершин. Якщо для деякої відміченої вершини

х величина $d(x)$ зменшується, то з вказаної вершини та інцидентної їй дуги мітка знімається. Процедура закінчується тоді, коли всі вершини відмічені і після виконання кроку величини $d(x)$ не зменшуються. Відмітимо, що вказаний алгоритм застосовний до орграфів, які не містять циклів від'ємної довжини, адже проходячи такий цикл цільова функція може як завгодно довго зменшуватись.

Варто виокремити ще один метод знаходження оптимального шляху між двома вершинами зваженого орграфа без від'ємних циклів за допомогою алгоритму Шимбелла – Оттермана [3, с. 147]. Це матричний аналог алгоритму Беллмана – Форда, який полягає в піднесенні до k -го степеня матриці суміжності орграфа, використовуючи операції Шимбелла:

- операція додавання двох невід'ємних елементів $a \oplus b = \min\{a, b\}$;

- операція множення двох невід'ємних елементів $a \otimes b = a + b$,

причому $a \oplus 0 = 0 \oplus a = 0$, $a \otimes 0 = 0 \otimes a = a$; $a \oplus \infty = \infty \oplus a = a$,
 $a \otimes \infty = \infty \otimes a = \infty$.

Алгоритм Шимбелла – Оттермана припиняється на етапі, коли при піднесенні до певної степені матриці суміжності A орграфа отримується попередній результат: $A^k = A^{k+1}$. Елемент a_{ij} кінцевої матриці буде дорівнювати довжині найкоротшого шляху між вершинами x_i та x_j . Тобто цей метод дозволяє знаходити оптимальні маршрути між всіма парами вершин орграфа.

Іншим способом розв'язання задачі знаходження мінімального шляху між всіма парами вершин є алгоритм Флойда - Уоршела, запропонований в 1962 р. Метод базується на операції релаксації трикутника для фіксованої

$$\text{вершини } x_k : \begin{cases} d_{ij} = \min\{d_{ij}; d_{ik} + d_{kj}\}, \\ i = \overline{1, n}, \quad i \neq k, \\ j = \overline{1, n}, \quad j \neq k. \end{cases}$$

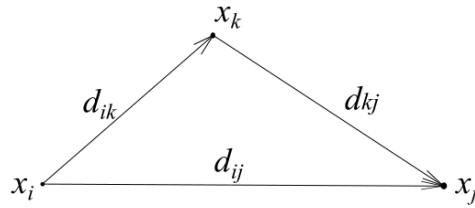


Рис.1. Релаксація трикутника

Для реалізації алгоритму необхідно провести релаксацію трикутника для кожної вершини графа [1, с. 103]. Позначимо чарез $d_{ij}^{(k)}$ довжину найкоротшого шляху від вершини x_i до вершини x_j , який проходить через перші k вершин графа $\{x_k\}$, причому $d_{ij}^{(k)} = \infty$ за умови, що між вершинами x_i та x_j не існує жодного шляху, а $d_{ii}^{(k)} = 0, \forall i = \overline{1, n}$. Результати ітерацій алгоритму зручно подавати у вигляді матриці $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})_{(n \times n)}, k = \overline{0, n}$, де $D^{(0)}$ - початкова матриця суміжності графа. Всі наступні після $D^{(0)}$ матриці заповнюються за такими правилами [2, с. 51]:

1) при заповненні матриці $D^{(k)}$ без змін залишаються k – й рядок та k – й стовпчик попередньої матриці $D^{(k-1)}$;

2) якщо в k – му рядку (стовпчику) матриці $D^{(k-1)}$ є елемент $d_{ij}^{(k-1)} = \infty$, то в наступній матриці $D^{(k)}$ без змін залишається стовпчик (рядок), який містить цей елемент;

3) решта елементів перераховуються за правилом $d_{ij}^{(k)} = \min \{ d_{ij}^{(k-1)}; d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \}$.

Для відтворення маршруту мінімальної довжини між всіма парами вершин варто під час виконання кожної ітерації заповнювати матрицю переходів $P^{(k)} = (p_{ij})_{(n \times n)}, k = \overline{0, n}$, де елемент $p_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j; \\ j, & i \neq j. \end{cases}$. Кожна матриця

$P^{(k)}$ отримується з попередньої матриці $P^{(k-1)}$ шляхом заміни на k лише тих елементів, для яких в ході проведення k – ї ітерації $d_{ij}^{(k-1)} \neq d_{ij}^{(k)}$.

Висновок. Алгоритм Флойда – Уоршела є оптимальним методом серед зазначених, так як дає можливість знайти найкоротший маршрут для всіх можливих пар вершин зваженого графа без від’ємних циклів.

Анотація. В статті розглянуто деякі алгоритми пошуку найкоротших шляхів в мережі в залежності від заданих початкових умов та їх покрокова реалізація. До уваги пропонується аналіз алгоритмів Дейкстри, Беллмана – Форда, Флойда – Уоршелла, методу Шимбелла – Оттермана.

Ключові слова: найкоротший шлях, оргграф, алгоритм Дейкстри, алгоритм Беллмана – Форда, алгоритм Флойда – Уоршелла, операції Шимбелла.

Abstract. The article considers certain shortest path search algorithms in networks depending on the given initial conditions. Also there is step-by-step implementation of Dijkstra's algorithm, Bellman - Ford algorithm, Floyd-Warshall algorithm, Shimbell – Otterman's method.

Key words: the shortest path, a directed graph, Dijkstra's algorithm, Bellman - Ford algorithm, Floyd-Warshall algorithm, Shimbell's operations.

Література

- 1.Іглін С.П. Теорія графів. Лекції та варіанти індивідуальних домашніх завдань: навч. посібник. – Харків: НТУ «ХП», 2017. – 146 с.
- 2.Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1891. – 324с.
- 3.Сеславин А.И., Сеславина Е.А. Исследование операций и методы оптимизации: учебное пособие. – М.: ФГБОУ, 2015. – 200 с.

УДК 373.016:514

Петрович М. Б. (студ., 5 курс)
Науковий керівник – доц. О. Л. Швай
Волинський національний університет імені Лесі Українки
(Луцьк, Україна)

МОЖЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ ЛОБАЧЕВСЬКОГО В ШКОЛІ

Будь-яка теорія сучасної науки вважається єдино правильною, доки не створена наступна. Це своєрідна аксіома неодноразово підтверджувалася історією розвитку науки. Так, традиційна Евклідова геометрія переросла у геометрію Лобачевського. Геометрія Лобачевського, в свою чергу, стала прикладом для побудови інших неевклідових геометрій. Перші застосування геометрії Лобачевського отримала в роботах самого Миколи Івановича. Він

зміг обчислити певні інтеграли за допомогою створеної ним теорії. А уже в кінці XIX століття А. Пуанкаре і Ф. Клейн знайшли прямі зв'язки геометрії Лобачевського з теорією функцій комплексної змінної та з арифметикою невизначених квадратичних форм. Згодом геометрія Лобачевського почала застосовуватися у теорії функцій комплексної змінної, яка є математичною основою сучасної гідродинаміки, аеродинаміки і теорії пружності. В наш час значення геометрії Лобачевського зросло ще більше. Вона використовується при розв'язуванні різних задач фізики елементарних частинок та вивченні ядерних реакцій [1].

Мета дослідження – розглянути можливості вивчення геометрії Лобачевського в школі.

Питання, пов'язані з вивченням неевклідової геометрії Лобачевського, тісно переплітаються з особливостями психології і теорії пізнання в цілому, з питаннями про те, яким чином виникають просторова уява та інтуїція. Дослідженням цих питань займалися у різні періоди вчені – К. Гаусс, Я. Больяї, Г. Ріман, Е. Бельтрамі, Ф. Клейн, А. Пуанкаре, А. Александров, П. Рашевський, О. Смогоржевський, Н. Єфімов, Л. Атанасян, В. Боровик, В. Яковець, Н. Шаповалова, Л. Панченко та інші [1].

Програма з математики рекомендує учителям, починаючи з 7-го класу на уроках геометрії при вивченні теорії паралельних прямих вказувати, що окрім геометрії Евкліда, що вивчається в школі, існує ще й неевклідова геометрія [2].

Дійсно, створення в учнів правильних уявлень про багатство фактів геометрії, забезпечить їх орієнтацію у великому різноманітті геометричного матеріалу, наблизить школярів до сучасних поглядів на геометрію як науку. При цьому виникає закономірне запитання: «Як же впоратися з поставленими завданнями, не виходячи у за межі програми і не виділяючи додаткового часу ?» У дослідженнях вказуються можливі такі три шляхи вирішення проблеми.

1). Коротко ознайомити учнів з історією 5-го постулату. При цьому нас повинні цікавити не тільки спроби його доведення, а й ті очевидні істини і часто неявні припущення, на яких всі ці спроби ґрунтуються. Показати учням, що довготривалі безуспішні пошуки доведення 5 постулату відіграли позитивну роль, допомігши глибше проникнути в структуру геометрії, встановити зв'язок між її найважливішими твердженнями. Це безумовно принесе велику користь в підготовці учнів для правильного сприйняття існування геометрії Лобачевського, яка побудована на запереченні 5-го постулату. Справа в тому, що кожне доведення постулату, в кінці кінців ґрунтується на якійсь очевидній властивості простору, а цією властивістю виявляється саме твердження, рівносильне постулату Евкліда. Таким чином, всі ці доведення містять замкнене коло.

2). Показати особливу роль аксіоми паралельних в побудові курсу геометрії. Для цього потрібно домогтися, щоб кожен учень міг встановити залежність або незалежність певного геометричного положення від 5-го постулату.

3). З неевклідової геометрії обмежитися вказівками тільки на геометрію Лобачевського, з деякими елементами якої можна познайомити учнів на математичних гуртках. Учні повинні зрозуміти, що значення геометрії Лобачевського не зводиться лише до доведення незалежності 5 постулату. Значно важливішим результатом є доведення Лобачевського того, що геометрія Евкліда не є єдиною можливою, а тільки однією з можливих [3] .

Ми вважаємо, що вивчаючи питання існування неевклідових геометрій, не можна обмежуватися рамками 7 класу. Це вимагає значно більшої уваги з боку вчителя. Найбільш ефективними методами навчання при цьому є пояснювально-ілюстративний метод та евристична бесіда. Щоб підвищити пізнавальну активність учнів, при застосуванні цих методів доцільно використовувати порівняльний аналіз фактів евклідової геометрії та тверджень неевклідових геометрій.

Анотація. В статті обґрунтовано, що ознайомлення учнів з елементами геометрії Лобачевського сприятиме створенню у них правильних уявлень про багатство фактів геометрії, наблизить їх до сучасних поглядів на геометрію як науку.

Ключові слова: геометрія, неевклідова геометрія, 5 постулат.

Abstract. In this article grounded, that the acquaintance of students with the elements of geometry of Lobachevskogo will be instrumental in creation for them of correct ideas about the richness of the facts of geometry, will approach them to the modern looks to geometry as science.

Key words: geometry, Non-Euclidean geometry, 5 postulate.

Література

1. Шаповалова Н. В., Панченко Л. Л. Особливості навчання гіперболічної геометрії для підвищення компетентності майбутніх вчителів математики і фізики // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск 3 (6). – С. 109-118.
2. Математика. 5-11 класи: навчальні програми, методичні рекомендації про викладання навчальних предметів у закладах загальної середньої освіти у 2019/2020 н. р., орієнтовні вимоги до оцінювання навчальних досягнень учнів / Укладач Р. В. Гладковський. – Харків: Видавництво «Ранок», 2019. – 160 с.
3. І. Ф. Тесленко. Про неевклідові геометрії в середній школі // Журнал "Математика в школі". – 1952. – №4. – С. 33–40.

УДК 629.113

Потапська Н. М. (магістрант, 5 курс),

Сторожук В. В. (магістрант, 5 курс)

Науковий керівник – доц. Рудик О. Ю.

Хмельницький національний університет (Хмельницький, Україна)

ВИКОРИСТАННЯ SOLIDWORKS ДЛЯ АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ДЕТАЛЕЙ

Для аналізу напруженого стану деталей все більшу популярність отримують системи автоматизованого проектування (САПР) виробів, технологій їх обробки та інженерного аналізу (CAD/CAM/CAE технології), так як вони дозволяють зменшити кількість помилок ще на етапі проектування і краще відтворити реальний процес [1].

Комп'ютерна інтегрована система CAD/CAM/CAE SolidWorks [2] дозволяє здійснювати дво- і тривимірне конструювання й моделювання різноманітних конструкцій, їх аналіз і забезпечення технологічної підготовки виробництва.

Переваги SolidWorks: повний набір функцій геометричних побудов твердих тіл та операцій редагування; засоби твердотілого моделювання, які ґрунтуються на поступовому доданні або вирахуванні базових конструктивних тіл.

В SolidWorks існує можливість створення твердотілих моделей стандартних деталей на основі таблиць для майбутньої бібліотеки із загальним інтерфейсом. Засоби Solidworks дозволяють поєднувати в одному складанні різнотипні деталі та підборки, створювати необхідні складальні одиниці.

В Solidworks 3D-моделі можна створювати за допомогою вбудованого препроцесора, так й імпортувати з інших CAD-систем. За допомогою пакету SolidWorks Simulation [3] можна проводити різні види розрахунків: напруження й переміщення; теплові розрахунки; власні частоти й стійкість конструкцій; втомні напруження; нелінійні статичні розрахунки й ін.

У програмі, крім закладених стандартних матеріалів, користувач може сам моделювати власні композитні матеріали. Також, за допомогою додатків SolidWorks Simulation можна задавати тиск газів і рідин, проводити кінематичний і динамічний аналізи, моделювати електромагнітні явища.

На конструкції можна прикласти наступні граничні умови: рівномірно-розподілене навантаження на гранях; об'ємні навантаження; крутний момент; навантаження в опорах; температурні навантаження й ін.

Проаналізувати отримані результати проведених розрахунків можна за допомогою діаграм деформацій, напружень, переміщень, власних коливань та ін. Також можна подивитися результати всім списком або окремо в будь-якій точці.

Так, в [4] за допомогою SolidWorks Simulation проведений статичний аналіз найбільш навантаженої деталі знімача підшипників – скоби (сталь 45 ГОСТ 535-88). Розрахунками встановлений мінімальний коефіцієнт запасу міцності $n_T = 9,84$, що набагато більше допустимого $[n_T] = 3$. Тому метою

роботи ставилось можливість заміни даного матеріалу на дешевший – сталь 10 (DIN 1.1121).

В результаті аналогічного повторного розрахунку скоби, виготовленої зі сталі 10, встановлені максимальні напруження $\sigma = 84,73$ МПа (вузол 9217 – рис. 1, б).

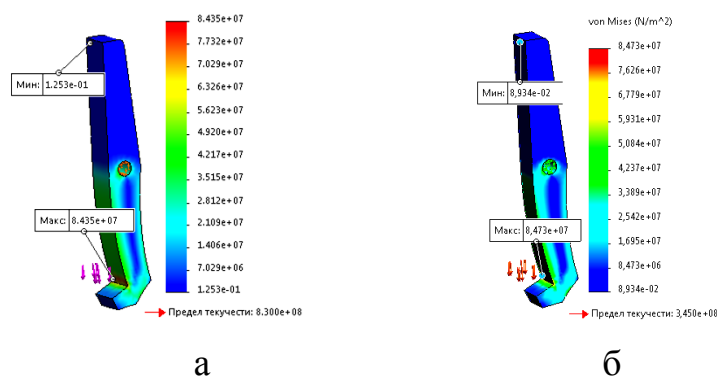


Рис.1. Контурні графіки сумарних напружень von Mises для скоби, виготовленої зі сталі 45 (а) та сталі 10 (б)

При цьому максимальні результуюче переміщення $h = 0,6516$ мм (вузол 7552), максимальна еквівалентна деформація $\delta = 0,0003047$ (елемент 519), мінімальний запас міцності $n_T = 4,072$ (вузол 9217), що більше допустимого $[n_T] = 3$.

Отже, отримані результати підтверджують актуальність проведеного дослідження з використанням CAD/CAM/CAE системи SolidWorks та її додатку SolidWorks Simulation: з точки зору забезпечення експлуатаційних характеристик для виготовлення скоби заміна її матеріалу є можливою.

Анотація. За допомогою системи CAD/CAM/CAE SolidWorks досліджена можливість заміни матеріалу скоби знімача підшипників.

Ключові слова: SolidWorks, знімач підшипників, скоба, заміна матеріалу.

Abstract. With the help of the CAD/CAM/CAE SolidWorks system, the possibility of replacing the material of the bearing strip bracket was investigated.

Keywords: SolidWorks, bearing stripper, bracket, material replacement.

Література

1. Rudyk O. Yu. CAD/CAE-systems in the research of motor vehicle details / O. Yu. Rudyk, V. O. Fasolia // Interdisciplinary research: scientific horizons and perspectives: collection of scientific papers «SCIENTIA» with Proceedings of the I International Scientific and Theoretical Conference (Vol. 2), March 12, 2021. – Vilnius, Republic of Lithuania: European Scientific

- Platform. – Pp. 51-53. – URL: <https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/scientia/issue/view/12.03.2021/471>
2. Рудик О. Підготовка висококваліфікованих фахівців автомобілебудування на базі застосування SolidWorks [Електронний ресурс] / О. Рудик, В. Посполіта.– Режим доступу: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/9297>
3. Psol S. V. Impact of blow on the stability of details of wheeled machines [Electronic resource] / S. V. Psol, S. Gramenko, O. Yu. Rudyk. – Access mode: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/10061>
4. Колісник В. В. Дослідження працездатності знімача підшипників / В. В. Колісник, Р. В. Рачок, О. Ю. Рудик. – Режим доступу: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/8401>

Сергєєв О. В. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – ст. викладач Мороз І. І.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ВИБОРУ ПРАВИЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ В ТЕОРІЇ ІГОР

Диференціальне рівняння є одним з головних математичних понять. Диференціальне рівняння, одержане в результаті досліджень якого-небудь реального явища або процесу, називається диференціальною моделлю цього явища або процесу. На практиці часто вимушені мати діло з такими випадками, коли невідомі закони, за якими можна скласти диференціальне рівняння. Тому роблять різні припущення (гіпотези) відносно досліджуваного процесу.

Розглянемо один з прикладів диференціальних моделей.

Під час першої світової війни англійський інженер і математик Ф.У. Ланчестер побудував декілька математичних моделей повітряних боїв. Потім ці моделі були узагальнені і розповсюджені на випадок бойових дій регулярних військ, партизанських з'єднань, а також тих та інших одночасно.

Будемо розглядати першу з цих моделей.

Нехай в бойових діях приймають участь дві воюючи сили x і y , числовий склад яких в момент часу t (вимірюється в днях, починаючи з першого дня бойових дій) позначають $x(t)$ і $y(t)$. При побудові математичної моделі чисельність воюючих сторін буде грати визначну роль.

Припустимо, що функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервні і диференційовані по змінній t . Для складання математичної моделі відзначимо декілька факторів, які дозволяють описати швидкість, з якою змінюється чисельність воюючих сторін. По-перше, це величина, яка вказує на швидкість, з якою сторона X несе збитки від хвороб і інших факторів, не зв'язаних з веденням бойових дій; по-друге, це швидкість, з якою сторона X несе людські збитки від безпосереднього ведення бойових дій зі стороною Y ; в-третьє, це швидкість підходу підкріплення до сил сторони X .

Запишемо модель, побудовану Ланчестером, яка описує бойові дії між регулярними військами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) - by(t) + p(t), \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t), \end{cases} \quad (1)$$

де a , b , c і d – невід'ємні сталі, які характеризують ступень впливу різних факторів на втрати живої сили обох сторін X і Y ;

$P(t)$ і $Q(t)$ – функції, які враховують можливості підходу підкріплення силами X і Y на протязі дня;

x_0 і y_0 – чисельний склад сил X і Y перед початком бойових операцій.

Для розв'язання системи (1) розглянемо випадок, коли дві сили X і Y ведуть бойові дії за умови, що збитки, які не пов'язані з бойовими діями, відсутні. Крім того, вони ще не отримають і підкріплення. Тоді модель (1) набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t), \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t). \end{cases} \quad (2)$$

Поділимо друге рівняння системи на перше:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by}. \quad (3)$$

Проінтегрувавши рівняння (3), будемо мати

$$by^2 = cx^2 + k, \quad (4)$$

де $k = y_0^2 - x_0^2$ – стале значення.

Тоді рівняння (4) набуває вигляду

$$by^2 - cx^2 = k. \quad (5)$$

Це рівняння при $k \neq 0$ задає гіперболу (якщо $k = 0$, тоді пару прямих). На рис. 1 зображені гіперболи для різних значень k . Стрілками на кривих вказують напрямки, за яким змінюється чисельність сил при зміні часу.

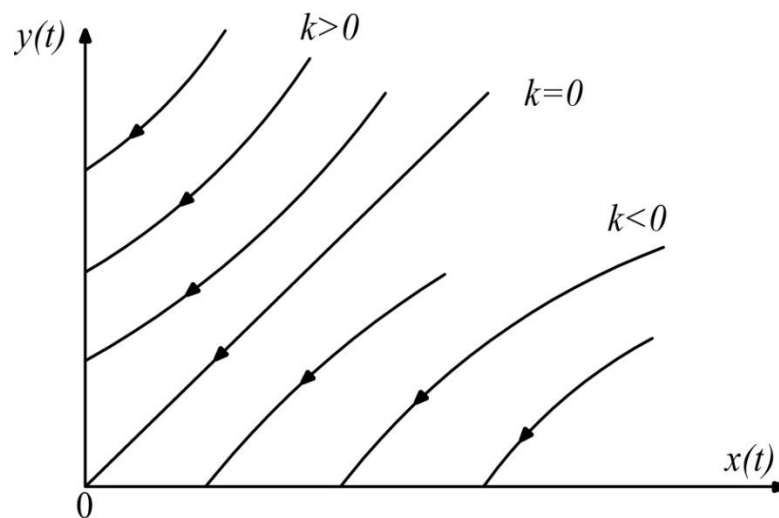


Рис. 1.

Щоб відповісти на питання, хто перемагає в побудованій моделі (2), домовимось попередньо, що перемагає сторона y (відповідно x), якщо вона першою знищує бойові сили сторони x (відповідно y). Якщо $k > 0$, то перемагає сила y тому, що в рівнянні (5) змінна y ніколи не може перетворитися на нуль. Таким чином, для перемоги сили y має скластися така ситуація, коли $k > 0$, тобто коли:

$$by_0^2 > cx_0^2.$$

При складанні цієї моделі бойових дій враховувалась лише чисельність воюючих сторін, тому що практично неможливо вказати критерії, які б враховували рівень бойової готовності і озброєності, рівень і досвід командного складу, моральний дух та багато інших факторів.

Література

- 1.Амелькин В. В., Садовский А. П. Математические модели и дифференциальные уравнения. – Минск, Высшая школа, 1982. – 272 с.
- 2.Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. – к : А.С.К., 2006. – 648 с.

УДК 004.9 : 37.026

Степура І. В., ст. лаборант
Інститут психології ім. Г. С. Костюка НАПН (Київ, Україна)

БАГАТООСНОВНІ АЛГЕБРИ ЯК ІНТЕГРУЮЧИЙ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КОНСТРУКТ ДЛЯ КУРСІВ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Мова абстрактних моделей виявляється важливою для розуміння основних закономірностей природних наук і опосередковуючих їх архітектур програмних систем [2;4]. Попри очевидну важливість застосування алгебраїчних концепцій в інженерно-технічних додатках зазвичай вважається, що ці розділи математики є занадто складними для інженерів, для програмістів та інших спеціалістів, що не відносяться до теоретиків-математиків та фізиків – вони занадто загальні та абстрактні, а широкому колу фахівців потрібні «конкретні» знання. Ці твердження мають рацію. Справа ще й у тому, що алгебраїчні моделі в силу своєї узагальненості, засвоюються повільніше, ніж конкретні дисципліни, оскільки вимагають високого ступеня абстрагування та математичної культури. З іншого боку, ціла низка більш вузьких розділів алгебри, що застосовуються в сфері програмування, обчислювальної техніки, системного аналізу, криптографії,

часто йдуть з поля уваги методистів, в основному завдяки «педагогічній інерції». Склалася методична традиція викладу курсів алгебри з опорою на суто абстрактні підходи. Але вона не завжди підходить для підготовки фахівців-«прикладників». З'являється розрив між традиційним курсом абстрактної алгебри та її ж розділами, що застосовуються в теоретичній інформатиці. Його заповнюють курсами дискретної математики – синтетичної дисципліни, покликаної інтегрувати в навчальній програмі підходи близькі до проблематики логіки, загальної алгебри, теорії графів, автоматних методів та ін. Та на думку Є. Пермінова, для оптимізації навчання з математичних дисциплін потрібен пошук конструктів, навчальних тем, для поєднання змісту й методів цих підходів, наближення теоретичних дисциплін до викликів практики [3,с.9].

Згадаємо, що в 1971–1985 рр. група математиків «ADJ Group» (IBM Research) в складі Д.Гоген, Д.Тетчер, Е.Вагнер, Д.Райт та ін., ставила на меті створення формальних підходів до комп'ютерних програм, зокрема типів даних, який зветься «алгебраїчними специфікаціями для програм». Розробка цієї проблематики базувалася на формальних методах, розроблених ще при вивченні логіки; а в більш вузькому сенсі на вивченні алгебр (універсальних алгебр) [7]. Багато проблем, що виникають в рамках алгебраїчної специфікації можна виразити за допомогою понять теорії категорій. Також теорію типів даних можна використовувати і для цілей побудови семантичних або теоретико-модельних підходів, тобто в більшому сенсі для цілей прикладних математичних описів. Висхідним пунктом їх досліджень була ідея, що типи даних – це алгебри (набори іменованих множин з іменованими операціями між наборами). Ці типи можуть бути описані з використанням формул. Тип даних представляє логічно замкнену сутність («капсула») з якими користувач (людина, програміст) взаємодіє через «інтерфейс» (в теорії) логічний або програмний (на практиці). Інтерфейс для абстрактного типу даних – багатоосновна (тобто складена з множин різного виду) сигнатура плюс операції, які може використовувати користувач.

Точніше кажучи, багатоосновна алгебра має декілька носіїв, а операції сигнатури діють із прямого добутку деяких носіїв на деякий носій. Екземпляр типу даних (конкретний представник типу) – це багатоосновна алгебра над такою сигнатурою. Абстрактний тип даних визначається шляхом спільної сигнатури і системи рівнянь. В Європі ідеї близькі ADJ розвивали Ж. Месегер, Р. Брьо тощо [6]. Типи даних знайшли широке застосування й в теорії функціонального програмування, що ґрунтувалися на лямбда-численні А.Чорча, розробленому в межах логіки. В рамках алгебраїчного підходу ADJ були запропоновані штучні мови для опису програм і типів даних в них. В роботі М.Ш.Цаленка [5] також використовуються багатоосновні алгебри, алгебра файлів і «вежа» алгебр файлів (В.Редька). Ще в роботах В.М. Глушкова підкреслювалися зв'язки алгебри й теорії автоматів. Були розкриті зв'язки теорії автоматів і теорії формальних мов [2]. Автомат визначається як багатоосновна модель (алгебраїчна структура), задана на трьох кінцевих множинах з введених на них двома бінарними операціями алгебри. Класифікація автоматів здійснюється за допомогою відображень багатоосновних моделей. Наприклад, Р. Бабаков і А. Баркалов [1] на ґрунті розуміння автомата як багатоосновної алгебри розвивають оригінальний похід, де пропонується новий принцип представлення функцій мікропрограмного автомата з операційним автоматом переходів у вигляді множини окремих алгебр. А такі підходи мають практичні «виходи» на тематику конструювання електронних компонентів, приладобудування. Отже конструкт багатоосновної алгебри може бути використаний як інтегруючий для конструювання курсів теорії автоматів, формальних граматики і абстрактної алгебри.

Висновки. Багатоосновні алгебри – важливий інтегруючий навчально-методичний конструкт для програм і курсів різних видів й рівнів. Він лежить в теоретичному базисі уявлень більш широкого кола когнітивних наук. Це одна з підвалин вивчення математичних основ інформатики і програмування, де навчальним змістом виступають формальні мови та граматики, алгоритми,

структури даних. Він дозволяє звести воедино традиційний зміст курсів загальної алгебри, дискретної математики і методології програмування (перш за все об'єктно-орієнтованого підходу), аналізу семантики складних систем і надати підготовці учнів також прикладний характер, включаючи розробки в галузі електроніки та приладобудування.

Анотація. У статті розглянуто методичний конструкт багатоосновної алгебри, як об'єднуючий для когнітивних методів в рамках дискретної математики і прикладних дисциплін. Прикладні аспекти можуть бути використані в галузі: формальних мов та граматики, алгоритмів, мов програмування, структур даних, аналізу семантики складних систем.

Ключові слова: багатоосновна алгебра, навчальний конструкт, тип даних

Abstract. The article discusses the methodological construct of many-sorted algebra, as a unifying construct for cognitive methods in the framework of discrete mathematics and applied disciplines. Applied aspects can be used in such fields as formal languages and grammars, algorithms, programming languages, data structures, and the analysis of the semantics of complex systems.

Key words: many-sorted algebra, educational construct, data type

Література

1. Бабаков Р. М., Баркалов А. А. Алгебраическая интерпретация микропрограммного автомата с операционным автоматом переходов // Кибернетика и системный анализ. 2016. Т.52. № 2 с.22– 29.
2. Глушков В., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра языки программирование. Киев: Наукова думка, 1978. - 312 с.
3. Перминов, Е.А. Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений в аспекте интеграции образования. Екатеринбург: Изд-во РГГПУ, 2019. - 280 с
4. Плоткин Б. И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. Москва: Наука, 1991. - 448 с.
5. Цаленко М.Ш. Моделирование семантики в базах данных. Москва: Наука, 1989. - 288 с.
6. Breu R. Algebraic Specification Techniques in Object Oriented Programming Environments. Berlin : Springer-Verlag, 1991, 236.
7. Wagner E. G. Algebraic Specifications: some old history and new thoughts // Nord. J. Comput. 2002. # 9(4). P. 373–404.

Цимбалюк А. О. (магістр, 1 курс),
Науковий керівник – проф. Кузьмич В. І.
Херсонський державний університет (Херсон, Україна)

ФОРМУВАННЯ ОСНОВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОНЯТЬ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ ЗАСОБАМИ МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Метрична геометрія [1] – галузь геометрії, що характеризує та вивчає множини точок, базуючись лише на задані значень попарних відстаней між ними. Її розвиток пов'язаний з іменами К. Менгера, Л. Блюменталю, Дж. Кріппена, Т. Гавела та ін. Метрична геометрія має безпосереднє відношення до таких областей науки, як біологія, геодезія, картографія, фізика та ін. Основоположниками метричної геометрії вважають англійського математика Артура Келі (1821–1895) та австрійсько-американського математика Карла Менгера (1903–1985). У розвиток метричної геометрії зробив значний вклад російський математик О. Д. Александров (1912–1999). З основними положеннями метричної геометрії можна ознайомитись як за підручником [3], так і за монографіями відомих математиків Герберта Буземана та Марселя Берже [2].

Поняття відстані є одним із фундаментальних понять сучасної математики, яке за своєю природою є геометричним. Так, у шкільному курсі геометрії зазначається: якщо точки A і B різні, то відстанню між ними називають довжину відрізка AB .

У вузівських курсах геометрії та алгебри це поняття узагальнюється, а саме відстанню між точками A і B евклідового простору E_n називають довжину вектора $\overline{AB}$.

Відстань обов'язково задовольняє нижче наведеним умовам, не зважаючи на те, як би вона була означена, а саме:

- Відстань між точками є невід'ємне число і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли точки збігаються.

- Відстань від точки A до точки B дорівнює відстані від точки B до точки A .
- Відстань між будь-якими двома точками не перевищує суми відстаней від них до будь-якої третьої точки.

Саме ці властивості французьким математиком Морісом Фреше були прийняті за характеристичні властивості відстані (аксіоматичне означення відстані) і на цій підставі у 1906 році ним було введено поняття *метричного простору*. Теорія метричних просторів була в основному побудована після 1920 року у роботах Урисона П.С., Александрова П.С., Банаха С.

Основна мета роботи полягає у проектуванні понять метричної геометрії у шкільний курс, висвітлення таких основних геометричних об'єктів як точка, відстань, відрізок та кут з метою розширення сприйняття учнями відомостей про метричну геометрію.

У сьомому класі шкільного курсу геометрії відбувається перше знайомство з означенням, що розкриває сутність поняття відстані між двома точками під час ознайомлення з основними геометричними поняттями: «Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB . Якщо точки A і B збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю» [4, с. 17].

У курсі геометрії дев'ятого класу вивчається такий базовий для елементів метричної геометрії матеріал, як елементи тригонометрії, теорема косинусів, теорема синусів, нерівність трикутника, розв'язування трикутників, декартові координати на площині, скалярний добуток векторів.

Наведемо означення метричного простору та відстані між його точками, з яким можна знайомити учнів. Це означення використовує поняття множини та її елементів, що сформовані у восьмому класі.

Означення 1. *Непорожню множину X Елементів якої завгодно природи будемо називати метричним простором, якщо кожній парі $(x; y)$ різних елементів цієї множини за певним правилом ρ поставлене у*

відповідність єдине додатне число $\rho(x; y)$, що називається відстанню між елементами x і y , і яке задовольняє умовам:

- 1) для будь-яких двох різних елементів x і y відстань між елементами x і y дорівнює відстані між елементами t і x , тобто виконується рівність $\rho(x; y) = \rho(y; x)$ (умова симетрії);
- 2) для будь-яких трьох різних елементів x, y, z відстань між елементами x і y не більша, ніж сума відстаней між елементами x і z та між елементами z і y , тобто виконується нерівність $\rho(x; y) \leq \rho(x; z) + \rho(z; y)$ (нерівність трикутника).

Наведемо приклад метричного простору, доступного для легкого засвоєння здобувачами освіти.

Приклад 1. Найпростішим прикладом метричного простору є множина усіх точок числової осі. Такий простір називають одновимірним арифметичним евклідовим простором, і позначають R^1 . Як відомо [4] відстань між двома точками x і y числової осі знаходять як абсолютну величину (модуль) різниці відповідних чисел x і y : $\rho(x; y) = |x - y|$.

Виконання усіх умов Означення 1 для простору R^1 перевіряється досить просто. У 9-му класі їх можна перевірити за допомогою властивостей множини дійсних чисел, а у 7-му на інтуїтивному рівні, використовуючи числову пряму.

Враховуючи наші міркування можна зробити висновок про те, що матеріал шкільного курсу математики достатній, починаючи з сьомого класу, для поступового знайомства учнів з найпростішими елементами метричної геометрії. Систематичне ознайомлення з цими елементами необхідно розпочинати в дев'ятому класі. Основні геометричні поняття, (числова вісь, координатна площина) тісно пов'язані з метричною геометрією. Ознайомлення учнів з елементами метричної геометрії сприятиме формуванню в них більш широкого розуміння основних геометричних понять і готуватиме їх до адекватного сприйняття в подальшому основних понять і положень неевклідових геометрій.

Результат роботи можна використовувати на практичних заняттях з вивчення властивостей метричного простору, у вищих закладах освіти, у позакласній роботі з учнями загальноосвітніх навчальних закладах, на уроках математики у школах з поглибленим вивченням математики, а також при підвищенні кваліфікації вчителів математики.

Анотація. У статті розглядаються питання поступового включення в навчальний матеріал шкільного курсу геометрії елементів метричної геометрії. Ці питання стосуються шкільної програми поглибленого вивчення математики. Метою введення у вивчення елементів метричної геометрії є поступова підготовка учнів до адекватного сприйняття основних положень неевклідових геометрій, зокрема геометрії М. І. Лобачевського.

Ключові слова: геометрія, поглиблене вивчення, відстань, довжина, метрика, метричний простір, неевклідова геометрія

Abstract. The article considers the issues of gradual inclusion of elements of metric geometry in the teaching material of the school course of geometry. These questions concern the school program of in-depth study of mathematics. The purpose of introducing elements of metric geometry into the study is the gradual preparation of students for the adequate perception of the basic provisions of non-Euclidean geometries, in particular the geometry of MI Lobachevsky.

Key words: geometry, in-depth study, distance, length, metric, metric space, non-Euclidean geometry.

Література

- 1.Distance Geometry: Theory, Methods and Applications / A.Mucherino, C.Lavor, L.Liberty, N.Maculan // Springer. – 2013, 427.
- 2.Берже М. Геометрия. Том 1. / М.Берже. – М.: Мир, 1984. – 559 с.
- 3.Бураго Д. Ю. Курс метрической геометрии./ Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С.В.Иванов. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. – 512 с.
- 4.Мерзляк А. Г. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів/ А. Г.Мерзляк, В. Б.Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2017. – 304 с.

ПРО ФОРМУВАННЯ АЛГОРИТМІЧНОЇ КУЛЬТУРИ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ОСНОВ ТЕОРІЇ ПОДІЛЬНОСТІ В ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ

Числова лінія є однією з основних при визначенні змісту математичної освіти учнів. Її розгляд розпочинається з відомостей про натуральні числа і поступово розширюється знаннями про цілі, раціональні та дійсні числа [1]. Базовою для побудови цих систем є система натуральних чисел.

Прості числа є основною «цеглинкою» теорії натуральних чисел. Адже кожне складене число може бути подане у вигляді добутку простих чисел, і це зображення єдине, якщо не враховувати порядку запису множників. Основні відомості про прості і складені числа, подільність націло та ділення з остачею учні одержують в 5-6 класах, а у 8 класі основи теорії подільності вивчаються ширше при поглибленому вивченні математики ([1], [2]).

Слід зауважити, що цю тему традиційно розглядають і в позакласній роботі (гурток, факультатив). Ми пропонуємо тут ознайомити дітей з деякими елементарними способами виділення простих чисел на відрізках натурального ряду. При цьому учні зможуть самостійно встановити певний алгоритм, який значно полегшить виконання поставленого завдання.

У позакласній роботі зазвичай розглядають найдоступніший учням алгоритм виділення простих чисел – «решето Ератосфена». Ми вважаємо, що доцільно розглянути ще один метод виділення простих чисел. У методичній літературі він не описаний, ми ж ознайомились з ним у статті [3].

Суть методу полягає в розбитті множини чисел, у якій виділятимемо прості числа, на певні підмножини. Метою буде оптимальне зменшення початкової кількості чисел для подальшого розгляду. При цьому, як і в решеті Ератосфена, складені числа будемо викреслювати. Але алгоритм знаходження складених чисел тут буде дещо інший.

Спочатку слід довести теорему, яку на уроках не вивчали, але її доведення доступне учням, які вивчають математику в 8 класі навіть на стандартному рівні.

Теорема. *Найменший простий дільник складеного числа a не перевищує квадратного кореня з a .*

Звідси формулюємо відомий *критерій простого числа*. Першим, хто його обґрунтував, був Леонард Пізанський (Фібоначчі), який жив у XII-XIII ст.

Знаходження складених чисел на певних проміжках натурального ряду проведемо в два етапи. *На першому етапі* зафіксуємо три найменші прості числа 2, 3 та 5; складені числа, що діляться хоч на одне з цих простих чисел, будуть відкинуті автоматично, якщо складемо таблицю так, як описано нижче. *На другому етапі* виділимо в таблиці решту складених чисел, які діляться на інші прості $p > 5$ згідно наведеної теореми.

Роботу можна організувати оптимальним чином, якщо зауважити, що $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. То ж доцільно виконати ділення розглядуваного числа a на 30 з остачею. Отже, якщо $a = 30q + r$, то $0 \leq r \leq 29$; і у випадку, коли $\text{НСД}(30, r) > 1$, при $q > 0$ число a буде складеним. Тому достатньо розглядати лише числа з остачами r , у яких $\text{НСД}(30, r) = 1$. Такими остачами будуть: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Серед цих чисел жодне не буде кратним 2, 3 та 5. Всі числа, які треба дослідити, зручно розподілити на 8 підмножин. Розташувати їх доцільно у таблицю, числа з однаковою остачею записати в порядку зростання у стовпцях. Алгоритм заповнення стовпців учні легко побачать: кожне наступне число є на 30 більшим за попереднє. Після викреслення складених чисел, як вказано вище (та числа 1, якщо воно там є), в таблиці залишаться лише прості числа.

Вправа 1. *Виділити всі прості числа, які не перевищують числа 100.*

Учні складуть таблицю, у якій зі 100 наявних чисел залишиться лише 26 чисел для перевірки їх на простоту - 26 % чисел від початкової їх кількості. А досліджувати треба буде всього одне просте число 7, бо лише воно не перевищує квадратного кореня зі 100 (крім 2, 3 та 5, про що ми

вказали вище). Якщо викреслити у таблиці число 1 та всі складені числа, кратні 7, то задача буде розв'язана. І все це учні встановлюють тут усно навіть для тих чисел, які більші за 70, подавши їх у вигляді суми, наприклад: $83=70+13$, $91=70+21$ і т.п.

Наступну складнішу вправу беремо з такою метою, щоб доповнити таблицю простих чисел, яка подана у форзаці підручника [2].

Вправа 2. Виділити всі прості числа на інтервалі (1000; 1225).

Розв'язання. Складемо таблицю за алгоритмом, описаним вище. У першому рядку зафіксуємо остачі при діленні на 30, які взаємно прості з 30. Алгоритм заповнення стовпців полегшує роботу.

Таблиця 1

1	7	11	13	17	19	23	29
-	-	1001	1003	1007	1009	1013	<u>1019</u>
<u>1021</u>	1027	<u>1031</u>	<u>1033</u>	1037	1039	1043	<u>1049</u>
<u>1051</u>	1057	<u>1061</u>	<u>1063</u>	1067	<u>1069</u>	1073	1079
1081	1087	<u>1091</u>	<u>1093</u>	1097	1099	1103	1109
1111	1117	1121	1123	1127	1129	1133	1139
1141	1147	<u>1151</u>	<u>1153</u>	1157	1159	1163	1169
1171	1177	1181	1183	1187	1189	1193	1199
1201	1207	1211	1213	1217	1219	1223	-

На інтервалі (1000; 1225) маємо 224 натуральні числа, але для розгляду в нашій таблиці залишилося лише 61 число, тобто менше ніж 28 % всіх чисел. Випишуємо всі прості числа p , які менші за корінь квадратний з 1225, відмінні від 2, 3, 5: $p \in \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$. Для кожного p встановимо, які числа таблиці 1 діляться на p , тобто мають вигляд pq , щоб ці складені числа викреслити. Можна поступити так: знайти $q_{\min}$ і $q_{\max}$. Наприклад, для $p=17$ будемо мати: $\frac{1001}{17} = 58,8\dots$; $q_{\min} = 59$; $\frac{1223}{17} = 71,9\dots$; $q_{\max} = 71$.

$q \in [59; 71]$. Відкинемо ті q , які діляться або на 2, або на 3, або на 5. Одержимо: $q \in \{59; 61; 67; 71\}$. Матимемо такі складені числа, що кратні числу 17: $59 \cdot 17 = 1003$; $61 \cdot 7 = 1037$; $67 \cdot 17 = 1139$; $71 \cdot 17 = 1207$. Їх викреслюємо з таблиці. Учні встановлюють алгоритм, за яким досліджуватимуть всі інші прості p . В результаті не викресленими залишаться 32 числа, вони і є шуканими простими числами. В таблиці 1 ми виділили їх жирним шрифтом. Щоб оптимізувати роботу, розрахунки для різних p можна розподілити між учнями (для деяких простих p буде викреслено 1-2 числа, найбільше буде чисел, які кратні числу 7, їх є 9). Також слід зауважити, що деякі числа таблиці викреслюватимемо двічі (наприклад, 1183, бо воно кратне двом простим числам 7 та 13) чи тричі (як от число 1001, бо $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$).

Одержаний результат доцільно виписати у новій аналогічній таблиці, в ній клітинки, в яких стояли складені (викреслені) числа, залишити порожніми. Цю таблицю корисно проаналізувати, щоб пошукати арифметичні прогресії, всі члени яких є простими числами. Але з означенням арифметичної прогресії і її різниці слід ознайомити дітей, оскільки цю тему вивчають у 9 класі. Алгоритм побудови таких прогресій з різницею 30 або 60 чи 90 діти легко сформулюють, досліджуючи стовпці. Тут також можна виділити багато арифметичних прогресій з іншими різницями. А ще по цій таблиці зручно буде бачити алгоритм пошуку чисел-близнят, їх є 6 пар, в таблиці вони підкреслені.

Зауважимо, що розгляд саме числа 30, яке має три простих дільники, для виділення простих чисел є *оптимальним* вибором, це обґрунтовано в статті [3].

На завершення теми учням слід повідомити чимало цікавої інформації про прості числа, про не розв'язані ще проблеми, що стосуються простих чисел.

Анотація. Одним з основних завдань шкільного курсу математики є розвиток в учнів умінь аналізувати інформацію, встановлювати математичні закономірності та алгоритми. В статті

показано, як можна формувати ці вміння в позакласній роботі на прикладі теми «Прості числа» у 8 класі.

Ключові слова: натуральне число, просте число, складене число, подільність націло та з остачею, алгоритм.

Abstract. One of the main tasks of the school course of mathematics is the development of students' ability to analyze information, to determine mathematical patterns and algorithms. The article shows how you can form these skills in extracurricular activities on the example of the topic "Prime numbers" at 8 grade.

Key words: natural numbers, prime number, compound number, divisibility integer and with the remainder, algorithm.

Література

1. Навчальна програма з математики для 5-9 класів, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017, № 804.
2. Мерзляк А. Г. Алгебра: Підручник для 8 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. - 384 с.
3. Философ Е.Ф. Один способ вычленения простых чисел / Е.Ф.Философ – Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С.Пушкіна: зборнік навуковых прац. – Брэст, 2012.- Вып. 8. Ч. 2: Прыродазнаучыя навукі. - с. 14 - 24.

Шепелинська Г. П. (студ., 1 курс)

Науковий керівник - ст. викл. Михайленко І. В.

Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

МОДЕЛІ ЯК ЗАСІБ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ФАКТІВ

При вирішенні завдань інженерного проектування технічних об'єктів та дослідження процесів у технологічних системах широко використовується моделювання. Моделювання технічних об'єктів та процесів у них полягає у побудові математичної моделі. Володіння теоретичною базою і інструментами математичного моделювання має бути невід'ємним атрибутом сучасного фахівця технічного профілю. Метою побудови моделі є відображення, дослідження або прогнозування властивостей об'єкту, що моделюється.

Досліджуючи проблему використання методу моделювання у процесі дослідження математичних фактів, необхідно насамперед уточнити тлумачення понять «модель» і «моделювання».

У навчально-виховному процесі математична модель розглядається як система математичних залежностей і відношень, за допомогою яких описуються певні властивості, ознаки чи характеристики реальних об'єктів, процесів чи явищ, що досліджуються, і відображаються принципи їх внутрішньої організації або функціонування. Під моделюванням будемо розуміти процес побудови, дослідження та використання моделі. На підставі характеристики понятійного апарату математичного моделювання виділено цілі моделювання та етапи математичного моделювання [3].

Основою для реалізації математичного моделювання як методу пізнання є класифікація математичних фактів, дослідження яких базується на аналізі відповідних математичних моделей [2]. Метод математичного моделювання нагадує метод від супротивного в геометрії, що дає право при формуванні знань і вмінь використання методу математичного моделювання скористатись концептуальним підходом, запропонованим О.В. Погорєловим [3]. У розглядуваному випадку необхідними умовами вивчення та використання методу математичного моделювання є наявність:

- 1) знання про досліджувані явища, що лежать в основі тієї чи іншої прикладної задачі, яку потрібно розв'язувати;
- 2) набору математичних моделей, серед яких може бути придатна для розв'язування розглядуваного типу прикладної задачі;
- 3) умінь і навичок оперування математичними фактами, що використовуються при побудові математичних моделей.

Забезпеченню зазначених умов сприяє використання математичного моделювання як засобу формування математичних понять (функції, рівняння та системи рівнянь, різні види многогранників, тіла обертання тощо), при цьому доцільним є, з одного боку, використання такого виду моделей (матеріальні, ідеальні) з метою формування визначених математичних понять, а з другого боку – з метою ознайомлення з такими моделями, якими студенти будуть користуватись на наступних етапах, де передбачається розв'язування професійно спрямованих задач з використанням методу

математичного моделювання. При цьому координатний і векторний методи теж відносяться до методу математичного моделювання.

Математичне моделювання засноване на тому факті, що різні об'єкти і явища можуть мати однаковий математичний опис. Кажучи звичною мовою, математична модель – це сукупність наших знань про досліджуваний об'єкт, сформульованих на мові математики.

Можна назвати наступні переваги математичного моделювання в порівнянні з натурним експериментом [1]:

- економічність (заощадження матеріальних, людських, тимчасових і фінансових ресурсів);
- можливість моделювання гіпотетичних об'єктів;
- можливість реалізації режимів, небезпечних або трудновоспроизводимых в реальності;
- можливість зміни масштабу часу;
- простота багатоаспектного аналізу;
- можливість побудови прогнозів на основі виявлення загальних закономірностей;
- наявність і універсальність технічного і програмного забезпечення для моделювання.

Для організації ефективної освітньої діяльності студентів із розв'язування професійно спрямованих задач методом математичного моделювання потрібно використовувати евристичні запитання; абстрагуватись від властивостей об'єкта, несуттєвих для побудови математичної моделі; допомагати чітко вказувати на відмінності між об'єктом та його моделлю; формулювати умову і вимогу прикладної задачі мовою математики.

Висновок. Під математичним моделюванням в техніці розуміють адекватну заміну досліджуваного технічного пристрою або процесу відповідною математичною моделлю і її подальше вивчення методами обчислювальної математики із залученням засобів сучасної обчислювальної

техніки. Тобто математичне моделювання – це побудова математичної моделі, її дослідження з метою отримання нової інформації про об'єкт і використання для опису властивостей і прогнозу поведінки об'єкту.

Література

1. Ашихмин В. Н. Введение в математическое моделирование: учебное пособие / В. Н. Ашихмин [и др.]; под ред. П. В. Трусова. Москва: ЛОГОС, 2005. - 440 с.
2. Биков В.Ю. “Моделі організаційних систем відкритої освіти: Монографія”, Київ, Атіка, 2008.- 23 с.
3. Гриб'юк О. О. Математичне моделювання як засіб екологічного виховання учнів у процесі навчання математики в класах хіміко-біологічного профілю [Текст] : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Гриб'юк Олена Олександрівна ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2011. – 24 с.
3. Дулов В. Г. Математическое моделирование в современном естествознании: учебное пособие / В. Г. Дулов, В. А. Цибаров; под ред. В. Г. Дулова. Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2001. - 244 с.

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОФЕСІЙНО-ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

УДК 519.11

Афанасьева Я. А. (студ., 2 курс)
Научный руководитель – ст. преп. Усков В. И.
*Воронежский государственный лесотехнический университет
им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, РФ)*

МУЛЬТИНОМИАЛЬНОЕ ТОЖДЕСТВО И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Определим мультиномиальный коэффициент формулой

$$P(i_1, i_2, \dots, i_n) = \frac{(\sum_{k=1}^n i_k)!}{\prod_{k=1}^n (i_k)!}. \quad (1)$$

Известно, что количество перестановок с повторениями из i_1 элементов первого вида, i_2 элементов второго вида, ..., i_n элементов n -го вида равно числу (1).

Замечание. В частном случае $n = 2$ имеем

$$P(i_1, i_2) = C_{i_1+i_2}^{i_1} = C_{i_1+i_2}^{i_2},$$

где $C_{i_1+i_2}^{i_1}$ – коэффициент бинома Ньютона.

Справедливо следующее мультиномиальное тождество.

Теорема 1.

$$P(i_1 - 1, i_2, \dots, i_n) + P(i_1, i_2 - 1, \dots, i_n) + \dots + P(i_1, i_2, \dots, i_n - 1) \\ = P(i_1, i_2, \dots, i_n).$$

Доказательство. Для наглядности разберем разные значения n . При $n = 1$ утверждение очевидно. При $n = 2$ оно общеизвестно (см. [1]).

Докажем его при $n = 3$. Обозначим $i_1 = i$, $i_2 = j$, $i_3 = k$. Требуется доказать, что

$$P(i - 1, j, k) + P(i, j - 1, k) + P(i, j, k - 1) = P(i, j, k),$$

где

$$P(i, j, k) = \frac{(i + j + k)!}{i! j! k!}.$$

Возьмем сначала конкретные значения: $i = 4, j = 4, k = 1$. Имеем:

$$\frac{(3 + 4 + 1)!}{3! \cdot 4! \cdot 1!} + \frac{(4 + 3 + 1)!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} + \frac{(4 + 4 + 0)!}{4! \cdot 4! \cdot 0!} = \frac{(4 + 4 + 1)!}{4! \cdot 4! \cdot 1!};$$

$$280 + 280 + 70 = 630; \quad 630 = 630 - \text{верно.}$$

Теперь, в общем случае:

$$\frac{(i - 1 + j + k)!}{(i - 1)! j! k!} + \frac{(i + j - 1 + k)!}{i! (j - 1)! k!} + \frac{(i + j + k - 1)!}{i! j! (k - 1)!} = \frac{(i + j + k)!}{i! j! k!}.$$

Воспользуемся рекуррентным свойством факториала и вынесем общие множители:

$$\begin{aligned} & \frac{(i + j + k - 1)!}{(i - 1)! (j - 1)! j (k - 1)! k} + \frac{(i + j + k - 1)!}{(i - 1)! i (j - 1)! (k - 1)! k} \\ & + \frac{(i + j + k - 1)!}{(i - 1)! i (j - 1)! j (k - 1)!} \\ & = \frac{(i + j + k - 1)!}{(i - 1)! (j - 1)! (k - 1)!} \left(\frac{1}{jk} + \frac{1}{ik} + \frac{1}{ij} \right) = \\ & \frac{(i + j + k - 1)!}{(i - 1)! (j - 1)! (k - 1)!} \cdot \frac{i + j + k}{ijk} = \frac{(i + j + k - 1)! (i + j + k)}{(i - 1)! i (j - 1)! j (k - 1)! k} = \\ & = \frac{(i + j + k)!}{i! j! k!} - \text{верно.} \end{aligned}$$

Теперь докажем, что оно верно для любого натурального n . Имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{(i_1 - 1 + i_2 + \dots + i_n)!}{(i_1 - 1)! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_n!} + \frac{(i_1 + i_2 - 1 + \dots + i_n)!}{i_1! \cdot (i_2 - 1)! \cdot \dots \cdot i_n!} + \dots + \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n - 1)!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot (i_n - 1)!} \\ & = \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n - 1)!}{(i_1 - 1)! \cdot (i_2 - 1)! \cdot i_2 \cdot \dots \cdot (i_n - 1)! \cdot i_n} \\ & + \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n - 1)!}{(i_1 - 1)! \cdot i_1 \cdot (i_2 - 1)! \cdot (i_3 - 1)! \cdot i_3 \cdot \dots \cdot (i_n - 1)! \cdot i_n} + \dots \\ & + \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n - 1)!}{(i_1 - 1)! \cdot i_1 \cdot (i_2 - 1)! \cdot i_2 \cdot \dots \cdot (i_n - 1)!} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n - 1)!}{(i_1 - 1)! \cdot (i_2 - 1)! \cdot \dots \cdot (i_n - 1)!} \\
& \cdot \left(\frac{1}{i_2 \cdot i_3 \cdot \dots \cdot i_n} + \frac{1}{i_1 \cdot i_3 \cdot i_4 \cdot \dots \cdot i_n} + \dots + \frac{1}{i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_{n-1}} \right) = \\
& \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n - 1)!}{(i_1 - 1)! \cdot (i_2 - 1)! \cdot \dots \cdot (i_n - 1)!} \left(\frac{i_1 + i_2 + \dots + i_n}{i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_n} \right) = \\
& \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n - 1)! \cdot (i_1 + i_2 + \dots + i_n)}{(i_1 - 1)! \cdot i_1 \cdot (i_2 - 1)! \cdot i_2 \cdot \dots \cdot (i_n - 1)! \cdot i_n} = \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_n!} - \text{верно}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть $g_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, 3$, – достаточно гладкие функции. С помощью них строятся следующие определитель-функции:

$$\begin{aligned}
G_3(x) &= \det \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{pmatrix}, \\
G_3^{ijk}(x) &= \det \begin{pmatrix} g_{11}^{(i)}(x) & g_{12}^{(i)}(x) & g_{13}^{(i)}(x) \\ g_{21}^{(j)}(x) & g_{22}^{(j)}(x) & g_{23}^{(j)}(x) \\ g_{31}^{(k)}(x) & g_{32}^{(k)}(x) & g_{33}^{(k)}(x) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В работе [2] получена формула для вычисления производной $G_2^{(m)}(x)$ определитель-функции второго порядка.

В работе [3] был получен и апробирован на конференции следующий результат.

Теорема 2.

$$G_3^{(m)}(x) = \sum_{\substack{i, j, k \geq 0, \\ i+j+k=m}} P(i, j, k) G_3^{ijk}(x).$$

Теорема доказывается методом математической индукции по m с применением теоремы 1 в случае $n = 3$.

В качестве приложения полученных результатов можно рассмотреть следующее характеристическое уравнение

$$\det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0 \tag{2}$$

относительно λ для линейных операторов $A, B, C: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$.

Нетрудно видеть, что определитель $\det(\lambda^2 A + \lambda B + C)$ является многочленом шестого порядка. Для решения уравнения (3) можно разложить функцию $F(\lambda)$ по формуле Маклорена:

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^6 \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \lambda^k$$

и для производных применить формулу из теоремы 2.

Аннотация. В работе доказывается мультиномиальное тождество для мультиномиального коэффициента с несколькими аргументами; этим числом выражается количество перестановок с повторениями из i_1 элементов первого вида, i_2 элементов второго вида, ..., i_n элементов n -го вида. В частном случае $n = 3$ этот результат применяется для выведения формулы дифференцирования определителя функции третьего порядка. Полученная формула дифференцирования может использоваться для решения характеристического уравнения для двух матриц размерности 3.

Ключевые слова: мультиномиальный, тождество, перестановки, повторение, индукция, характеристическое, уравнение, определитель, матрица.

Abstract. In the paper a multinomial identity for a multinomial coefficient with several arguments is proved; this number expresses the number of permutations with repetitions of i_1 elements of the first type, i_2 elements of the second type, ..., i_n elements of the n -th type. In the particular case $n = 3$, this result is used to derive the formula for the differentiation of the determinant-function of the third order. The resulting differentiation formula can be used to solve the characteristic equation for two matrices of dimension 3.

Key words: multinomial, identity, permutations, repetition, induction, characteristic, equation, determinant, matrix.

Литература

1. Биномиальный коэффициент. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Биномиальный_коэффициент (дата обращения: 08.01.2021).
2. Усков В.И., Анжаурова Т.М. Решение линейных рекуррентных соотношений второго порядка // Молодой ученый. – 2019. – № 42 (280). – С.1–6.
3. Усков В.И. Формула производной определитель - функции // Материалы XVIII Международной научной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории». – Тула, 2020. – С. 236.

Бабаєва А. О. (студ., 1 курс),
Соколова Г. О. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Пташний О. Д.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ПРО ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УПРАВЛІННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМ ПРОЦЕСОМ

На кожному з етапів технологічного процесу (ТП) вироб, що оброблюється, можна охарактеризувати скінченною кількістю параметрів, актуальних для даного етапу (даної технологічної операції). Набір параметрів та їхня кількість може змінюватись від входу до виходу кожної операції і від операції до операції. Таким чином, у будь-який момент часу стан виробу характеризується вектором вигляду $\bar{V} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, якісний зміст координат якого та розмірність m змінюються у ході ТП, та ці зміни створюють певні незручності при його моделюванні. Стабілізувати вектор, який описує стан виробу, можна введенням «фіктивних» параметрів. Складемо вектор $\bar{X} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, координати якого – усі можливі параметри виробу на усіх етапах ТП, розташовані у фіксованому порядку, а розмірність n – кількість цих параметрів (величина стала). У ході кожної технологічної операції відбувається вплив на певну групу параметрів (координат вектору $\bar{X}$), інші параметри при цьому або не актуальні, або зовсім не визначені.

Зіставимо i -й технологічній операції так званий вектор актуальності $\bar{P}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$, $i = 1, \dots, m$, кожна з координат якого дорівнює одиниці, якщо відповідний параметр є актуальним для даної операції, і дорівнює нулю у супротивному випадку (m - загальна кількість технологічних операцій). параметри будемо називати при цьому, відповідно, істотними або фіктивними. Окрім того, розглянемо діагональну матрицю

$$P_i = \begin{pmatrix} p_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & p_{in} \end{pmatrix},$$

яку також будемо називати матрицею актуальності i -ї операції.

Введемо операцію «проектування» вектору стану на вектор і матрицю актуальності:

$$\bar{X} \mapsto \bar{P}_i \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_1 p_{i1}, \xi_2 p_{i2}, \dots, \xi_n p_{in}) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{X}_{\bar{P}_i} \quad (1)$$

$$\bar{X} \mapsto P_i \stackrel{\text{def}}{=} P_i \bar{X}^T \stackrel{\text{def}}{=} \bar{X}_{P_i} \quad (2)$$

При цьому, очевидно, $\bar{X}_{\bar{P}_i} = \bar{X}_{P_i}^T$. Після виконання цих операцій значення істотних параметрів не змінюється, а на місці фіктивних параметрів утворюються нулі. При цьому домовимся відрізняти нуль, як ознаку фіктивного параметру, від нуля, як можливого значення істотного параметру (для чого, при необхідності, можна вводити додаткові позначення).

Зауважимо, що вектор (матриця) актуальності технологічної операції зіставляє їй підпростір у просторі станів, а розглянуті операції проектують вектор стану на цей підпростір.

Вектори $\bar{X}_{\bar{P}_i}$ та $\bar{X}_{P_i}$ після проходження даної технологічної операції змінюються, та ці зміни потрібно внести у загальний вектор стану $\bar{X}$, щоб потім проектувати його на вектор (матрицю) актуальності наступної операції. Для цього вектор $\bar{X}$ спроектуємо на інверсію $\bar{P}_i'$ вектору (інверсію P_i' матриці) актуальності операції (нулі замінюються одиницями та навпаки), а до отриманого результату додамо змінений вектор $\bar{X}_{\bar{P}_i}$ ($\bar{X}_{P_i}$):

$$\bar{Y} = (\bar{X} \mapsto \bar{P}_i') + \bar{X}_{\bar{P}_i} \quad (3)$$

$$\bar{Y}^T = (\bar{X} \mapsto P_i') + \bar{X}_{P_i} \quad (4)$$

де $\bar{Y}$ - новий загальний вектор стану.

Взагалі кажучи, відображення множини технологічних операцій в множину векторів актуальності не є ін'єктивним, бо один вектор актуальності може відповідати декільком технологічним операціям. Для забезпечення ін'єктивності даного відображення можна ввести додаткові фіктивні параметри (і, відповідно, фіктивні координати вектору актуальності), за якими «схожі» операції будуть відрізнятися. Якщо при

цьому розмірність простору станів з урахуванням фіктивних параметрів – n , то множину векторів актуальності можна розглядати як підмножину області визначення деякої бульової функції n змінних. Визначимо бульову функцію так, щоб вона на даній підмножині приймала одиничне, а на його доповненні – нульове значення. Таким чином, даному технологічному процесу відповідає єдина бульова функція, яка визначає множину векторів актуальності, технологічних операцій, що входять до нього, і може бути реалізована формулами алгебри логіки.

Анотація: *Обговорюються елементи дискретного моделювання проходження технологічного процесу з урахуванням проектування вектору стану на підпростори, що відповідають окремим технологічним операціям.*

Ключові слова: *технологічний процес, технологічна операція, вектор стану, параметри виробу.*

Література

1. Пташный О.Д. Математическое моделирование выбора параметров управления технологическим процессом. Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2004. - 3(9). – С. 28-30.

УДК 331.108.26

Бабакова В. Р. (студ., 2 курс)

Волинцев О. М. (студ., 2 курс)

Науковий керівник – доц. Гадецька С. В.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ НА ВІТЧИЗНЯНОМУ ПІДПРИЄМСТВІ

У роботі досліджено процес управління персоналом у загальній системі менеджменту підприємства. Представлено економіко-математичну модель раціонального розподілу функціональних повноважень.

Управління персоналом – це система впливів на організаційну поведінку працівників. Велике значення на підприємстві повинно приділятися системі кадрової роботи, що поєднує у собі способи управління персоналом відповідно до поставлених задач. Однією з найважливіших

функцій кадрової політики на підприємстві є підбір і розстановка кадрів. Очевидно, що від якості виконання цієї функції багато в чому залежить ефективність підприємницької діяльності. Стратегією управління персоналом має бути поєднання цілей підприємства, пов'язаних з отриманням економічної вигоди, з потребами та інтересами працівників.

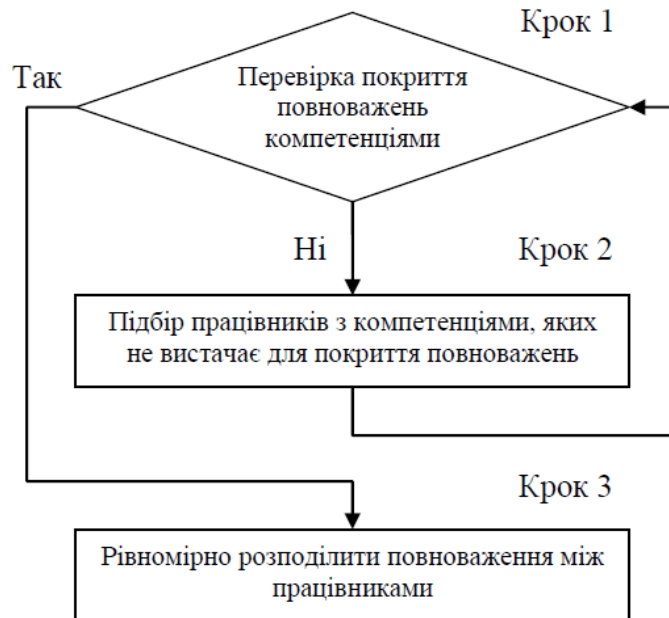


Рис. 1. Алгоритм розв'язання задачі

З метою вирішення проблеми нераціонального розподілу функціональних повноважень між працівниками різних підрозділів, що спричиняє надмірно виснажливі навантаження, пропонується застосувати інструментарій економіко-математичного моделювання [1, 2]. Для розробки моделі було сформульовано задачу: розподілити функціональні повноваження між робітниками таким чином, щоб навантаження на кожного члена цієї групи було мінімальним. Наступним етапом стала розробка алгоритму розв'язання поставленої задачі (рис. 1).

Для побудови моделі задачі введемо наступні позначення:

$K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$ - множина компетенцій для кожного робітника,

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ - множина функціональних повноважень, які повинні покриватись сумарною компетенцією підрозділу,

$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ - множина кандидатів на певну посаду,

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ - множина працівників підрозділу.

Відповідно до алгоритму розв'язання задачі (рис. 1), другий крок представляє собою окрему оптимізаційну задачу, суть якої полягає у пошуку такого працівника, набір компетенцій якого найбільшою мірою відповідає необхідному для реалізації повноважень на певній посаді. Математична модель цього кроку алгоритму має такий вигляд.

1. Будуємо матрицю суміжності $R=[r_{ij}]$ для відповідності Γ (відповідність набору компетенцій множині кандидатів):

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & k_j \in \Gamma(c_i); \\ 0, & k_j \notin \Gamma(c_i). \end{cases}$$

2. Вводимо набір змінних по кількості елементів множини кандидатів C :

$$x_i = \begin{cases} 1, & c_i \in D; \\ 0, & c_i \notin D. \end{cases}$$

де D – шукана множина кандидатів, які задовольняють умовам відбору.

3. За умовою задачі ми шукаємо w кандидатів на посаду робітника будівельної бригади, а отже, введемо обмеження:

$$\sum_{i=1}^n x_i = w.$$

4. У групі з w відібраних кандидатів необхідною є наявність тих шуканих компетенцій, що відповідають множині повноважень V , тому:

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} x_i \geq 1, \quad j = \overline{1, p}, \quad \text{де } l_{ij} = \begin{cases} 1, & v_j \in \Gamma^*(c_i); \\ 0, & v_j \notin \Gamma^*(c_i). \end{cases}$$

5. Цільова функція, яка дозволяє обрати із усього списку найбільш компетентних кандидатів, матиме вигляд:

$$\sum_{i=1}^n r_{ij} x_i \rightarrow \max, \quad j = \overline{1, p}.$$

Слід зазначити, що на другому кроці алгоритму вирішується, чи прийняти відібраного кандидата на посаду як додаткового працівника, збільшуючи чисельність робітничого колективу будівельної бригади, чи

звільнити з посади одного з робітників і прийняти кандидата на його посаду, чи просто підвищити рівень кваліфікації працівника шляхом навчання.

Зауважимо, що на третьому кроці отримуються кінцеві результати розв'язання задачі розподілу функціональних повноважень між працівниками, що також можливо здійснити засобами оптимізаційного моделювання.

Література

1. Акімова О. В. Управління людським капіталом промислового підприємства за допомогою персональних збалансованих систем показників / О. В. Акімова, О. О. Каменська // Економіка та управління підприємствами. – 2010. – №5(107). – С. 37-45.
2. Друкер П. Эффективное управление: Экономические задачи и оптимальные решения. – М. : Фаир-пресс, 1998. – 288 с.
3. Гадецька С.В. Удосконалення системи управління персоналом на вітчизняному підприємстві / С.В. Гадецька, О.Г. Головка, В.О. Пономаренко // Вісник УБС НБУ. – 2012. - №3(15). - С.316-319.

Бондар В. В. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – ст. викл. Нестеренко В. О.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

Математичні моделі фізичних процесів та розв'язання їх операційним методом

Розглянемо приклади, для яких побудуємо математичні моделі у вигляді лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами або їх систем та розв'язання, цих рівнянь, операційним методом.

Приклад 1. Дано математичний маятник, довжина якого дорівнює l . Він виводиться з положення рівноваги прямолінійним рухом точки підвісу у горизонтальному напрямі, яка робить n повних гармонічних коливань з малою амплітудою A та частотою ω . Знайти закон коливань маятника.

Розв'язання. Позначимо відхилення маятника через $x(t)$ (по горизонталі) від положення рівноваги, а через $y(t)$ рух точки підвісу. Тоді диференціальне рівняння руху маятника (тобто математична модель руху маятника) має вигляд

$$x'' = -\frac{g}{l}(x - y) = -k^2(x - y).$$

Оскільки точка підвісу рухається прямолінійно та робить повні гармонічні коливання, то закон її руху має вигляд

$$y = A \left(1 - \sigma \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) \right) \sin \omega t = A \sin \omega t - A \sigma \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) \sin \omega \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right),$$

де $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ – функція Хевісайда, і

$$\sin \omega \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) = \sin(\omega t - 2\pi n) = \sin \omega t.$$

Тоді диференціальне рівняння руху математичного маятника може бути записано таким чином

$$x'' + k^2 x = Ak^2 \left(\sin \omega t - \sigma \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) \sin \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) \right).$$

Перейдемо до рівняння із зображень $x(t) \longleftrightarrow X(p)$, $x'(t) \longleftrightarrow pX(p)$,
 $x''(t) = p^2 X(p)$.

оскільки при $t = 0, x_0 = 0, x'_0 = 0$. Одержимо

$$(p^2 + k^2)X(p) = \frac{k^2 \omega A}{p^2 + \omega^2} \left(1 - e^{-\frac{2\pi n}{\omega} p} \right).$$

Звідси знаходимо

$$X(p) = \frac{Ak^2 \omega}{(p^2 + k^2)(p^2 + \omega^2)} \left(1 - e^{-\frac{2\pi n}{\omega} p} \right).$$

Розглянемо окремі випадки: $\omega \neq k$ і $\omega = k$

a) $\omega \neq k$.

$$X(p) = \frac{Ak}{\omega^2 - k^2} \left(\frac{\omega k}{p^2 + k^2} - \frac{\omega k}{p^2 + \omega^2} \right) \left(1 - e^{-\frac{2\pi n}{\omega} p} \right)$$

За зображенням знаходимо оригінал – закон коливання маятника

$$x(t) = \frac{Ak}{\omega^2 - k^2} \left[(\omega \sin kt - k \sin \omega t) - \sigma \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) (\omega \sin k \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right) - k \sin \omega \left(t - \frac{2\pi n}{\omega} \right)) \right],$$

або після перетворень для $t < \frac{2\pi n}{\omega}$ і $t > \frac{2\pi n}{\omega}$:

$$\text{при } 0 \leq t \leq \frac{2\pi n}{\omega}, \quad x(t) = \frac{Ak}{\omega^2 - k^2} (\omega \sin kt - k \sin \omega t);$$

$$\text{при } t > \frac{2\pi n}{\omega}, \quad x(t) = \frac{2Ak\omega}{\omega^2 - k^2} \sin \frac{k\pi n}{\omega} \cos k \left(t - \frac{\pi n}{\omega} \right).$$

b) $\omega = k$

$$X(p) = \frac{Ak^3}{(p^2+k^2)^2} \left(1 - e^{-\frac{2\pi n}{k}p}\right) = \frac{A}{2} \left[\frac{k}{p^2+k^2} - \frac{k(p^2-k^2)}{(p^2+k^2)^2} \right] \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\pi n}{k}p}\right).$$

Звідси переходимо до оригінала – до закону коливання математичного маятника у випадку резонансу

$$x(t) = \frac{A}{2} \left\{ (\sin kt - kt \cos kt) - \sigma \left(t - \frac{2\pi n}{k} \right) \left[\sin k \left(t - \frac{2\pi n}{k} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - k \left(t - \frac{2\pi n}{k} \right) \cos k \left(t - \frac{2\pi n}{k} \right) \right] \right\};$$

або при $0 \leq t \leq \frac{2\pi n}{k}$

$$x(t) = \frac{A}{2} (\sin kt - kt \cos kt), ,$$

а при $t > \frac{2\pi n}{k}$

$$x(t) = -A\pi n \cos kt. .$$

Приклад 2. На валу MN , жорсткість якого дорівнює c (моментом інерції можна знехтувати), закріплені два махових колеса з однаковими моментами інерції I . В початковий момент часу маховику M задається вимушене обертання зі сталою кутовою швидкістю ω , яке підтримується протягом часу T , після якого система залишається сама собою. Знайти закон руху обох махових коліс.

Розв’язання. Позначимо кути поворотів маховиків M і N через α і β . Для проміжку часу $0 \leq t \leq T$ маємо для маховика M : $\alpha = \omega t$. . Диференціальне рівняння руху для маховика N буде: $I\beta'' + c(\beta - \omega t) = 0$. . Тобто одержимо систему

$$\begin{cases} \alpha = \omega t \\ I\beta'' + c(\beta - \omega t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

При $t > T$ диференціальні рівняння руху будуть

$$\begin{cases} I\alpha'' + c(\alpha - \beta) = 0 \\ I\beta'' + c(\beta - \alpha) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Розв’язок першої системи дає для кута β (при нульових початкових умовах) значення

$$\beta = \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt, \quad \text{де } k^2 = \frac{c}{I}.$$

Звідси знаходимо початкові умови для системи (2)

$$\alpha_0 = \omega T; \alpha'_0 = \omega; \beta_0 = \omega T - \frac{\omega}{k} \sin kT$$

$$\beta'_0 = \omega(1 - \cos kT).$$

Перенесемо початок відліку часу, нехай $t = t_1 + T$, щоб початкові умови для системи (2) були задані при $t_1 = 0$. Перепишемо систему (2) у вигляді

$$\begin{cases} \alpha'' + k^2 \alpha - k^2 \beta = 0 \\ \beta'' - k^2 \alpha + k^2 \beta = 0 \end{cases}$$

Зображення системи (де змінна t_1) буде таке $(\alpha(t_1) \leftrightarrow A(p),$

$$\alpha''(t_1) \leftrightarrow p^2 A(p) - p\omega T - \omega; \beta(t_1) \leftrightarrow B(p);$$

$$\beta''(t_1) \leftrightarrow p^2 B(p) - p\left(\omega T - \frac{\omega}{k} \sin kT\right) - \omega(1 - \cos kT))$$

$$\begin{cases} (p^2 + k^2)A(p) - k^2 B(p) = p\omega T + \omega \\ (p^2 + k^2)B(p) - k^2 A(p) = p\omega T + \omega - \frac{p\omega}{k} \sin kT - \omega \cos kT \end{cases}$$

Виключимо по черзі $A(p)$ і $B(p)$, дістанемо

$$\begin{cases} p^2(p^2 + k^2)A(p) = \omega((p^2 + 2k^2)(pT + 1) - pk \sin kT - k^2 \cos kT) \\ p^2(p^2 + k^2)B(p) = \omega((p^2 + 2k^2)(pT + 1) - (p^2 + k^2)\left(\frac{p}{k} \sin kT + \cos kT\right)) \end{cases}$$

Звідси визначаємо $A(p)$ і $B(p)$

$$A(p) = \frac{\omega T}{p} + \frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega}{2k} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 2k^2} \right) \sin kT -$$

$$- \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 + 2k^2} \right) \cos kT;$$

$$B(p) = \frac{\omega T}{p} + \frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega}{2k} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 2k^2} \right) \sin kT -$$

$$- \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2 + 2k^2} \right) \cos kT$$

За знайденими зображеннями визначаємо $\alpha(t_1), \beta(t_1)$

$$\alpha(t_1) = \omega T + \omega t_1 - \frac{\omega}{2k} (1 - \cos(kt_1 \sqrt{2})) \sin kT -$$

$$- \frac{\omega}{2} \left(t_1 - \frac{1}{k\sqrt{2}} \sin kt_1 \sqrt{2} \right) \cos kT;$$

$$\beta(t_1) = \omega T + \omega t_1 - \frac{\omega}{2k} (1 + \cos kt_1 \sqrt{2}) \sin kT -$$

$$- \frac{\omega}{2} \left(t_1 + \frac{1}{k\sqrt{2}} \sin kt_1 \sqrt{2} \right) \cos kT.$$

Щоб повернутися до змінної t , треба в знайдених формулах замінити $t_1 = t - T$.

Отже для $t > T$ маємо закони руху маховиків

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \omega t - \frac{\omega}{2k} (1 - \cos k\sqrt{2}(t - T)) \sin kT - \\ &\quad - \frac{\omega}{2} \left(t - T - \frac{1}{k\sqrt{2}} \sin k\sqrt{2}(t - T) \right) \cos kT; \\ \beta(t) &= \omega t - \frac{\omega}{2k} (1 + \cos k\sqrt{2}(t - T)) \sin kT - \\ &\quad - \frac{\omega}{2} \left(t - T + \frac{1}{k\sqrt{2}} \sin k\sqrt{2}(t - T) \right) \cos kT.\end{aligned}$$

Література

1. Пак В.В. Вища математика / В.В.Пак, Ю.Л.Носенко, Підручник – К.: Либідь, 2006. – 440 с.
2. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие / Ю.Л.Геворкян, С.С.Габриелян, Л.Т.Кобизская и др.; Под ред. Ю.Л.Геворкяна – В двух томах. Т.2. Дифференциальные уравнения. Ряды. Двойные и тройные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля. Элементы теории функций комплексного переменного. Операционное исчисление. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2005. – 412 с.

Вороновський Д. В. (аспірант, 1 рік навчання)

Шевченко Д. М. (аспірант, 1 рік навчання)

Науковий керівник - проф. Ярхо Т. О.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

ЗАСТОСУВАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ МЕТОДОЛОГІЇ У РОЗРАХУНКАХ НАДІЙНОСТІ БУДІВЕЛЬНО-ДОРОЖНІХ МАШИН

Будівельно-дорожні машини (БДМ) – це група машин автомобільної техніки, призначена для проведення будівельних робіт, а також експлуатації та утримання доріг. Як всякі машини, БДМ характеризуються певним рівнем надійності. Під надійністю розуміють властивість об'єкта зберігати усі параметри, що забезпечують необхідні функції в заданих умовах експлуатації [1]. Надійність розглядається для випадку неперервної праці виробу (безвідмовність), а також у випадку наявності перерв для обслуговування і ремонту (довговічність). Адже безвідмовність визначає неперервну роботу

виробу без будь-яких втручань для підтримки працездатності. Довговічність – це властивість зберігати працездатний стан до граничного стану при певних умовах експлуатації [2].

Надійність вивчається стосовно технічних систем та їхніх елементів (зокрема, БДМ та її деталей, вузлів, агрегатів). Важливим аспектом є вивчення зносу деталей та вузлів БДМ, оскільки в міру зносу вказаних елементів надійність БДМ знижується [3].

Показники надійності БДМ та її елементів розраховуються за результатами випробувань (стендових, полігонних, експлуатаційних, спеціальних тощо). У зв'язку з численними випадковими факторами, що впливають на умови та результати випробувань, в основу цих розрахунків має бути покладена стохастична методологія.

Нехай вивчається деяка дискретна або неперервна випадкова величина X . Проводиться ряд її незалежних спостережень: $X_1, X_2, \dots, X_n$. Статистичний матеріал, отриманий в результаті спостережень, представляють у вигляді таблиці:

i – номер спостереження	1	2	3	...	n
x_i – результат спостереження	x_1	x_2	x_3	...	x_n

Таблицю зазначеного виду називають простим статистичним рядом. Він являє собою первинну форму подання статистичного матеріалу.

Простий статистичний ряд при великій кількості спостережень n є важко доступним для огляду. Першим етапом обробки статистичного матеріалу є ранжирування результатів спостереження статистичних даних (розташування результатів спостереження в неспадному порядку), отримання згрупованого статистичного ряду і далі – дискретного або інтервального статистичного ряду [4].

Другий (після угруповання) етап обробки даних спостережень полягає у розрахунках числових характеристик вибірки. За дискретним статистичним розподілом вибірки

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Обчислюють вибіркове середнє

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i;$$

вибірккову дисперсію

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2 \cdot n_i; \quad (1)$$

вибірккове середнє квадратичне відхилення (с. к. в.)

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}; \quad (2)$$

виправлену вибірккову дисперсію

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2 \cdot n_i; \quad (3)$$

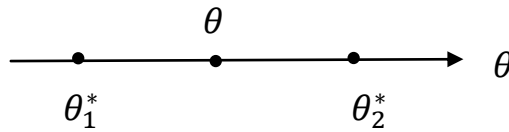
виправлене вибірккове с. к. в.

$$S = \sqrt{S^2}. \quad (4)$$

Якщо вивчається випадкова величина X з невідомими параметрами: математичним сподіванням $M(X)$ і дисперсією $D(X) = \sigma^2$, то $\bar{x}_B$ і S^2 будуть незміщеними оцінками, відповідно, $M(X)$ і $D(X)$ (так званими точковими оцінками) [4].

Нагадуємо, що точкові оцінки невідомих параметрів не дозволяють безпосередньо відповісти на питання, яку похибку ми допускаємо, приймаючи замість точного значення невідомого параметра його деяке наближення. Відповідно, завдання інтервального оцінювання полягає в тому, що за даною реалізацією вибірки $x_1, x_2, \dots, x_n$ побудувати числовий інтервал (θ_1^*, θ_2^*) , відносно якого із заздалегідь обраною ймовірністю γ можна сказати,

що всередині цього інтервалу знаходиться точне значення θ оцінюваного параметру



Інтервал (θ_1^*, θ_2^*) називається довірчим інтервалом, а γ – довірчою ймовірністю.

Відомі алгоритми побудови довірчих інтервалів для параметрів нормального розподілу [4, 6].

Застосуємо результати побудови довірчого інтервалу для невідомого середньоквадратичного відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X до розв'язання задачі з практики контролю величини зносу зубчастих конічних коліс [5].

Задача 1. За результатами контролю величини зносу дев'яти зубчастих конічних коліс, які застосовуються в БДМ, обчислено вибіркове с. к. о. товщини зуба колеса $\sigma_B = 5$ мм. У припущенні, що величина зносу зубчастих коліс має нормальний розподіл, визначати з ймовірністю $\gamma = 0,95$ довірчий інтервал для параметра σ .

Розв'язання. З формул (1) і (3) випливає, що $S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$. Отже,

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_B} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma_B.$$

За умови, $n = 9$. Тому $S = \sqrt{\frac{9}{8}} \cdot 5$.

Для побудови довірчого інтервалу для σ використовують допоміжну випадкову величину

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$$

що має "хі – квадрат" – розподіл з $n - 1$ ступенями свободи [4].

Розв'язуючи рівняння

$$\int_{c_1}^{\infty} f(\chi^2) d(\chi^2) = \frac{1+\gamma}{2} \quad \text{та} \quad (5)$$

$$\int_{C_2}^{\infty} f(\chi^2) d(\chi^2) = \frac{1-\gamma}{2}, \quad (6)$$

знаходять квантілі χ^2 -розподілу

$$C_1 = \chi_{\frac{1+\gamma}{2}; n-1}^2 \text{ і } C_2 = \chi_{\frac{1-\gamma}{2}; n-1}^2.$$

У поставленій задачі

$$C_1 = \chi_{0,975; 8}^2 \text{ і } C_2 = \chi_{0,025; 8}^2.$$

За таблицею χ^2 -розподілу ці значення, відповідно, дорівнюють

$$C_1 = 2,18; C_2 = 17,53.$$

Довірчий інтервал $(S \cdot q_1, S \cdot q_2)$ накриває невідоме середнє квадратичне відхилення σ із заданою ймовірністю $\gamma = 0,95$. Тут

$$q_1 = \sqrt{\frac{(n-1)}{C_2}}; \quad q_2 = \sqrt{\frac{(n-1)}{C_1}}; [5].$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} (S \cdot q_1, S \cdot q_2) &= \left(\frac{\sqrt{\frac{9}{8}} \cdot 5 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{17,53}}, \quad \frac{\sqrt{\frac{9}{8}} \cdot 5 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{2,18}} \right) = \\ &= \left(\frac{15}{4,19}, \quad \frac{15}{1,48} \right) = (3,58; 10,14). \end{aligned}$$

Отже, $3,58 \leq \sigma \leq 10,14$ (мм).

Зауважимо, що знаходження точкових та інтервальних оцінок є, як правило, деякою попередньою стадією статистичних досліджень. Кінцева мета може полягати в порівнянні характеристик деталей, вузлів, агрегатів. Тобто кінцевою метою є розв'язання задач порівняння, які на математичній мові формулюються як задачі статистичної перевірки гіпотез щодо параметрів закону розподілу. У практиці контролю величини зносу зубчастих

коліс БДМ актуальною є задача перевірки забезпечення відповідності визначеного виправленого вибіркового с. к. в. товщини зуба колеса значенню, вказаному в технічних умовах. Наведемо приклад постановки та розв'язання такої задачі [5].

Задача 2. За результатами величини зносу 25 зубчастих циліндричних коліс, які застосовуються у БДМ, знайдено виправлене с. к. в. товщини зуба колеса $S = 0,5$ мк, в той час, як (за технічними умовами) воно не повинно перевищувати 0,15 мк. Перевірити, за рівнем значущості $\alpha = 0,05$, чи забезпечується необхідна товщина зуба колеса. Розподіл товщини зуба передбачається нормальним.

Розв'язання. Треба здійснити перевірку гіпотези про дисперсію випадкової величини, розподіленої за нормальним законом. Необхідну товщину зуба колеса буде забезпечено, якщо генеральна дисперсія $\sigma^2 \leq 0,15$. Оскільки виправлена дисперсія $S^2 = 0,25 > 0,15$, то за нульову гіпотезу приймемо $H_0: \sigma^2 = 0,15$, а за альтернативну $H_1: \sigma^2 > 0,15$. У цьому випадку маємо правосторонню критичну область. Критерій значущості для перевірки даної нульової гіпотези ґрунтується на обчисленні вибіркової статистики

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

Доведено: якщо гіпотеза H_0 є вірною, то вибіркова статистика має "хі-квадрат" – розподіл з $\nu = n - 1$ ступенями свободи [6].

За умовою задачі $\nu = 25 - 1 = 24$.

За таблицею значень критерію χ^2 , при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і числі ступенів свободи $\nu = 24$, знайдемо критичну точку

$$\chi_{\text{кр.}}^2 = \chi_{0,05;24}^2 = 36,4.$$

Обчислимо емпіричне (спостережуване) значення критерію

$$\chi_{\text{емп.}}^2 = \frac{(25-1) \cdot 0,25}{0,15} = 40.$$

Оскільки $\chi_{\text{емп.}}^2 > \chi_{\text{кр.}}^2$ ($40 > 36,4$), то гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної гіпотези H_1 . Отже, вважаємо, що необхідна товщина зуба не забезпечується.

Сформулюємо задачу з практики дослідження довговічності ножів бульдозера та вкажемо шлях її розв'язання [5].

Задача 3. У результаті спостережень виявилось, що середня довговічність ножів бульдозера в двох управліннях механізації: для 17 ножів з управління 1 та 10 ножів з управління 2 дорівнює, відповідно 15 год. і 13 год., а відповідні виправлені с. к. о. дорівнюють 2,5 год. і 3 год. Обидві групи ножів вироблено одним і тим самим заводом. Перевірити, чим є суттєвою відмінність середньої довговічності ножів у цих групах при 5 % рівні значущості.

Припустити, що довговічність має нормальний закон розподілу.

Вказівка до розв'язання. Сформульована задача є задачею порівняння, що зводиться до перевірки гіпотез відносно математичних сподівань двох нормально розподілених випадкових величин: $X \sim N(a_x, \sigma_x)$ та $Y \sim N(a_y, \sigma_y)$. Припускаємо, що значення σ_x і σ_y хоча і є невідомими, але є рівними: $\sigma_x = \sigma_y$ (за умовою задачі обидві групи ножів вироблено одним і тим самим заводом). У задачі: $n_x = 17$; $n_y = 10$; $\bar{x}_B = 15$; $\bar{y}_B = 13$; $S_x = 2,5$; $S_y = 3$; $\alpha = 0,05$.

Треба перевірити нульову гіпотезу $H_0: a_x = a_y$ проти альтернативної гіпотези $H_1: a_x \neq a_y$. Застосувати критерій значущості

$$T = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sqrt{\frac{n_x S_x^2 + n_y S_y^2}{n_x + n_y - 2} \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y} \right)}}.$$

Доведено, що за умови справедливості гіпотези H_0 , вибіркова статистика T має розподіл Стюдента з $\nu = n_1 + n_2 - 2$ ступенями свободи.

Висновок. У статті розглянуто застосування стохастичної методології до розв'язання практичних задач з розрахунків надійності будівельно-

дорожніх машин, а саме: контролю величин зносу зубчастих конічних коліс БДМ, перевірки відповідності виправленого вибіркового с. к. в. товщини зубчастого циліндричного колеса значенню, вказаному в технічних умовах. Наведено формулювання та вказівки до розв'язання задачі з практики дослідження довговічності ножів бульдозера. Попередньо обговорено етапи статистичної обробки даних випробування, сутність точкових та інтервальних оцінок. Наведено необхідні теоретичні положення щодо побудови довірчих інтервалів та перевірки статистичних гіпотез. Перспективою наукових досліджень вважаємо подальшу класифікацію задач з оцінки надійності БДМ та розробку відповідних статистичних алгоритмів розв'язання.

Література

1. Лой В. Н. Обеспечение надежности машин и оборудования: уч.- метод. пособие / В. Н. Лой, С. Н. Пищов. – Минск: БГТУ, 2012. – 70 с.
2. Герман В. Ф. Надійність та експлуатація гідромашин і гідроприводів: навчальний посібник / В. Ф. Герман, В. О. Панченко, О. Г. Гусак, А. А. Папченко. – Суми: СДУ, 2016. – 175 с.
3. Баженов Ю. В. Основы теории надежности машин: учебное пособие / Ю. В. Баженов, М. Ю. Баженов. – М.: Инфра – М, 2020. - 315 с.
4. Жильцов О. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. / О. Б. Жильцов; за ред. Г. О. Михаліна. – К.: Київ. ун-т ім. Б. Гринченка, 2015. – 336 с.
5. Иванов В. П. Математическая статистика в инженерных задачах. Курс лекций / В. П. Иванов, А. Ю. Лемин. – М.: НИУ МГСУ, 2016. – 56 с.
6. Руденко В. М. Математична статистика: навч. посібник / В. М. Руденко. – Київ: Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

У практичному житті людина всюди має справу з вимірами. На кожному кроці зустрічаються вимірювання таких величин, як довжина, обсяг, вага, час і ін.

Вимірювання дають кількісну характеристику навколишнього світу, розкриваючи людині діючі в природі закономірності. Всі галузі техніки не могли б існувати без розгорнутої системи вимірів, що визначають як усі технологічні процеси, контроль і управління ними, так і властивості і якість випуску продукції.

Велике значення вимірювань в сучасному суспільстві. Вони служать не тільки основою науково-технічних знань, але мають першорядне значення для торгівлі, обліку матеріальних ресурсів і планування, забезпечення якості продукції та безпеки праці та інших видів діяльності.

Особливо зросла роль вимірювань в століття широкого впровадження нової техніки, розвитку електроніки, автоматизації, атомної енергетики, космічних польотів.

Визначення вимірювання: воно є знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

Галуззю науки, що вивчає вимірювання, є метрологія. Це наука про вимірювання, методи, засоби забезпечення їх єдності та способи досягнення необхідної точності.

Єдність вимірювань - такий стан вимірювань, за якого їх результати виражені в узаконених одиницях і похибки вимірювань відомі з заданою вірогідністю. Єдність вимірювань необхідно для того, щоб можна було порівняти результати вимірювань, виконаних в різних місцях, в різний час, з використанням різних методів і засобів.

Існує кілька видів вимірювань. При їх класифікації зазвичай виходять з характеру залежності вимірюваної величини від часу, виду рівняння вимірювань, умов, що визначають точність результату вимірювань і способів вираження цих результатів.

За характером залежності вимірюваної величини від часу вимірювання поділяються на статичні, при яких вимірювана величина залишається постійною в часі і динамічні, в процесі яких вимірювана величина змінюється і є непостійною в часі.

За способом отримання результатів вимірювань їх поділяють на:

прямі; непрямі; сукупні; спільні.

Прямі - це вимірювання, при яких шукане значення фізичної величини знаходять безпосередньо з досвідчених даних.

Непрямі - це вимірювання, при яких шукану величину визначають на підставі відомої залежності між цією величиною і величинами, що піддаються прямим вимірам, тобто вимірюють не власне обумовлену величину, а інші, функціонально з нею пов'язані. Значення вимірюваної величини знаходять шляхом обчислення значення відомої функції, що залежить від величин, виміряних прямим способом.

Сукупні - це вироблені одночасно вимірювання кількох однойменних величин, при яких шукану величину визначають рішенням системи рівнянь, одержуваних при прямих вимірах різних сполучень цих величин.

Спільні - це вироблені одночасно вимірювання двох або декількох різнойменних величин для знаходження залежностей між ними.

Обробка результатів спільних вимірювань

При спільних вимірах отримані значення використовуються для побудови залежностей між вимірюваними величинами. Розглянемо багатофакторний експеримент, за результатами якого повинна бути побудована залежність $y = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$

Припустимо далі, що залежність $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m$, тобто параметр стану є лінійна комбінація з вхідних факторів. В процесі

експерименту проводиться спільних вимірів для знаходження коефіцієнтів a_j

В цьому випадку шукані величини визначаються в результаті розв'язання системи лінійних рівнянь:

$$y_i = \sum_{j=1}^m a_j x_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

де a_j – шукані коефіцієнти залежності, яку необхідно визначити, y_i, x_{ij} – вимірювані значення величин.

У припущенні, що система рівнянь (1) є точною, але значення y_i отримані з похибками, запишемо:

$$l_i = y_i + \Delta_i \quad (2)$$

де Δ_i - похибка вимірювання y_i , тоді

$$l_i = \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} + \Delta_i \quad (3)$$

Для вирішення задачі ми змушені використовувати значення l_i . При цьому, якщо число вимірювань l_i більше числа невідомих в рівнянні (1), то система (1) не має однозначних рішень.

Тому рівняння системи (1) іноді називають умовними.

Оцінимо випадкову похибку спільних вимірів. Нехай похибка Δ_i має нормальний закон розподілу з нульовим математичним сподіванням і дисперсією. Вимірювання l_i незалежні. У цьому випадку за аналогією з обробкою прямих вимірювань може бути побудована функція максимальної правдоподібності:

$$L(l_1, l_2, \dots, l_n) = \prod_{i=1}^n \rho_i(l_i) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(l_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right)^2 \right] \quad (4)$$

Для знаходження екстремуму функції правдоподібності (4) скористаємося вже відомою процедурою. Прологарифміруем (4) і знайдемо значення, при яких функція досягає екстремуму. Умовою максимуму функції (1) є:

$$\sum_{i=1}^n \left(l_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right)^2 = \min \quad (5)$$

Таким чином, (5) відповідає вимогам методу найменших квадратів. Отже, при нормальному розподілі випадкової похибки оцінки за методом максимальної правдоподібності і за методом найменших квадратів збігаються. Для знаходження оцінки $\alpha_j = \alpha_{0j}$, що задовольняє (5), необхідна рівність нулю всіх частинних похідних цієї функції по α_j .

Для кожного значення j ця оцінка буде знаходитися з рівняння:

$$\sum_{i=1}^n \left(l_i - \sum_{j=1}^m \alpha_j x_{ij} \right)^2 x_{ij} = 0 \quad (6)$$

Система рівнянь (6) є лінійною щодо α_j і називається системою нормальних рівнянь. Число її рівнянь завжди збігається з числом α_j .

Систему (6) можна розв'язати за формулами Крамера

$$\alpha_{0j} = \frac{D_j}{D}$$

де D – визначник матриці системи, а визначник D_j виходить з визначника D заміною j -го стовпця стовпцем вільних членів.

Для знаходження оцінки дисперсії результатів σ_0 знайдемо умову максимуму після логарифмування (1) і підставимо $\alpha_j = \alpha_{0j}$, отримаємо:

$$\sigma_0 = \sum_{i=1}^n \left(l_i - \sum_{j=1}^m \alpha_{0j} x_{ij} \right)^2$$

Література

1. Математическая обработка результатов измерений в лабораторном практикуме по курсу общей физики Учебно-методическое пособие / О.М. Голицына, А.В. Меремьянин, В.Е. Рисин. Воронеж, ВГУ, 2015. - 20 с.
2. Обробка результатів наукових досліджень. Методичні вказівки до виконання практичної роботи з дисципліни «Методологія та організація наукових досліджень з основами інтелектуальної власності. » Спеціальність 133 "Галузеве машинобудування". Мелітополь, 2018.
3. Організація наукових досліджень: навчальний посібник / В.М. Кислий. — Суми: Університетська книга, 2011. — 224 с.

Ганбат Намуундарь, (студ., 1 курс),
Клячко М. М. (студ., 1 курс),
Науковий керівник – доц. Пташний О. Д.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

РОЗРОБКА ТЕСТОВИХ ПИТАНЬ З РОЗДІЛУ «ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН»

Поняттями теорії множин та теоретико-множинною символікою студенти починають користуватися з самого початку вивчення курсу вищої математики. Це забезпечує їм та викладачу певні зручності при формулюванні та запису математичних висловлювань. При вивченні розділів курсу доводиться мати справу з множинами різної природи - числовими, множинами функцій, векторів, матриць та ін. При цьому більше цікавляться саме властивостями елементів множин, а не множинами, як об'єктами. Далеко не всі студенти – початківці володіють необхідними теоретико-множинними поняттями, навіть для вивчення початків математичного аналізу. А для студентів, що спеціалізуються у галузі комп'ютерних та інформаційних технологій, взагалі ці питання є необхідною складовою серйозної, якісної освіти.

За можливістю, викладачі знаходять трохи лекційного часу для елементів теорії множин. Щоб це дало необхідний ефект треба значно активізувати самостійну роботу студентів з цього розділу. Керівником даної роботи була поставлена задача розробити систему питань та тестових завдань, яка була б путівником для студентів по відповідному лекційному матеріалу та сприяла б його активному засвоєнню, набуванню студентами необхідних навичок самостійної роботи, прищеплювала б їм елементи математичної культури.

Розроблена нами система питань набула форму завдань для самопідготовки. Питання, позначені зірочкою, доцільно пропонувати для більш глибокого вивчення розділу (наприклад, студентам комп'ютерного фаху). Крім цього нами розроблений комплект (30 шт.) тестових завдань, які

можуть забезпечити здійснення викладачами вихідного контролю, і формат яких значно спрощує їх перевірку.

САМОПІДГОТОВКА 1

- 1.1. Як позначаються множини, елементи множин, належність чи неналежність даного елемента множині? Наведіть приклади множин.
- 1.2. Як геометрично зображуються множини та їх елементи?
- 1.3. Які множини називають класами? Як прийнято позначати класи? Наведіть приклади класів.
- 1.4. Що таке пуста множина? Наведіть приклади.
- 1.5. Що таке універсум? Поясніть на прикладі.
- 1.6. Наведіть приклади завдання множини переліком елементів, характеристичним предикатом, утворюючою процедурою*.
- 1.7. Задайте множину натуральних двозначних чисел, кратних числу шість а) переліком елементів; б) характеристичним предикатом; в) утворюючою процедурою*.
- 1.8. Наведіть приклад завдання пустої множини характеристичним предикатом.
- 1.9. * У чому полягає парадокс Расела? Наведіть приклад.
- 1.10. Сформулюйте означення підмножини, запишіть відповідні позначення, проілюструйте це діаграмою Ейлера-Вена.
- 1.11. Які з наступних записів правильні:
а) $A \in A$; б) $A \subset A$; в) $A \subseteq A$; г) $A \not\subset A$; д) $\emptyset \in A$; е) $\emptyset \subset A$; ж) $\emptyset \not\subset A$?
- 1.12. Запишіть всі підмножини множини $\{a, b, c\}$.
- 1.13. Сформулюйте означення рівності множин.
- 1.14. Нехай $M_1 = \{x \mid x = \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, $M_2 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \operatorname{tg} x = 0\}$. Яке з тверджень $M_1 \subset M_2, M_2 \subset M_1, M_1 = M_2$ вірне?
- 1.15. Що таке потужність скінченної множини і як вона позначається?
- 1.16. * У чому полягає ідея порівняння нескінчених множин?

1.17. Які множини називаються зліченими? Континуальними?

1.18. Найдіть потужність наступних множин:

а) $\{a, b, c, d\}$; б) $\{\{a,b,c\}, \{d\}\}$; в) $\emptyset$; г) $\{\emptyset\}$.

1.19. Поясніть терміни: упорядкована множина, неупорядкована множина, упорядкована пара, упорядкована трійка, упорядкований набір, кортеж.

САМОПІДГОТОВКА 2

1.20. Сформулюйте означення наступних операцій над множинами і для кожної з вказаних операцій наведіть відповідні позначення, діаграми Ейлера-Вена, приклади:

а) об'єднання множин;

б) перетин множин;

в) різниця множин;

г)* симетрична різниця множин;

д) доповнення множини;

1.2. Нехай $A = \{1;2;4;5;7;10\}$, $B = \{2;5;10;11;12\}$. Знайдіть $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, A \Delta B$.

1.22. Нехай $\mathbf{R}$ – Множина дійсних чисел, $\mathbf{K}$ – множина додатних парних чисел. Знайдіть $\mathbf{R} \cup \mathbf{K}, \mathbf{R} \cap \mathbf{K}, \mathbf{R} \setminus \mathbf{K}, \mathbf{K} \setminus \mathbf{R}, \mathbf{R} \Delta \mathbf{K}$.

1.23. Виконайте наступні операції:

$A \cup A, A \cap A, A \setminus A, A \Delta A^*, A \cup \emptyset, A \cap \emptyset, A \setminus \emptyset, A \Delta \emptyset$.

1.24. Нехай $A \subset B$. Виконайте та проілюструйте діаграмами Ейлера-Вена наступні операції: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \Delta B^*$.

1.25. Чи існують такі множини A, B, C , що $A \cap B \neq \emptyset, A \cap C = \emptyset, (A \cap B) \setminus C = \emptyset$?

1.26. Сформулюйте означення декартова добутку множин. Наведіть приклади.

1.27. Як виражається потужність Декартові добутку множин через потужності множин - множників?

- 1.28. Нехай $A = \{x, y\}$, $B = \{a, b, c\}$. Знайдіть $A \times B$ и $B \times A$.
- 1.29. Дайте означення декартова квадрату множини, декартової степені множини. Наведіть приклади.
- 1.30. Знайдіть декартів квадрат множини $E = \{0;1\}$. Наведіть приклади елементів множин A^3 , A^n . Яка потужність останньої множини?
- 1.31. Нехай $A = [1;3]$, $B = [0;2]$. Зобразіть геометрично множини A^2 , B^3 , $A \times B$.

САМОПІДГОТОВКА 3*

- 1.32. Сформулюйте означення булеану множини. Наведіть приклад. Як позначається булеан?
- 1.33. Знайдіть булеан множини $\{0; 1\}$.
- 1.34. Що таке характеристичний вектор (бінарний код) підмножини? Наведіть приклади.
- 1.35. Знайдіть бінарні коди елементів булеану множини $\{a, b, c\}$.
- 1.36. Знайдіть булеан множини $U = \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$. Для кожного з елементів булеану запишіть характеристичний вектор. Для множин, що відповідають векторам $(0;1;1;1)$ и $(1;0;1;0)$, знайдіть об'єднання, перетин, різницю, симетричну різницю та доповнення. Які операції над характеристичними векторами відповідають цим операціям над множинами?
- 1.37. Для множин $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \ \& \ x < 3\}$ та $B = \{y \mid y \in \mathbf{Z} \ \& \ |y| \leq 1\}$ знайдіть: $A \times B$, $|A \times B|$, A^2 , B^3 , булеаны множин A , B , $A \times B$.
- 1.38. Нехай $|A| = n$. Чому дорівнює потужність булеану множини A . Відповідь обґрунтуйте.
- 1.39. Знайдіть потужність булеану множини арифметичних операцій над числами.
- 1.40. У якому разі сімейство підмножин даної множини називають діз'юнктним? Покриттям? Розбиттям? Наведіть приклади.
- 1.41. Нехай $M = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \ \& \ |x| \leq 10\}$. Наведіть приклади сімейств $\varepsilon \subset P(M)$ таких, щоб виконувались умови:

- а) ε – діз'юнктне сімейство, яке не є покриттям;
- б) ε – покриття;
- в) ε – розбиття.

1.42. Що називають алгеброю підмножин? Які при цьому використовуються позначення?

1.43. У чому полягають наступні властивості операцій над множинами:

- а) ідемпотентності об'єднання та перетину?
- б) комутативності об'єднання та перетину?
- в) асоціативності об'єднання та перетину?
- г) дистрибутивності об'єднання та перетину відносно одне одного?
- д) поглинання однієї операції іншою?
- е) властивість „нуля”?
- ж) властивість „одиниці”?
- и) інволютивності заперечення?
- к) правила де-Моргана?

1.44. Доведіть властивості операцій над множинами, які вказані у завданні 1.43.

1.45. Чи має операція Декартові добутку множин властивість комутативності? Асоціативності?

1.46. Доведіть, що для довільних множин A, B, C виконуються рівності:

- а) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$;
- б) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
- в) $(\bar{A} \cup B) \cap A = A \cap B$;

1.47. Доведіть, що $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

1.48. Доведіть, що $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$.

1.49. Доведіть, що $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Даценко Є. В. (студ., 1 курс),
Тригуб В. В. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Овсієнко Ю. І.
Полтавська державна аграрна академія (Полтава, Україна)

ПОБУДОВА КВАДРАТИЧНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ФОРМУЛИ ЗАЛЕЖНОСТІ СЕРЕДНЬОЇ УРОЖАЙНОСТІ ЛЮЦЕРНИ ВІД ГЛИБИНИ ЗРОШЕННЯ ЗАСОБАМИ MS EXCEL

Сучасні тенденції в сільському господарстві все більше переходять у площину цифрово-технологічних інновацій. Зокрема, серед перспективних напрямів діяльності аграрного сектору можна акцентувати увагу на використанні дронів. Їх залучають до планування і контролю етапів сільськогосподарського виробництва, хімічної обробки посівів. Це вимагає впровадження у виробничий процес математичного моделювання агробіологічних явищ [3].

Мета роботи полягає у проведенні порівняльного аналізу різних моделей тренду на прикладі побудови квадратичної інтерполяційної формули залежності середньої урожайності люцерни від глибини зрошення. Завданням дослідження є пошук параметрів моделі тренду, що найбільш вдало описує тенденцію засобами MS Excel.

Тематика математичного моделювання в аграрному виробництві представлена в роботах: В. Вітлінського, А. Гатауліна, О. Іващука, Дж. Франса, Дж. Торнлі та ін. науковців, де основна увага зосереджена на аналізі економіко-математичних моделей. Моделюванню біологічних процесів і явищ у сфері агропромислового виробництва в існуючих публікаціях присвячено матеріали, що вимагають від дослідників застосування потужного математичного апарату і додаткових навичок роботи з комп'ютерними програмами.

Розглянемо на прикладі побудови квадратичної інтерполяційної формули один із прийомів використання трендових моделей для аналізу

агробіологічних процесів. Суть аналізу зводиться до етапів: 1) встановити існування тенденції зміни результативної ознаки від зміни вибраного чинника-аргументу (наявність або відсутність зв'язку між y і x); 2) за умови встановлення наявності зв'язку, визначити, який тип лінії краще всього описує або характеризує його; 3) залежно від типу лінії розраховуються параметри регресійного рівняння.

Деталізуємо процес побудови й аналізу квадратичної інтерполяційної формули залежності середньої врожайності люцерни від глибини зрошення засобами MS Excel. Дані експерименту наведені у таблиці (табл. 1) [1, с. 114]:

Таблиця 1.

Експериментальні дані середньої урожайності люцерни

Глибина зрошення (м)	0	0,305	0,457	0,610	0,762	0,914	1,067	1,219
Середній урожай (т/га)	9,637	13,838	16,803	19,521	22,239	22,981	22,239	20,757

На рисунку 1 прослідковується тенденція зміни результативної ознаки y від зміни аргументу x . Візуальний аналіз форми діаграми розсіювання дає підстави стверджувати, що лінія має параболічну форму.

Одним із показників, що описують якість побудованої моделі є коефіцієнт детермінації (R^2) або величина достовірності апроксимації. З його допомогою можна визначити рівень точності прогнозу: 0,8-1 – якісна модель; 0,5-0,8 – модель прийнятної якості; 0-0,5 – модель неякісна.

Побудуємо на діаграмі розсіювання регресійної функції лінію тренду і помістимо на ній величину достовірності апроксимації (R^2). Її значення відображене на аркуші в області побудови і дорівнює 0,9505, що характеризує апроксимацію, як якісну модель (рис. 1).

Вид діаграми розсіювання найбільш схожий на графік поліноміальної лінії. Визначаємо коефіцієнт детермінації для інших типів ліній і для порівняння значень R^2 , заповнимо таблицю (табл. 2).

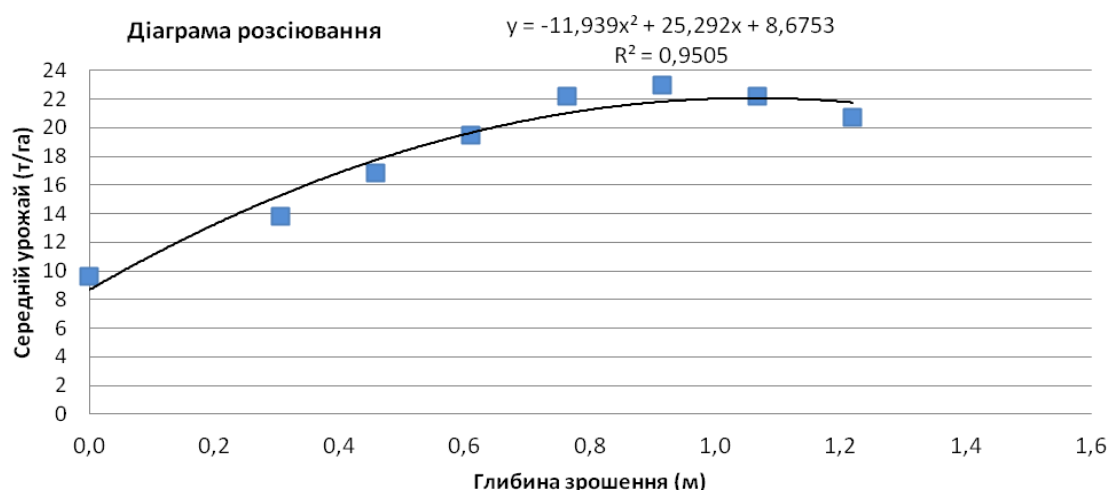


Рис. 1. Діаграма розсіювання регресійної функції залежності.

Лінійна $y = a_1x + a_0$ і квадратична $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ математичні моделі є найбільш поширеними для аналізу агробіологічних процесів і явищ [2, с. 81]. Так, параметр лінійної моделі (табл. 2) $a_1 = 10,448 > 0$ свідчить про наявність прямого рівномірного зв'язку між x і y . Якщо збільшувати глибину зрошення від 0,305 м до 0,457 м, то середня врожайність люцерни збільшиться так само, як і під час збільшення глибини зрошення від 0,610 м до 0,762 м. Щодо параметра $a_0 = 11,536$, то його значення відповідає початковій врожайності люцерни за умови повної відсутності зрошення.

Таблиця 2.

Результати дослідження урожайності люцерни за допомогою моделей тренду

Тип моделей тренду	Рівняння моделей тренду	R^2
лінійна	$y = 10,448x + 11,536$	0,804
поліноміальна лінія 2-го порядку	$y = -11,939x^2 + 25,292x + 8,675$	0,951
поліноміальна лінія 3-го порядку	$y = -20,942x^3 + 26,077x^2 + 8,311x + 9,591$	0,997
поліноміальна лінія 4-го порядку	$y = 19,590x^4 - 65,481x^3 + 58,479x^2 + 0,894x + 9,661$	0,999
експоненціальна	$y = 11,491 \cdot e^{0,661x}$	0,791

Для моделі квадратичної функції параметр $a_2 = -11,939 < 0$ є характеристикою зміни темпу приросту врожайності люцерни залежно від глибини зрошення. Параметр $a_1 = 25,292 > 0$ показує початковий темп приросту врожайності люцерни. Щодо параметра $a_0 = 8,675 > 0$, то його

значення відповідає початковій врожайності люцерни за умови відсутності зрошення. Обчислені за одержаною моделлю значення врожайності люцерни при глибині зрошення 0,610 м і 0,762 м дорівнюють 19,661 т/га і 21,015 т/га відповідно, а при глибині зрошення 0,762 м і 0,914 м – 21,015 т/га і 21,818 т/га відповідно. Отже, приріст урожайності люцерни при збільшенні глибини зрошення на 0,152 м залежить від глибини зрошення і становить 1,355 т/га, у першому випадку і 0,803 т/га у другому. Таким чином, при різній глибині зрошення темп приросту врожайності різний. Глибина зрошення, при якій досягається максимальна врожайність відповідає абсцисі вершини параболи:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{25,292}{2 \cdot (-11,939)} \approx 1,059 \quad (\text{м}), \quad \text{причому,} \quad \text{максимальна} \quad \text{врожайність}$$

становить: $y_0 = y(x_0) = 22,070$ (т/га). Результати наших обчислень відповідають висновкам, одержаним під час проведення експериментальних досліджень, пов'язаних із вивченням водозберігаючих режимів зрошення люцерни у степовій та лісостеповій зонах України [2, с. 46].

Слід зазначити, що лінійна й експоненціальна моделі тренду мають найменші коефіцієнти детермінації R^2 . Ми зосередились на більш детальному аналізі поліноміальної лінії 2-го порядку (табл. 2). Щодо детального аналізу поліноміальних ліній 3-го і 4-го порядку, то його у дослідженнях використовують рідко, оскільки працювати з ними досить складно.

Таким чином, продемонстрований прийом побудови квадратичної інтерполяційної формули залежності середньої врожайності люцерни від глибини зрошення засобами MS Excel свідчить про необхідність поєднання кількох методів дослідження математичних моделей. На практиці доцільною є оцінка значущості коефіцієнтів рівняння, кореляційний аналіз та інші додаткові методи аналізу параметрів моделей.

Анотація. У роботі представлено порівняльний аналіз моделей тренду на прикладі побудови квадратичної інтерполяційної формули залежності середньої врожайності люцерни від глибини зрошення засобами MS Excel.

Ключові слова: діаграма розсіювання, математична модель, коефіцієнт детермінації, лінія тренду.

Abstract. The article presents a comparative analysis of models for trend on the example of constructing a quadratic interpolation formula for dependence of alfalfa average yield on irrigation depth using MS Excel.

Key words: scatter plot, mathematical model, coefficient of determination, trendline.

Література

1. Вища математика у прикладах і задачах для економістів : навч. посіб. / А. М. Алілуйко та ін. Тернопіль : ТНЕУ, 2017. - 148 с.
2. Запороженко В. Ю. Розробка водозберігаючих режимів зрошення люцерни в степовій та лісостеповій зонах України : дис.. канд.. с.-г. наук : 06.01.02. Дніпро, 2017. - 211 с.
3. Сільське господарство в Україні сайт URL: <https://dlf.ua/ua/silске-gospodarstvo-v-ukrayini/> (дата звернення: 05.04.2020).

Девочко О. А. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – ст. викл. Мороз І. І.

Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ВІДСОТКОВА СТАВКА НАЦІОНАЛЬНОГО БАНКУ УКРАЇНИ ЯК ІНСТРУМЕНТ ГРОШОВО-КРЕДИТНОЇ ПОЛІТИКИ

Національний Банк України (НБУ) – це державний інститут, метою діяльності якого є забезпечення цінової та фінансової стабільності банківської системи країни. Для здійснення своїх задач НБУ має різноманітні інструменти впливу. Вибір цих інструментів, визначення сили їх впливу та прогнозування наслідків такого вибору є надзвичайно складною задачею. Відсоткова ставка – це один з інструментів, за допомогою якого Національний банк України встановлює для банків та інших суб'єктів грошово-кредитного ринку орієнтир щодо вартості залучених і розміщених грошових коштів на відповідний період.

Центральний банк – це касовий центр країни, що здійснює нагляд за банківською системою і несе відповідальність за проведення монетарної політики в державі з метою забезпечення стабільного безінфляційного розвитку економіки.

Серед різноманітних функцій центральних банків потрібно виділити основні, без яких неможливе виконання головної мети центрального банку – збереження стабільності національної грошової одиниці; та додаткові, що відповідають рішенню цього завдання. Основні функції, що здійснюються всіма без винятку центральними банками, поділяються на регулюючі, контрольні та обслуговуючі.

До регулюючих функцій відносять: управління сукупним грошовим оборотом; регулювання грошово-кредитної сфери; регулювання попиту та пропозиції на кредит.

Під контрольними функціями розуміють: здійснення контролю за функціонуванням кредитно-банківської системи; проведення валютного контролю.

Обслуговуючі функції здійснюють при: організації платіжно-розрахункових відносин комерційних банків; кредитуванні банківських установ та уряду; виконання центральним банком ролі фінансового агента уряду.

Додаткові функції центрального банку не пов'язані безпосередньо з його головним завданням (збереження стабільності національної грошової одиниці), але сприяють його реалізації. До числа цих функцій відносять керування державним боргом, проведення аналітичних розслідувань та ведення статистичної бази даних, виготовлення банкнот тощо. Функції проведення аналітичних та статистичних досліджень за своїм характером можуть бути досить неоднаковими та нерівнозначними у центральних банках різних країн. Аналіз в області грошово-кредитної та валютної політики в основному базується на даних платіжних балансів. Це обумовлено в деяких країнах (Бельгія, Німеччина, Франція, Нідерланди, Японія) делегуванням центральному банку функції збору та аналізу такого роду даних [1].

У різних країнах існують різні моделі побудови центральних банків та їхньої організаційної структури. У більшості країн центральні банки є державними. В окремих випадках центральний банк не належить державі

(наприклад Федеральна резервна система США, Національний банк Швейцарії) або держава володіє лише частиною капіталу (наприклад у Банку Японії — 55%). Центральний банк країни, незалежно від того, в чий власності він перебуває, керує грошовим обігом та кредитною системою країни. З населенням та діловими підприємствами центральний банк жодних операцій не здійснює.

У США роль центрального банку виконує Федеральна резервна система (ФРС). Вона складається з двох організаційних ланок — Ради керуючих та 12 федеральних резервних банків. Останні виконують функції центральних банків для округів, на території яких вони розташовані. Крім цих банків, членами ФРС є близько 6 тис. комерційних банків. Банки — члени ФРС є найбільшими приватними комерційними банками. До того ж вони є клієнтами одного з резервних банків і користуються його послугами, в тому числі отримують необхідні суми позик.

Рада керуючих ФРС здійснює контроль і нагляд за функціонуванням грошової та банківської систем країни. Сімох членів цієї Ради призначає Президент США за згоди Сенату. Термін їхніх повноважень тривалий (14 років) і розведений у часі: відтак один член Ради змінюється кожні два роки. Членів Ради саме призначають, а не вибирають, щоб відокремити монетарну політику від політики партій.

Європейська система центральних банків (ЄСЦБ) — система до якої входять Європейський центральний банк та центральні банки країн ЄС, створена передусім для забезпечення стабільності цін. Розробляє і проводить узгоджену валютну політику країн учасниць та закордонні валютні операції, а також розрахункові операції в межах платіжного балансу, затверджує банкноти, надає відповідні консультації та ін. Створена згідно з умовами Маастрихтського договору [2].

Основною метою ЄСЦБ, проголошеною у ст. 2 статуту, є підтримування цінової стабільності. Це передбачає створення такої економічної ситуації, коли рівень інфляції не перевищує 2 %. Орієнтиром

кредитно-грошової політики взято саме показник інфляції, а не зміни грошової маси, оскільки в ЄВС існують єдині стандарти вимірювання інфляційних процесів, що збільшує достовірність і полегшує аналіз отриманих даних.

В Україні Центральним банком є Національний банк України (НБУ). Він є найвищою ланкою банківської системи, регулює її діяльність у межах законодавчо наданих йому прав та повноважень, несе відповідальність перед суспільством за функціонування банківської системи загалом.

НБУ був утворений на базі Українського республіканського банку Держбанку СРСР згідно з Постановою Верховної Ради Української РСР "Про порядок введення в дію Закону Української РСР "Про банки і банківську діяльність" від 23 березня 1991 р.

НБУ – це суб'єкт державного управління, що здійснює вплив на банківську систему за наступними напрямками: створення та доповнення нормативно-правової бази, яка регулює діяльність банківської системи України; ліцензування та реєстрація юридичних осіб, що планують надавати банківські послуги в нашій країні; здійснення контроль діяльності банківських установ.

Функції НБУ: емісія грошей та організація їхнього обігу; є кредитором останньої інстанції для комерційних банків; організація розрахунків між банками; обслуговування державного боргу країни; проведення операцій на ринку державних цінних паперів та валютному ринку; видача комерційним банкам ліцензій на здійснення банківських операцій та операцій з іноземною валютою; контроль за діяльністю комерційних банків; визначає напрями розвитку сучасних електронних банківських технологій, створює, координує і контролює електронні платіжні засоби; складає платіжний баланс, здійснює його аналіз та прогнозування; здійснює валютне регулювання і валютний контроль, визначає порядок здійснення платежів в іноземній валюті; забезпечує накопичення та зберігання золотовалютних резервів та здійснення

операцій з ними; організовує інкасацію і перевезення банкнот та інших цінностей; здійснює інші функції в межах Закону "Про НБУ".

Одним із інструментів впливу НБУ є регулювання відсоткової ставки. Як правило, центральні банки мають кілька відсоткових ставок. НБУ, крім облікової, здійснює державне регулювання відсоткових ставок грошового ринку, встановлюючи за своїми операціями такі ставки:

- за кредитами овернайт – відсоткова ставка, за допомогою якої НБУ надає банкам кредити на термін до наступного робочого дня;
- рефінансування – відсоткова ставка, за допомогою якої НБУ надає банкам на визначений строк кредити рефінансування, тобто надає новий кредит для погашення старого;
- за стабілізаційними кредитами – це відсоткова ставка, за допомогою якої Національний банк надає банкам кредити у разі реальної загрози стабільності їх роботи;
- за депозитами овернайт – відсоткова ставка, за допомогою якої Національний банк залучає тимчасово вільні кошти банків на термін до наступного робочого дня;
- ставка залучення тимчасово вільних коштів банків – відсоткова ставка, за допомогою якої НБУ залучає тимчасово вільні кошти банків відповідно до визначених строків понад один робочий день.

Висновки. Однією із державних інституцій, яка приймає участь у фінансовій та грошовій політиці держави, є центральний банк країни. В Україні цю роль виконує Національний банк, який виконує регулюючу, контролюючу, обслуговуючу та стимулюючу функції. Серед інструментів впливу Національний банк України має зокрема можливість регулювання відсоткової ставки НБУ (облікової ставки). Облікова ставка використовується НБУ одночасно як засіб реалізації грошово-кредитної політики та орієнтир ціни на гроші.

Література

- 1.Александрова М.М. Гроші. Фінанси. Кредит.: навч. -метод. посібник. – 2-ге видання, перероблене і доповнене. / М.М. Александрова, С.О. Маслова. – К.:ЦУЛ, 2002. – 336 с.
- 2.Колодізев О. М. Гроші і кредит.: - підручник. / О. М. Колодізев, В.Ф.Колесніченко. – К.:Знання, 2010. – 615 с.
- 3.Вовчак О. А. Кредит і банківська справа.: підручник. / О. А. Вовчак, Н. М. Руцишин, Т. Я. Андрейків.: – К.:Знання, 2008. – 546 с.

УДК 378+004.42

Дущенко О. С., ст.викл.

Ізмаїльський державний гуманітарний університет.(Ізмаїл, Україна)

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАВДАНЬ НА ЗАНЯТТЯХ З ПРОГРАМУВАННЯ МАЙБУТНІМИ ВЧИТЕЛЯМИ ІНФОРМАТИКИ І МАТЕМАТИКИ

Професія «програміст» є затребованою в усьому світі, тому майбутні фахівці намагаються досягти успіхів у програмуванні. Працювати не тільки вчителями, а й програмістами прагнуть майбутні вчителі інформатики і математики.

Вивчаючи програмування, у студентів з’являється можливість отримати необхідні знання, уміння, навички для розробки складних програм. Так, під час заняття з програмування майбутні вчителі інформатики і математики створюють у середньому від 3 до 5 програм у залежності від теми заняття, це може бути робота з арифметичними і логічними виразами чи з рядковими і символьними даними тощо. Розроблюючи програми, студенти проявляють творчість, адже кожен індивідуально бачить інтерфейс програми і навіть процес написання коду. Деякі студенти проявляють нестандартний підхід до написання програмного коду.

Під час навчання у закладах вищої освіти майбутні вчителі інформатики і математики стикаються з розв’язуванням математичних завдань, у тому числі й на заняттях з програмування. Наведемо деякі приклади програмних проєктів, які створюють студенти на таких заняттях (на прикладі Ізмаїльського державного гуманітарного університету).

Завдання розв’язані у вигляді консольних додатків (завдання 1, 3, 4) і Windows-додатку (завдання 2) у середовищі програмування Microsoft Visual Studio 2010 Express. При розробленні програмних проєктів використано цикл з лічильником (завдання 1-3), вкладені цикли (завдання 3), функції (завдання 4).

Завдання 1. Увести натуральне число n , дійсне число x та обчислити

$$s = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{x+1}}{2x+1}. \text{ Розв'язування представлено на рис. 1.}$$

```
#include "stdafx.h"
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;

int main(array<System::String ^> ^args)
{
    setlocale(0, ".1251");
    double x, u, s=0;
    int i, n;
    cout<<"Уведіть ціле значення n=";
    cin>>n;
    cout<<"Уведіть значення x=";
    cin>>x;
    cout<<"\nРезультат:\n";
    for(i=1; i<=n; i++)
    {
        u=(pow(-1,x+1.))/(2*x+1);
        cout<<"Доданок "<<i<<" = "<<u<<endl;
        s+=u;
    }
    cout<<"Сума = "<<s<<endl;
    system("pause>>void");
    return 0;
}
```

Уведіть ціле значення n=20
Уведіть значення x=4

Результат:
Доданок 1 = -0.111111
Доданок 2 = -0.111111
Доданок 3 = -0.111111
Доданок 4 = -0.111111
Доданок 5 = -0.111111
Доданок 6 = -0.111111
Доданок 7 = -0.111111
Доданок 8 = -0.111111
Доданок 9 = -0.111111
Доданок 10 = -0.111111
Доданок 11 = -0.111111
Доданок 12 = -0.111111
Доданок 13 = -0.111111
Доданок 14 = -0.111111
Доданок 15 = -0.111111
Доданок 16 = -0.111111
Доданок 17 = -0.111111
Доданок 18 = -0.111111
Доданок 19 = -0.111111
Доданок 20 = -0.111111
Сума = -2.22222

Рис. 1. Приклад коду і результату виконання проєкту завдання 1

Завдання 2. Дослідити функції $\sin(x)/x^2$, $\cos(x)/x$ на проміжку $x \in [0,5;11]$ з кроком $h=0,3$ [1, с. 66]. Отримуємо такий результат (рис. 2):

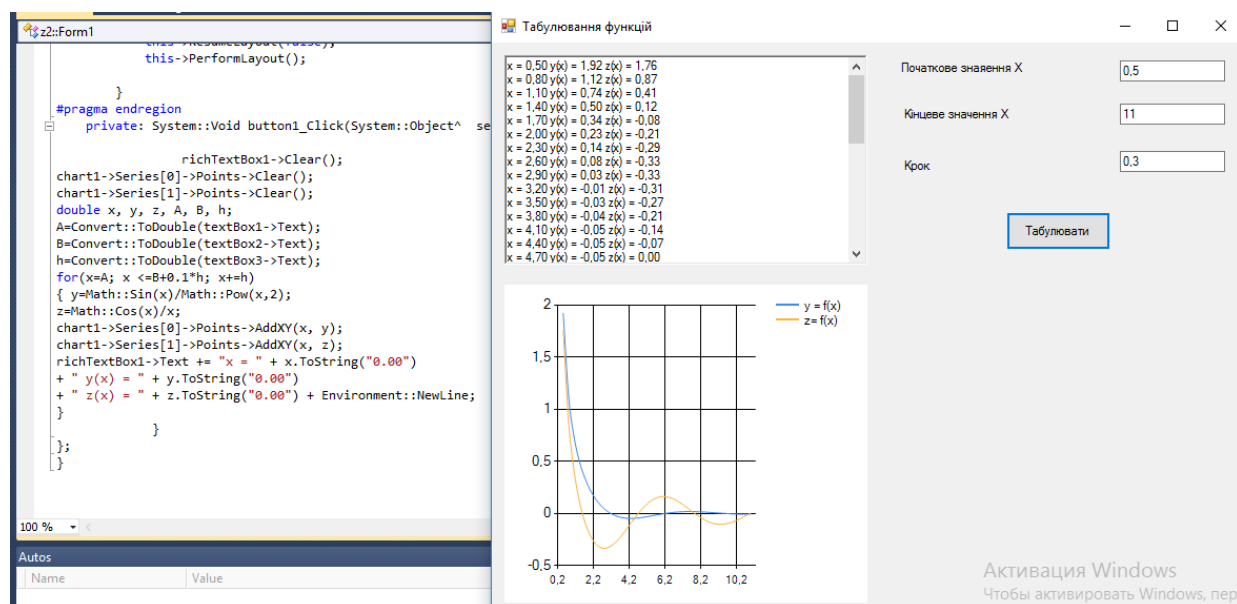


Рис. 2. Приклад коду і результату виконання проєкту завдання 2

Завдання 3. Створити проєкт для обчислення функції:

$$S = \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^{k+1}}{(k-5)} \prod_{i=1}^{k+1} \frac{i}{i^2-16} [1, \text{с. 77}]. \text{ На рис. 3 наведено результат.}$$

The screenshot shows a C++ program in a code editor on the left and its output in a terminal window on the right. The program calculates the sum S for a given k. The user enters k = 14, and the program outputs the sum S = -0.0266667.

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(array<System::String ^> ^args)
{
    setlocale(0, ".1251");
    int k, n, i;
    cout<<"Уведіть значення k = ";
    cin>>k;
    double S = 0, p;
    for (k = 0; i <= n; k++)
    if ( k != 5)
    { p = 1;
    for(i = 1; i <= k+1; i++)
    p*=i/(pow(i, 2.)-16);
    S += (pow((-2.),k+1))/(k-5.) * p;
    }
    cout<<"\nСума = "<<S;
    cin.get();
    cin.get();
    return 0;
}
```

Уведіть значення k = 14
Сума = -0.0266667

Рис. 3. Приклад коду і результату виконання проєкту завдання 3

Завдання 4. Створити функцію обчислення $\frac{\sqrt{x}+x}{y+\sqrt{y}}$ та визначити $\frac{\sqrt{5}+5}{7+\sqrt{7}} +$

$$\frac{\sqrt{12}+12}{15+\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{22}+22}{32+\sqrt{32}} [1, \text{с. 99}]. \text{ Програмний проєкт виглядає так (рис. 4):}$$

The screenshot shows a C++ program in a code editor on the left and its output in a terminal window on the right. The program defines a function f(a, b) and calculates the sum of three such functions with specific arguments. The result is displayed as x = 2.27834.

```
#include "stdafx.h"
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;

double f(double a, double b)
{ return (sqrt(a)+a)/(b+sqrt(b));
}

int main(array<System::String ^> ^args)
{
    setlocale(0, ".1251");
    double x = f(5,7) + f(12,15) + f(22,32);
    cout<<" Результат x = "<< x << endl;
    system ("pause>>void");
    return 0;
}
```

Результат x = 2.27834

Рис. 4. Приклад коду і результату виконання проєкту завдання 4

Вивчаючи програмування, майбутні вчителі інформатики і математики розробляють програми на розв'язання математичних завдань. Створення таких програм можна використовувати в подальшій професійній діяльності,

зокрема майбутні вчителі математики можуть продемонструвати дослідження функцій на уроках математики. Таке створення власних програмних продуктів подекуди може замінити необхідне програмне забезпечення, особливо при розв'язуванні математичних завдань. Адже створені програми можна використовувати для перевірки розрахунків, зроблених самостійно.

Таким чином, створюючи програмні проєкти для розв'язування математичних завдань, студенти закріплюють знання, уміння, навички з математики та формують знання, уміння, навички з програмування.

Анотація. У статті наведено приклади математичних завдань і програмних проєктів до них на мові програмування C++, які розв'язують майбутні вчителі інформатики і математики на заняттях з програмування.

Ключові слова: програмування, математичні завдання, програмні проєкти на C++.

Abstract. The article provides examples of mathematical problems and software projects for them in the C ++ programming language, which are solved by future teachers of computer science and mathematics in programming classes.

Keywords: programming, mathematical problems, software projects in C ++.

Література

1. Трофименко О. Г. Основи програмування. Базові алгоритми : метод. вказівки для лаб. і практ. робіт / Трофименко О. Г., Прокоп Ю. В., Швайко І. Г., Буката Л. М. Ч. 1. Одеса : ВЦ ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2014. - 108 с.

ВПРОВАДЖЕННЯ ТЕХНОЛОГІЇ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ ПРИ ПІДГОТОВЦІ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Сучасні тенденції розвитку суспільства вимагають формування у здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей професійних компетентностей, пов'язаних із розумінням основних законів дисциплін фізико-математичного циклу, отриманням і систематизацією знань і навичок їх подальшого поповнення, умінь використання сучасних джерел інформації і т.д. Одним із засобів, що забезпечують досягнення прикладної та практичної спрямованості навчання, є використання комп'ютерного моделювання фізичних процесів. Завдяки застосуванню математичного програмного забезпечення для математичних розрахунків та моделювання, таких як Mathcad, Maple, MatLab, Microsoft Excel і т.д., можна не лише посилити міждисциплінарні зв'язки [1], але й значною мірою збільшити мотивацію та пізнавальний інтерес студентів до навчання [2] та полегшити сприйняття складної інформації за допомогою її візуалізації [3].

Метою дослідження є візуалізація розв'язання задач статистичної фізики при підготовці здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей шляхом моделювання в програмі MathCad.

Розглянемо приклад розв'язання задач на знаходження швидкостей (середньої, середньоквадратичної та найбільш імовірної) молекул ідеального газу.

Задача. Визначити як зміниться середньоквадратична швидкість молекул водню та повітря при зростанні температури від 0 до 1600 К.

Розв'язання. Швидкості молекул ідеального газу знайдемо за формулами:

$$\langle V_{\kappa} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

$$\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

$$V_{\epsilon} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

де T – термодинамічна температура, M – молярна маса, R – молярна газова стала. З формули видно, що при збільшенні температури середня квадратична швидкість молекул збільшується.

Використовуючи пакет програм MathCad, будуємо графік залежності швидкості від температури (рис. 1).

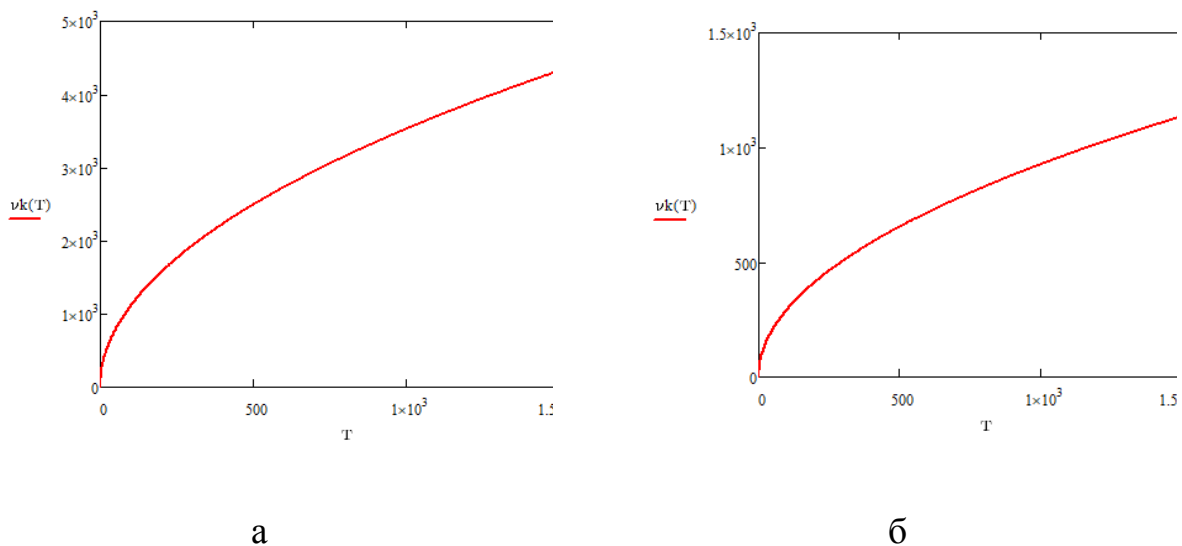


Рис. 1. Графік залежності середньоквадратичної швидкості від температури: а) для молекул водню; б) для молекул повітря.

В якості додаткового завдання можна побудувати графіки залежностей середньої, середньоквадратичної та найбільш імовірної швидкостей від температури (рис. 2). Три характерних значення швидкості співвідносяться між собою в пропорціях $V_{\epsilon} : \langle V \rangle : \langle V_{\kappa} \rangle = 1 : 1.13 : 1.22$, що наглядно відображено на графіках – найменшою зі швидкостей є найбільш імовірна, а найбільшою – середня квадратична.

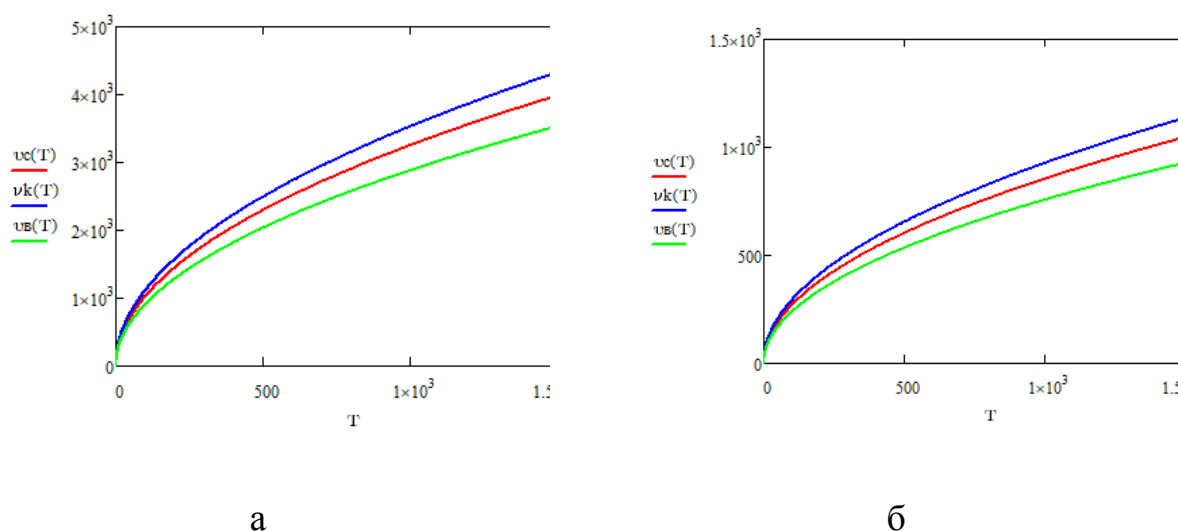


Рис. 2. Графіки залежностей середньої, середньоквадратичної та найбільш імовірної швидкостей від температури: а) для молекул водню;

б) для молекул повітря.

Впровадження наведеного підходу в навчальний процес призводить до більш глибокого розуміння дисципліни та формування фундаментальних знань, розкриває нюанси і можливості застосування програмних пакетів, розвивається здатність вирішувати прикладні задачі та практичні проблеми.

Анотація. У роботі запропоновано застосування технології візуалізації розв'язання задач із теми «Статистична фізика» при вивченні загального курсу фізики здобувачами вищої освіти інженерних спеціальностей шляхом моделювання в програмі MathCad. Наведено приклад розв'язання задач на знаходження швидкостей (середньої, середньоквадратичної та найбільш імовірної) молекул ідеального газу.

Ключові слова: моделювання фізичних процесів, програма MathCad, швидкість молекул ідеального газу.

Abstract. The paper proposes the application of visualization technology for solving problems on the topic of «Statistical Physics» in the study of the general course of physics by graduates of engineering specialties by modeling in the program MathCad. An example of solving problems on finding the velocities (mean, root mean square and most probable) of an ideal gas molecules is given.

Key words: modeling of physical processes, MathCad program, velocity of ideal gas molecules.

Література

1. Мястковська М. О. Комп'ютерне моделювання як ефективний метод посилення міждисциплінарних зв'язків. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка*. Серія педагогічна. 2014. № 20. С. 289-291.

2. Дяденчук А. Ф., Халанчук Л. В. Застосування середовища Mathcad у загальному курсі фізики при підготовці фахівців інженерних спеціальностей. *Інженерні та освітні технології*. 2020. Т. 8, № 4. С. 40–50. doi: <https://doi.org/10.30929/2307-9770.2020.08.04.04>
3. Дяденчук А. Ф., Халанчук Л. В. Візуалізація задач диференціального числення при підготовці студентів інженерних спеціальностей. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених «Класичні та прикладні математичні проблеми у наукових дослідженнях здобувачів вищої освіти і молодих вчених: історичний та сучасний аспекти» (м. Харків, Україна, 9-10 квітня 2020 р.). Харків : ХНАДУ. 2020. С. 114-117.

УДК 539.3 + 519.85 + 519.876.5

Жушман В. В. (аспірант)
Науковий керівник – доц. Зайцева Т. А.
*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
(Дніпро, Україна)*

СУЧАСНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ КЛАСИЧНИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ДЕФОРМОВАНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Як загально відомий факт є визнання того, що будь якій країні світу для повноцінного існування необхідно підтримувати постійний розвиток фундаментальних наук. Взагалі фундаментальні науки мають на меті пізнання матеріальних основ і об'єктивних законів руху і розвитку природи, суспільства і мислення як таких, що не мають можливого практичного використання. Як результат фундаментальні науки часто називають «чистими» науками. Але ж фундаментальні науки несуть в собі дух дослідження, пошуків істини. Фундаментальні дослідження спрямовані на розширення наукових знань, вказують шляхи наукового пошуку, створюють базу для прикладних досліджень. Саме фундаментальні дослідження поглиблюють наші знання і розуміння природи. Взагалі в усьому світі виконання фундаментальних досліджень вважають одними з головних завдань науковців. Це систематичні і часом рутинні дослідження у найрізноманітніших галузях.

Визнано, що технічний прогрес значною мірою залежить від фундаментальних наук, а саме математики і теоретичної фізики. Сумісна

наукова робота у цих галузях знань дуже часто формує глибокі концепції, важливість яких виходить далеко за межі суто теоретичних інтересів.

Дослідження механіки контактної взаємодії між тілами в наш час є надзвичайно актуальною темою, особливо при розрахунках міцності та поведінки під дією зовнішніх сил. Механіка контактної взаємодії охоплює надзвичайно широкий спектр задач, від розрахунку конструкційної міцності споруд до застосування в наносистемах. Початок дослідження контактних задач було зроблено Г. Герцем [1] та Ж. Буссінеском [2] наприкінці XIX століття. Г. Герц розглянув контакт двох тіл, які обмежені поверхнями другого порядку. Його роботи мають за основу ідеалізований підхід до проблеми, що відповідає і загальному підходу у класичній теорії пружності.

На початку минулого століття в роботах С.А. Чаплигіна, О.М. Динника та інших відбулося розвинення досліджень Г. Герца [3]. З середини 50-х років минулого століття багато робіт таких вчених як Н.І. Мусхелішвілі, І.Н. Векуа, Н.П. Векуа, С.Г. Міхліна, Д.І. Шермана, Л.О. Галіна, А.І. Каландія, Г.М. Савіна, А.І. Лур'є та багатьох інших присвячено саме розв'язанню контактних задач. За методом, що розроблено О.М. Гузем [4], побудовано точні розв'язки задачі для пружного півпростору з початковими напруженнями при вдавненні пружного штамп, для якої побудовано розв'язки відповідних задач без початкових напружень. Розв'язанню контактних задач для тіл без початкових напружень присвячені роботи, огляд яких приведено в [5]. В роботі В.І. Мосаковського, [6] отримано розв'язок задачі про кільцевий штамп. Саме застосування потенціалу до змішаних крайових задач теорії пружності властиво роботам різних фахівців в цій галузі – В.І. Мосаковському [7], С.Ф. Шишкановій [8].

І сьогодні розв'язання більшості задач контактної взаємодії майже неможливо зробити в аналітичному вигляді. Аналітично вони можуть бути розв'язані лише в окремих випадках. Тож очевидним є застосування чисельних методів. Одним із таких методів є метод скінченних елементів, який дозволяє чисельно розв'язувати диференційні рівняння у частинних

похідних та інтегральні рівняння, які виникають при розв'язанні задач механіки. Даний метод широко використовується для рішення багатьох задач прикладної фізики і насамперед для розв'язання задач механіки деформованого твердого тіла.

Застосування чисельних методів значною мірою розширює можливості моделювання, але має значну трудомісткість отримання результатів моделювання. Досить складно представити моделювання будь-якого складного процесу без використання сучасних технологій. Однією з таких технологій є системи автоматизованого проектування, тобто організаційно-технічна система, призначена для автоматизації процесу проектування та використанні обчислювальної техніки. На даний момент існує велика кількість CAE – систем в яких застосовуються методи скінченних елементів: ANSYS, ABAQUS, ADAMS, Dytran, MARC, NASTRAN, LS-DYNA, COSMOS. Такі програмні комплекси включають в себе ряд програм, орієнтованих на розв'язок різни завдань, і відрізняються функціональністю і спеціалізацією. Різні модулі дають можливість проводити аналіз міцності конструкцій, теплопровідності, динаміки рідини і газу, акустичних хвиль і електромагнітних полів. Між системами CAE (Computer Aids Engineering) і CAD (Computer Aided Design) існує інтеграція та передбачено експорт та імпорт геометричних моделей. CAD/CAM (системи автоматичного виробництва - Computer Aids) /CAE – системи пройшли шлях від порівняно простих креслярських додатків до інтегрованих програмних комплексів. Одним із найбільш популярних для розв'язання таких задач є програмний комплекс ANSYS. ANSYS – це достатньо універсальне програмне забезпечення для скінченно-елементного аналізу, що на протязі багатьох років неперервно розвивається. Широкий спектр можливостей даного продукту зробив його популярним серед спеціалістів у різних сферах інженерних розрахунків. Він дає можливість розв'язувати саме контактні задачі механіки на новому рівні. В ньому, наприклад, створено спеціальні скінченні елементи для моделювання зон контакту, що розширює можливості

у рішенні стаціонарних, нестаціонарних, статичних, динамічних, лінійних та нелінійних просторові задачі механіки деформованого тіла, тощо. Можна вважати, що тенденціями сьогодення у розв'язанні класичних задач механіки деформованого твердого тіла є застосування комп'ютерної техніки і осучаснених чисельних методів.

Анотація. *Стаття присвячена стислому огляду проблемних питань розв'язання фундаментальних задач теорії пружності – контактних. Обґрунтовано застосування метода скінченних елементів для отримання рішень таких задач.*

Ключові слова: *механіка, контактна задача, теорія пружності, метод скінченних елементів.*

Abstract. *The article is devoted to a brief overview of the problematic issues of solving the fundamental problems of the theory of elasticity, which are the contact problems. The application of the finite element method to obtain solutions of such problems is substantiated.*

Key words: *mechanics, contact problem, elasticity theory, finite element method.*

Література

1. Hertz H. Über die Berührung bester elastischer Körper // Gesammelte Werke Leipzig.– 1895.– Bd. 1.– S. 179-195.
2. Boussinesque J. Applications des potentiels a l'étude de l'équilibre et d. mouvement des solides élastiques. 1885
3. Динник А.Н. Избранные труды / Динник А.Н. – К.: Изд-во АН УССР, 1952.– Т. I.– 151 с.
4. Гузь А.Н. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика.– 1984.– Т.20, № 8.– С. 3-11.
5. Гузь А.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш – К.: Вища школа, 1982.– 352 с.
6. Моссаковский В.И. Контактные задачи математической теории упругости / В.И. Моссаковский, Н.Е. Качаловская, С.С. Голикова. –К.: Наук. думка, 1985. –175 с.
7. Моссаковский В.И., Ковура А.Б. Об одном способе решения задачи теории потенциала и его приложения в теории упругости //Докл. АН СССР.- Сер.А.- 1976.- №1.- С.44-47.
8. Шишканова С.Ф. О вдавливании в упругое полупространство эллиптического штампа со скругленным краем / С.Ф. Шишканова // Изв. АН СССР. Мех. тв. тела, 1987. –№3. –С. 77-80.

Карпішен Б. С. (аспірант, 1 рік навчання)
Науковий керівник - проф. Ярхо Т. О.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

НЕЧІТКА ЛОГІКА ЯК ОСНОВА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У СУЧАСНИХ АВТОМОБІЛЬНИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ

Сучасні інноваційні технології розвиваються досить швидко і поступово імплементуються у всі сфери життя. Вони дозволяють швидше, з більшою точністю та з меншими помилками, ніж людина, виконувати прості і складні операції.

Відомо, що помилки в управлінні транспортними засобами часто призводять до загибелі як водіїв, так і інших учасників дорожнього руху. Тому, у сучасному світі висувається все більше вимог до конструкції автомобілів та електронних систем, що відповідають за їхнє безпечне і комфортне управління. Для полегшення роботи водія використовуються різні вимірювальні прилади, сенсори, радары, що складають систему допомоги водієві. Вони виконують окремі функції, які у сукупності дозволяють мінімізувати людський фактор і, таким чином, зменшити кількість аварійних ситуацій.

Ускладнення системи управління потребує створення відповідних математичних моделей і використання продуктивного математичного апарату. Синтез повної математичної моделі руху автомобіля є досить складною проблемою. Адже формалізувати велику кількість взаємозв'язків і технічних рішень досить проблематично. Основу розв'язання зазначеної комплексної проблеми складає нечітка логіка [1, с.1].

Автором терміна «нечітка логіка» є американський математик і логік, засновник теорії нечітких множин, професор Каліфорнійського університету Лотфі Заде. У 1965 р. він опублікував статтю під заголовком «Fuzzy sets» («Нечіткі множини»), яка дала поштовх новому науковому напрямку. Основна ідея Л. Заде полягала в тому, що реальні людські міркування, що спираються на природну мову, не можуть бути описаними в рамках

традиційної класичної математичної логіки. Введення нечітких множин, класів з неточно визначеними межами, забезпечило основу для подальшого розвитку більш гнучкого підходу до аналізу і моделювання складних систем [2, с.8].

У 1975 р. англійський математик М. Мамдані розробив і опублікував методику управління двигуном парової турбіни на основі нечіткої логіки. У кінці вісімдесятих застосування нечіткої логіки викликало справжній бум творчої активності в Японії, оскільки відповідні методи управління знайшли широке застосування у побутовій техніці [3, с.4].

У системах управління з використанням нечіткої логіки зв'язок між входом і виходом динамічних процесів описується набором правил, які дозволяють вносити досвід експерта (людини – оператора, особи, яка приймає рішення) в схему управління, що розробляється.

На відміну від стандартної логіки, яка зводиться до двох бінарних станів (1/0 Так/Ні тощо) нечітка логіка дозволяє визначати проміжні значення між стандартними оцінками [4, с.3]. Ключовим поняттям нечіткої логіки є поняття нечіткої множини. Наведемо його означення.

Починаючи розв'язання будь-якої математичної задачі, перш за все, визначають множину елементів, які будуть розглянуті в ній (U). У рамках даної задачі твердження $x \in U$ є завжди істинним. Усі множини, що розглядаються у даній задачі, є підмножинами U . У класичній теорії множин для будь-якого елемента $u \in U$ можна однозначно встановити, яке з двох висловлювань є істинним, а яке хибним:

$$u \in A \text{ або } u \notin A.$$

Характеристичною функцією $\mu_A(u)$ множини A називають функцію вигляду

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1, & u \in A \\ 0, & u \notin A \end{cases}, u \in U.$$

У випадку нечітких множин припускають, що характеристична функція може приймати значення на відрізку $[0,1]$. Отже, теорія нечітких множин базується на понятті часткової приналежності до множини. В теорії нечітких

множин характеристична функція називається функцією приналежності, а її значення – ступенем приналежності елемента до нечіткої множини.

За означенням, нечітка множина $\bar{A}$ являє собою пару $\{U, \mu_{\bar{A}}(u)\}$, де $\mu_{\bar{A}}(u)$ – функція приналежності нечіткої множини $\bar{A}$ із значеннями на відрізку $[0,1]$ [5, с. 10].

Найбільше розповсюдження у застосуваннях, пов'язаних з Fuzzy-регулюванням, у системах технічної діагностики, а також прийняття рішень отримали трикутні та трапецеподібні функції приналежності, що є кусково-лінійними функціями, як ті, що потребують невеликих об'ємів розрахунків для їхньої обробки, і дозволяють виконувати необхідні об'єми розрахунків у цілочисельній арифметиці [2, с.19, 4, с.4].

Функція приналежності трикутної форми (рис.1) може бути заданою аналітичним виразом

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, & x > b; \\ \frac{x-a}{c-a}, & a \leq x \leq c; \\ \frac{b-x}{b-c}, & c < x \leq b. \end{cases}$$

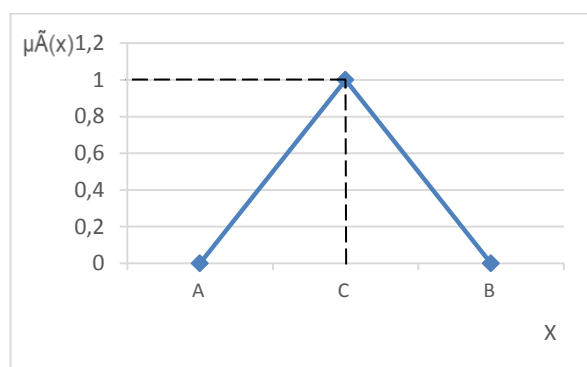


Рис. 1

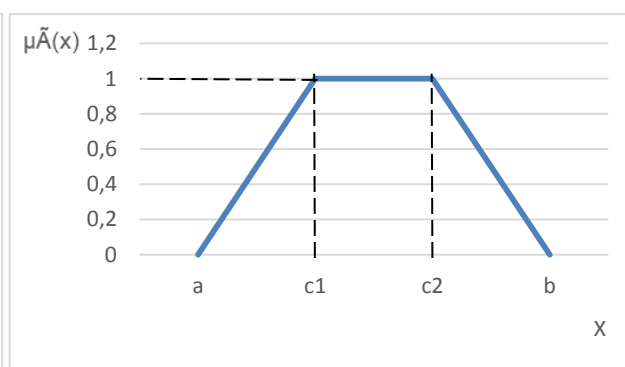


Рис.2

Функція приналежності трапецієподібної (рис.2) може бути заданою аналітичним виразом

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a, & x > b; \\ 1, & c_1 \leq x \leq c_2; \\ \frac{x-a}{c_1-a}, & a \leq x \leq c_1; \\ \frac{b-x}{b-c_2}, & c_2 < x \leq b. \end{cases}$$

Процес обробки нечіткої логіки складається з трьох частин (рис.3) [3, с.9]:

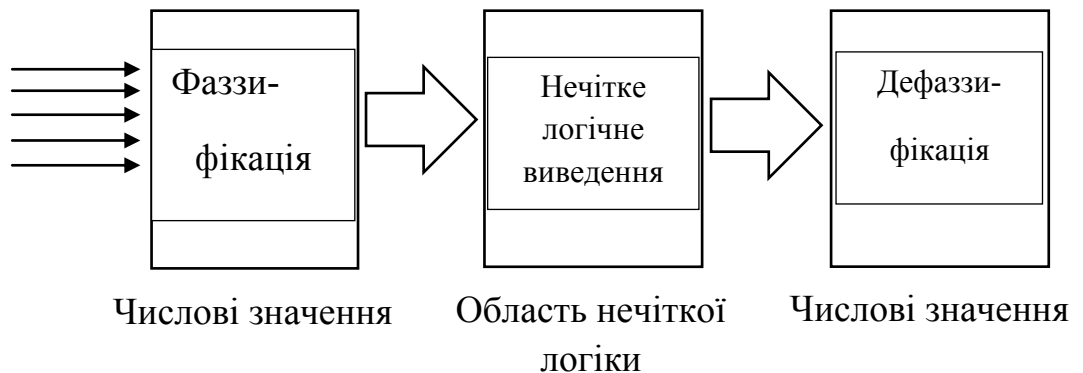


Рис.3 Процес обробки нечіткої логіки

Першим етапом роботи системи обробки нечіткої логіки є процес фаззифікації вхідних даних. У контексті нечіткої логіки під фаззифікацією розуміється визначення ступеня приналежності змінної до нечіткої множини [3, с.7].

Наприклад, якщо поточне значення «вхідної» змінної дорівнює 4, то вона належить множині «низький рівень» із ступенем приналежності 0,2 (рис.4).

Це є результатом фаззифікації.

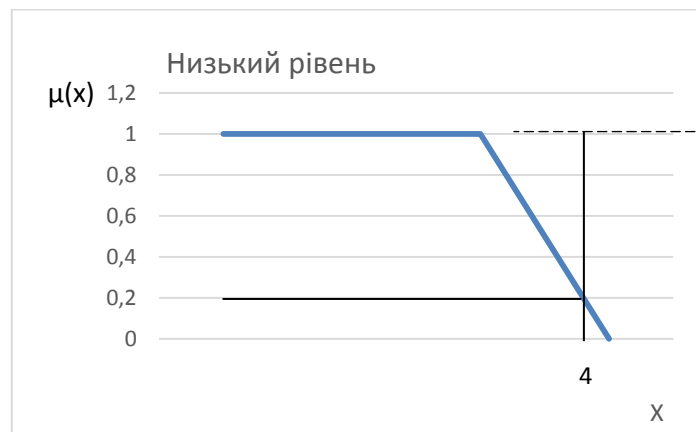


Рис. 4 Підготовка задачі для розв'язання методами нечіткої логіки – фаззифікація

Отже, метою етапу фаззифікації є перетворення вхідних значень змінної, виражених у вигляді дійсних чисел, в терми відповідних лінгвістичних змінних, які представлено нечіткими множинами.

На практиці можливий діапазон зміни змінної розбивається на інтервали, що відповідають різним лінгвістичним термам. Наприклад: при розбитті величини визначеної далекоміром дистанції до перешкоди можливими термами є: «дуже близько», «близько», «нормально», «далеко» (рис.5):

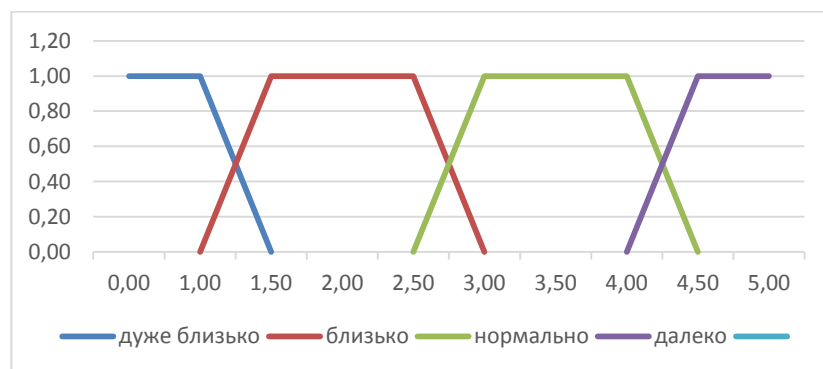


Рис.5 Розбиття значень дистанції до перешкоди

Розглянемо процес фаззифікації на цьому прикладі. Нечітка множина дистанції визначається величинами «дуже мала», «мала», «нормальна», «велика» відстаней, отриманих від датчика, розташованого у кормовій частині автомобіля, у діапазоні $[0, y_{max}]$, де y_{max} є максимальною дистанцією роботи далекоміра. Нехай нечітка множина A_i визначає діапазони дистанцій: $A_1 = [0m, 1.5m]$, $A_2 = [1m, 3m]$, $A_3 = [2.5m, 4.5m]$ і $A_4 = [4m, 5m]$, відповідно.

Нехай у деякий момент часу t величина $y = 4.2m$. Тоді це значення належить двом термам: «нормально» і «далеко».

На другому етапі обробки нечіткої логіки (рис.3) Fuzzy-логічні виведення, моделюючи мислення людини, можуть дати можливість робити чіткий висновок із нечітких передумов [2, с.156].

На останньому етапі логічного виведення, вихідна нечітка множина є вже визначеною, проте вона не може бути безпосередньо використаною для

надання точної інформації оператору або для управління виконавчим механізмом. Необхідно здійснити перехід із «світу нечіткої логіки» в «реальний світ»[3, с.12]. Цей етап називається дефазифікацією.

Процес обробки нечіткої логіки реалізовано у статті[1]. Розглянуто принцип роботи систем управління з використанням нечіткої логіки на прикладі переключення передач в трансмісії автомобіля. У якості вхідних змінних узяті обороти колінчастого вала двигуна внутрішнього згорання (об/хв) і швидкість автомобіля (км/год). Вихідна величина – це сигнал про необхідність переключити передачу (підвищену або знижену) або відсутність такої необхідності.

Висновок. Однією із світових тенденцій автомобілебудування є імплементація в систему управління елементів нечіткої логіки. Нечітка логіка є теоретичним механізмом, що дозволяє підвищити ступінь автоматизації управління автомобілем, завдяки реалізації принципів, що не допускають обробки класичною двозначною логікою. У роботі проаналізовано актуальність застосування нечіткої логіки у сучасних автомобільних системах управління. Розглянуто окремі аспекти теорії нечіткої логіки, проаналізовано трьохетапний процес нечіткого виведення. Пропонується продовження наукового дослідження у напрямі подальшої конкретизації кожного із зазначених етапів в частині застосування до вирішення конкретних практичних задач автомобільних систем управління.

Література

1. Антипов С. Нечеткая логика и возможности ее применения в системах управления современного автомобиля / С. Антипов, Ю. Дементьев, А. Калинин. // Материалы международной научно-технической конференции ААИ «Автомобиле- и тракторостроение в России: приоритеты развития и подготовка кадров», посвященной 145-летию МГТУ «МАМИ». – 2010. – С. 11–20.
2. Зак Ю. А. Принятие решений в условиях нечетких и размытых данных: Fuzzy-технология. / Юрий Александрович Зак. – Москва: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2013. – 352 с.
3. Шеври Ф. Нечеткая логика / Ф. Шеври, Ф. Гели. // Schneider Electric. – 2009. – №31. – С. 4–20.
4. Ткачов О. Ю. Математичні основи нечіткої логіки та актуальність її застосування у технічних, технологічних і транспортних процесах / О. Ю. Ткачов // Класичні та

прикладні проблеми у наукових дослідженнях здобувачів вищої освіти і молодих вчених: історичний та сучасний аспекти : матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених. – Харків: ХНАДУ. – 2020. – С. 310-317..

5.Коньшева Л.К. Основы теории нечетких множеств: учебное пособие/ Л.К. Коньшева, Д.М. Назаров. – СПб: Питер, 2011.– с.192.

УДК 631.3.07

Кушнір Д. В. (студ., 1 курс)

Герасименко Р. П. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – ст. викл. Рижкова Т. Ю.

Полтавська державна аграрна академія (Полтава, Україна)

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАЛЕЖНОСТІ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ПОКАЗНИКІВ УНІВЕРСАЛЬНО-ПРОСАПНИХ ТРАКТОРІВ ВІД РІЗНИХ ВИДІВ ПОЛЬОВИХ РОБІТ

Сучасні тенденції розвитку аграрної сфери спрямовані на діяльність великих агрохолдингових компаній, зокрема, за рахунок постійного оновлення машинно-тракторного парку. Але в умовах роботи малих та середніх аграрних підприємств такі поновлення потребують значних фінансових витрат. Невисокі масштаби виробництва сільськогосподарської продукції такими фермерськими господарствами не дозволяють їм придбати сучасну, часто не дешеву, техніку, тому перед фермерами стоїть завдання підтримувати на високому техніко-експлуатаційному рівні наявний машинно-тракторний парк.

Метою нашого дослідження стало з'ясування експлуатаційних особливостей застосування тракторного парку не нової техніки малими фермерськими господарствами та обґрунтування їх показників в умовах різних видів польових робіт.

Одним з основних машино-тракторних агрегатів є трактор, раціональне використання якого як самостійної одиниці, так і в комплекті з причіпними або навісними знаряддями, відіграє важливу роль у забезпеченні оптимальних експлуатаційних характеристик, зокрема, енергетичні показники: ефективна потужність двигуна та потужність, яка витрачається

на тягу робочої машини і роботу її робочих органів, експлуатаційна вага, тягове зусилля трактора, величину буксування ходового апарату [1].

Ефективність використання трактора зростає, коли тяговий опір буде відповідати зоні максимального тягового ККД, співвідношення між тяговим зусиллям і тяговою потужністю трактора є основними для визначення експлуатаційних показників трактора. До уваги взято використання тракторів на різному ґрунтовому фоні, зокрема: сухий і вологий ґрунт, стерня, культивоване (чи зоране) поле, де, крім тягових властивостей трактора, важливими є показники зчеплення трактора та коефіцієнт опору коченню [1].

Для досліджень нами обрано два варіанти універсально-просапних тракторів, що використовуються зараз малими фермерськими господарствами, а саме: трактори МТЗ-82.1 та ЮМЗ-8244.2 [2]. Відповідно до опитування власників вищезазначених тракторів, вони зарекомендували себе як витривалі в експлуатації та практичні у ремонтному обслуговуванні, яке можна проводити в межах самого господарства без необхідності постійного ТО в сервісних центрах, а значить не втрачати час на простій у роботі.

Для аналізу експлуатаційних показників трактора за визначених польових робіт обрано технічні характеристики агрегату (ефективна потужність двигуна, експлуатаційна вага трактора, механічний ККД трансмісії) та показники взаємодії трактора з навколишнім середовищем (коефіцієнт опору коченню, коефіцієнт зчеплення рушія із ґрунтом, допустиме буксування рушіїв та діапазон швидкостей руху трактора за визначених умов) [1].

Використовуючи теорію тракторів, проведено обчислення та побудовано математичну модель залежності експлуатаційних характеристик трактора від різних видів взаємодій з агрофоном. Провівши аналіз побудованої засобами MS Excel залежності максимально можливих швидкості та тягової потужності тракторів від видів польових робіт, констатуємо, що швидкість ЮМЗ-8244.2 буде в цілому нижчою, ніж МТЗ-

82.1, що спричинено більшою вагою агрегату. Також спостерігаємо зниження максимально можливої швидкості в умовах роботи тракторів на вологому ґрунті (брудові), при цьому зростають потужності внаслідок намагання тракторів рухатися по такому ґрунті (рис. 1).

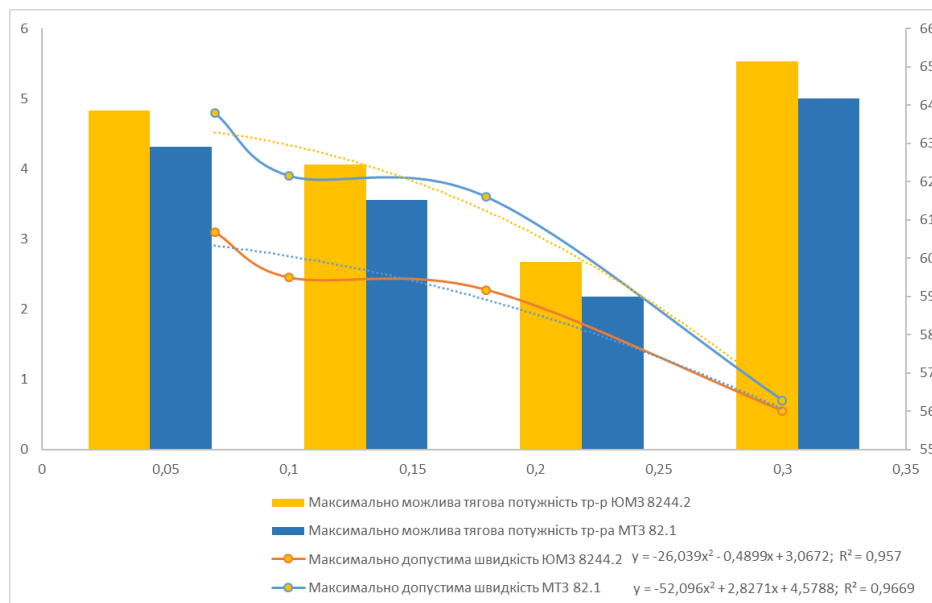


Рис.1. Порівняльна характеристика максимально допустимих швидкостей та тягових потужностей тракторів в умовах різних польових робіт

На основі одержаної математичної моделі проаналізовано зміну розрахованої максимально можливої швидкості трактора під час виконання різних видів польових робіт. Визначено тенденцію у зміні результуючої ознаки, тому встановлено, що оптимальною лінією є поліном другого порядку і такий вибір не є випадковим (рис. 1). На практиці спостерігається закономірність: настає момент, коли коефіцієнт опору коченню досягає критично мінімального значення, при переході через яке швидкість починає зростати і досягає свого максимального значення – це відповідає точці, що є вершиною параболи. Аналітично цю точку можна обчислити за формулами. На графіку ці точки мають координати (0,009;3,0695) та (0,027;4,617). Практично коефіцієнт опору коченню стрімко прямує до нуля, а швидкість досягає свого максимального значення за заданих умов. Сформувавши лінію тренду для залежності швидкостей, визначено величину достовірності апроксимації (рис. 1).

Визначено максимально можливий тяговий ККД тракторів за конкретних ґрунтових умов, де мінімальна питома втрата палива досягається при максимальній тяговій потужності (рис. 2). Аналізуючи залежність визначаємо, що ККД знизиться на 5 % у процесі роботи тракторів в умовах культивованого (зораного) поля, що пов'язано із зниженням коефіцієнту зчеплення рушія з неоднорідним ґрунтом, тому необхідно враховувати, що витрати на паливо зростуть теж на 5 %. При цьому спостерігається вищий ККД трактора ЮМЗ-8244.2 під час роботи на ґрунтах, наближених до культивованого (чи зораного) поля, тобто коли виконуються більш важчі польові роботи (рис. 2).

Отже, за результатами наших опитувань, виконаних розрахунків універсально-просапний трактор МТЗ-82.1 має високу ефективність роботи під час нескладних польових робіт, трактор ЮМЗ-8244.2 краще проявляє свої характеристики під час складних польових робіт, коли є ґрунтовий покрив подібний до культивованого чи зораного поля.

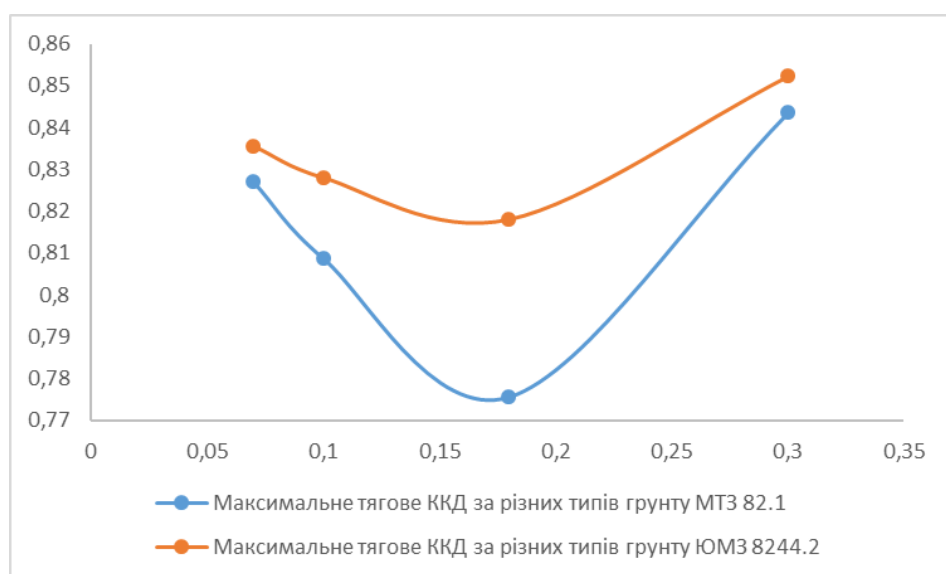


Рис. 2. Максимально можливий тяговий ККД тракторів за конкретних ґрунтових умов

Подальшим нашим дослідженням виступатиме розрахунок залежності тягових властивостей досліджуваних тракторів від передаточних чисел та аналіз отриманої математичної моделі.

Анотація. Розглянуті основні причини використання універсально-просапних тракторів в умовах малих фермерських господарств та виконано короткий аналіз математичної моделі залежності їх експлуатаційних характеристик від видів польових робіт.

Ключові слова: експлуатаційні показники, математична модель, тяговий ККД, тягова потужність, польові роботи.

Abstract. The main reasons for using some universal tractors in the conditions of small farms are considered and the analysis of mathematical model of dependency of operational characteristics on the types of field works is carried out.

Key words: operational characteristics, mathematical model, traction efficiency, tractive power, fieldwork.

Література

1. Чудаков Д.А. Основы теории и расчета трактора и автомобиля. Москва : Колос, 1972. 384 с.
2. Агротехсервис : сайт.
URL: <http://www.agroservice.dp.ua/index.php/selkhoztekhnika/traktory-pritsepy>

РЕШЕНИЕ ОДНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

1. Решение матричного уравнения с конкретной матрицей

Рассматривается матричное уравнение второй степени

$$X^2 = K \quad (1)$$

с заданной матрицей $K = \begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 40 & 64 \end{pmatrix}$. Найдем все его решения X .

Решение. Обозначим искомую матрицу $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Найдем

элементы матрицы X^2 , учитывая, что $X^2 = X \cdot X$:

$$\begin{aligned} X^2 = X \cdot X &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \cdot x_{11} + x_{12} \cdot x_{21} & x_{11} \cdot x_{12} + x_{12} \cdot x_{22} \\ x_{21} \cdot x_{11} + x_{22} \cdot x_{21} & x_{21} \cdot x_{12} + x_{22} \cdot x_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_{11})^2 + x_{12} \cdot x_{21} & x_{12}(x_{11} + x_{22}) \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) & x_{21} \cdot x_{12} + (x_{22})^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матричное уравнение (1), в силу того, что две матрицы равны, когда равны соответствующие элементы, равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} (x_{11})^2 + x_{12} \cdot x_{21} = 16 \\ x_{12}(x_{11} + x_{22}) = 24 \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) = 40 \\ x_{21} \cdot x_{12} + (x_{22})^2 = 64 \end{cases} \quad (2)$$

Решим эту систему. Вычитание из четвертого уравнения первого приводит к равенству

$$(x_{22} - x_{11})(x_{22} + x_{11}) = 48. \quad (3)$$

Далее, из второго уравнения системы (2) имеем:

$$x_{11} + x_{22} = \frac{24}{x_{12}}, \quad (4)$$

следовательно, в силу (3),

$$\begin{aligned} (x_{22} - x_{11}) \cdot \frac{24}{x_{12}} &= 48 \\ x_{22} - x_{11} &= \frac{48}{24} x_{12} \end{aligned} \quad (5)$$

$$x_{11} = x_{22} + 2x_{12}.$$

Складывая (4) и (5) и деля на 2, получаем

$$x_{22} = \frac{12}{x_{12}} + x_{12}. \quad (6)$$

Из третьего уравнения системы (2) имеем

$$x_{11} + x_{22} = \frac{40}{x_{21}},$$

следовательно,

$$\frac{24}{x_{12}} = \frac{40}{x_{21}} \Leftrightarrow x_{21} = \frac{5}{3} x_{12}. \quad (7)$$

Тем самым, мы выразили все переменные через x_{12} . Подставив (6), (7) в четвертое уравнение системы, получим уравнение

$$\frac{5}{3}(x_{12})^2 + \left(\frac{12}{x_{12}} + x_{12}\right)^2 = 64.$$

Раскрытие скобок, в предположении $x_{12} \neq 0$, приводит биквадратному уравнению

$$(x_{12})^4 - 15(x_{12})^2 + 54 = 0.$$

Оно имеет 4 корня, так как дискриминант $D = (-15)^2 - 4 \cdot 54 = 9 > 0$:

$$\begin{cases} x_{12} = \pm 3, \\ x_{12} = \pm \sqrt{6}. \end{cases}$$

Найдем остальные неизвестные, пользуясь равенствами (7), (6), (4), рассмотрев разные случаи.

1. Если $x_{12} = 3$, то $x_{21} = 5$, $x_{22} = 7$, $x_{11} = 1$.
2. Если $x_{12} = -3$, то $x_{21} = -5$, $x_{22} = -7$, $x_{11} = -1$.
3. Если $x_{12} = \sqrt{6}$, то $x_{21} = \frac{5}{3}\sqrt{6}$, $x_{22} = 3\sqrt{6}$, $x_{11} = \sqrt{6}$.
4. Если $x_{12} = -\sqrt{6}$, то $x_{21} = -\frac{5}{3}\sqrt{6}$, $x_{22} = -3\sqrt{6}$, $x_{11} = -\sqrt{6}$.

Итак, данное матричное уравнение имеет четыре решения:

$$X = \pm \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ или } X = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \frac{5}{3}\sqrt{6} & 3\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

2. Решение матричного уравнения в общем случае

Рассматривается уравнение (1) с заданной квадратной 2×2 матрицей $K = (k_{ij})$.

Обозначим $\text{tr } K, \det K$ – след и определитель матрицы K соответственно.

Рассмотрим следующие случаи. Применив тот же алгоритм решения уравнения, что и в предыдущем пункте, получим следующие результаты.

Случай 1.

$$\Delta = \text{tr}^2 K - 4 \det K \neq 0. \quad (8)$$

Замечание 1. Условие (8) влечет $\text{tr } K \pm 2\sqrt{\det K} \neq 0$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (8). Тогда матричное уравнение (1) имеет следующие 4 корня:

$$X_{1,2} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{\sigma_+}} & \frac{k_{12}}{\sqrt{\sigma_+}} \\ \frac{k_{21}}{\sqrt{\sigma_+}} & \sqrt{k_{22} - \frac{k_{12}k_{21}}{\sigma_+}} \end{pmatrix},$$

$$X_{3,4} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{\sigma_-}} & \frac{k_{12}}{\sqrt{\sigma_-}} \\ \frac{k_{21}}{\sqrt{\sigma_-}} & \sqrt{k_{22} - \frac{k_{12}k_{21}}{\sigma_-}} \end{pmatrix}$$

в обозначениях: $\sigma_+ = \text{tr } K + 2\sqrt{\det K}$, $\sigma_- = \text{tr } K - 2\sqrt{\det K}$.

Случай 2.

$$\Delta = 0. \tag{9}$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие (9). Тогда матричное уравнение (1) имеет следующие 4 корня:

$$X_{1,2} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{2\text{tr } K}} & \frac{k_{12}}{\sqrt{2\text{tr } K}} \\ \frac{k_{21}}{\sqrt{2\text{tr } K}} & \sqrt{k_{22} - \frac{k_{12}k_{21}}{2\text{tr } K}} \end{pmatrix},$$

$$X_{3,4} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{2\text{tr } K}} & \frac{k_{12}}{\sqrt{2\text{tr } K}} \\ \frac{k_{21}}{\sqrt{2\text{tr } K}} & \sqrt{k_{22} - \frac{k_{12}k_{21}}{2\text{tr } K}} \end{pmatrix}$$

Аннотация. Рассматривается матричное уравнение вида $X^2 = K$, где K – вещественная числовая квадратная матрица размерности 2. Цель работы: найти все его решения X . Сначала алгоритм решения иллюстрируется примером уравнения с конкретной матрицей K , затем этот алгоритм обобщается.

Ключевые слова: матричное уравнение, квадрат матрицы, решение.

Abstract. We consider a matrix equation of the form $X^2 = K$, where K is a real numerical square matrix of dimension 2. Purpose of the work: find all its solutions X . First, the solution algorithm is illustrated by an example of an equation with a specific matrix K , then this algorithm is generalized.

Key words: matrix equation, square of matrix, solution.

Литература

1. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. – 320 с.

Миронов Г. Д. (студ., 1курс)
 Научный руководитель – доц. Смирнова Е. В.
Воронежский государственный лесотехнический университет
(Воронеж, РФ)

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКОЙ К ЭКЗАМЕНУ

Студенту предстоит сдать v экзаменов в заранее объявленные дни. После каждого экзамена студент получает оценки, соответствующие его уровню подготовленности к проводимому испытанию ([1]), которые затем суммируются. Уровень подготовленности к каждому испытанию зависит от усилий, потраченных на подготовку к данному экзамену, и от общей подготовленности студента, которая зависит от общего количества усилий, потраченных к данному моменту. Суммарное количество усилий во время сессии ограничено. Требуется так распределить усилия, чтобы набрать максимально возможную сумму баллов за все экзамены. Формализуем эту задачу следующим образом.

Даны моменты времени $t_k, k = 0, \dots, v$. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -r_k x + \sqrt{w}, t \in [t_{k-1}, t_k], \\ \dot{z} = -pz + g_k \sqrt{w}, t \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, \dots, v, \\ x(t_0) = x_0, \quad z(t_0) = z_0, \\ x(t_k + 0) = x_k^0 + z(t_k), k = 1, \dots, v-1, \\ w(t) \geq 0, \quad \int_{t_0}^{t_v} w(t) \leq E, \\ J = \sum_{k=1}^v x(t_k - 0) \rightarrow \max. \end{array} \right.$$

где $r_k > 0, g_k > 0; k = 1, \dots, v, p > 0, x_0 > 0, z_0 > 0, E > 0$.

Здесь $x \in R$ имеет смысл уровня готовности к ближайшему экзамену, $z \in R$ характеризует общий уровень подготовленности студента, а управление w - усилия на подготовку к ближайшему экзамену. Переменная

$x(t)$ может иметь разрывы в моменты экзаменов t_k , а функция $z(t)$ непрерывна на всем отрезке $[t_0, t_v]$. При затрате усилий w оба уровня растут пропорционально $\sqrt{w}$, что, согласно т.н. неоклассическим представлениям, отражает убывающую эффективность каждой дополнительной единицы усилий.

Запишем задачу в каноническом виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = -r_k x + u, t \in [t_{k-1}, t_k], \\ \dot{z} = -pz + g_k u, t \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, \dots, v, \\ \dot{y} = u^2, u = \sqrt{w} \in [0, +\infty), \\ x(t_0) = x_0, z(t_0) = z_0, \\ x(t_k + 0) = x_k^0 + z(t_k), k = 1, \dots, v-1, \\ y(t_v) - y(t_0) \leq E, \\ J = -\sum_{k=1}^v x(t_k - 0) \rightarrow \min. \end{cases}$$

Существование решения в этой задаче вытекает из линейности управляемой системы для фазовых переменных (x, z) , выпуклости множества управлений и ограниченности интеграла от квадрата управления.

Выпишем принцип максимума [1]. Функция Понтрягина

$$H = \psi_x(-r_k x + u) + \psi_z(-pz + g_k u) + \psi_y u^2 \text{ на } [t_{k-1}, t_k],$$

концевая функция Лагранжа

$$\begin{aligned} \ell = & \alpha_0 \left(-\sum_{k=1}^v x(t_k - 0) \right) + \alpha_1 (y(t_v) - y(t_0) - E) + \sigma_0 (x(t_0) - x_0) + \beta (z(t_0) - z_0) + \\ & + \sum_{k=1}^{v-1} \sigma_k (x(t_k + 0) - x_k^0 - z(t_k)). \end{aligned}$$

Согласно принципу максимума, для оптимального процесса существует набор $\lambda = (\alpha_0, \alpha_1, \beta, \sigma_k, k = 0, \dots, v-1) \neq 0$, с которым выполнены следующие условия:

- условия неотрицательности: $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0$;
- условия дополняющей нежесткости: $\alpha_1 (y(t_v) - y(t_0) - E) = 0$;

- сопряженные уравнения: $\dot{\psi}_x = r_k \psi_x$, $\dot{\psi}_z = p \psi_z$, $\dot{\psi}_x = 0$ на $[t_{k-1}, t_k]$;

- условия трансверсальности на концах отрезка и в промежуточных точках:

$$\psi_x(t_0 + 0) = \sigma_0, \psi_x(t_k - 0) = \alpha_0, \psi_x(t_k + 0) = \sigma_k, k = 1, \dots, v-1, \\ \psi_x(t_v - 0) = \alpha_0,$$

$$\psi_z(t_0 + 0) = \beta, \psi_z(t_v - 0) = 0, \psi_y(t_0 + 0) = -\alpha_1, \psi_y(t_v - 0) = -\alpha_1;$$

- условия скачка: $\Delta \psi_z(t_k) = -\sigma_k$, $\Delta \psi_y(t_k) = 0$, $k = 1, \dots, v-1$;

- для любого $k = 1, \dots, v$ для почти всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$ $H = 0$;

- условие максимума: любого $k = 1, \dots, v$ для почти всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\max_{v \geq 0} (\psi_x(-r_k x + v) + \psi_z(-p z + g_k v) + \psi_y v^2) = 0.$$

Из сопряженной системы, условий трансверсальности и условий скачка для ψ_y вытекает, что $\psi_y(t) \equiv -\alpha_1$. Поэтому условие максимума на отрезке

имеет вид:
$$\max_{v \geq 0} (-\alpha_1 v^2 + (\psi_x + g_k \psi_z) v - r_k \psi_x x - p \psi_z z) = 0.$$

В [1] доказано, что, исходя из принципа максимума, экстремаль полностью определяется.

Предложим алгоритм нахождения решения рассматриваемой задачи.

1 шаг. Введем начальные данные задачи:

$$v, t_k (k = 0, \dots, v), E, p, x_0, z_0, r_k, g_k (k = 1, \dots, v), x_k^0 (k = 1, \dots, v-1).$$

Обозначим: $\psi_x[k](t) = \psi_x(t)$, $\psi_z[k](t) = \psi_z(t)$, $u[k](t) = u(t)$, $x[k](t) = x(t)$, $z[k](t) = z(t)$ при $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, v$.

2 шаг. Решим систему дифференциальных уравнений для нахождения $\psi_x[k]$:

$$\dot{\psi}_x[k] = r_k \psi_x[k], \psi_x[k](t_k) = 1, k = 1, \dots, v.$$

3 шаг. Вычислим константы $\sigma_k = \psi_x[k+1](t_k)$, $k = 0, \dots, v-1$.

4 шаг. Решим систему дифференциальных уравнений для нахождения $\psi_z[k]$:

$$\dot{\psi}_z[k] = p \psi_z[k], \psi_z[v](t_v) = 0, \psi_z[k](t_k) = \sigma_k + \psi_z[k+1](t_k), k = v-1, \dots, 1.$$

5 шаг. Вычислим константу $\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{E} \sum_{k=1}^v \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\psi_x[k](t) + g_k \psi_z[k](t))^2 dt}$.

6 шаг. Определим функции $u[k](t) = \frac{1}{\alpha_1} (\psi_x[k](t) + g_k \psi_z[k](t))$,

$$w(t) = \begin{cases} (u[1](t))^2, & t \in [t_0, t_1], \\ \vdots \\ (u[k](t))^2, & t \in [t_{k-1}, t_k], \\ \vdots \\ (u[v](t))^2, & t \in [t_{v-1}, t_v]. \end{cases}$$

7 шаг. Решим систему дифференциальных уравнений для нахождения $z[k]$: $\dot{z}[k] = -pz[k] + g_k u[k]$, $z[1](t_0) = z_0$, $z[k](t_{k-1}) = z[k-1](t_{k-1})$, $k = 2, \dots, v$.

8 шаг. Решим систему дифференциальных уравнений для нахождения $x[k]$: $\dot{x}[k] = -r_k x[k] + u[k]$, $x[1](t_0) = x_0$, $x[k](t_{k-1}) = x_{k-1}^0 + z[k](t_{k-1})$, $k = 2, \dots, v$.

9 шаг. Определим функции

$$x(t) = \begin{cases} x[1](t), & t \in [t_0, t_1], \\ \vdots \\ x[k](t), & t \in [t_{k-1}, t_k], \\ \vdots \\ x[v](t), & t \in [t_{v-1}, t_v], \end{cases} \quad z(t) = \begin{cases} z[1](t), & t \in [t_0, t_1], \\ \vdots \\ z[k](t), & t \in [t_{k-1}, t_k], \\ \vdots \\ z[v](t), & t \in [t_{v-1}, t_v]. \end{cases}$$

10 шаг. Построим графики функций $x(t)$, $z(t)$, $w(t)$.

Данный алгоритм был реализован при помощи вычислительно - программного комплекса Maple.

Аннотация. В статье рассмотрен алгоритм решения задачи оптимального управления подготовкой к экзаменам.

Ключевые слова. Оптимальное управление, принцип максимума

Abstract. The article describes an algorithm for solving the problem of optimal control of exam preparation.

Key words. Optimal control, maximum principle.

Литература

1.Дмитрук А.В. Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями/ А. В. Дмитрук, А.М. Каганович // Нелинейная динамика и управление: Сб. науч. тр. — М.: Наука, 2008. — Т. 6. — С. 1–40.

СХЕМА ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОГО РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ НЕЗАЛЕЖНОЇ ВЕЛИЧИНИ

Якщо залежна змінна Y є випадковою величиною, яка має нормальний закон розподілу, а значення незалежної змінної X (аргументу) задані точно, то такі величини називаються детермінованими величинами.

У більшості випадків за допомогою регресійного аналізу встановлюється зв'язок між нормально розподіленою випадковою величиною та не випадковою, значення якої змінюються при експерименті.

При цьому рівняння теоретичній лінії регресії має вигляд

$$\eta = \alpha + \beta(x - \bar{x}) \quad (1)$$

Його оцінкою є емпірична лінія регресії

$$Y = a + b(x - \bar{x}) \quad (2)$$

При оцінці параметрів рівняння лінії регресії враховують можливість зміни умовної дисперсії випадкової величини Y із зміною рівня не випадкової величини. Припускається, що умовна дисперсія $\sigma_{y/x}^2 = f_2(x)$ величини Y , яка відповідає даному значенню x , обернено пропорційна функції $\omega(x)$:

$$\sigma_{y/x}^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{\omega(x)}, \quad (3)$$

яка відзначається на основі експериментальних даних и може бути подана як аналітичній формі, так і в графічній формі.

Оцінку параметрів рівняння лінії регресії проводимо за формулами, які впливають з метода найменших квадратів:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i x_i}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i}, \quad (4)$$

$$a = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i} \quad (5)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (x_i - \bar{x})} \quad (6)$$

де $\omega_i n_i$ «вага» точок; m – число рівнів не випадкової величини x ; n_i – число випробувань при даному значенні x , $i = 1, 2, 3, \dots, m$; $\bar{y}_i$ – вибіркове умовне середнє значення випадкової величини Y :

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i} \quad (7)$$

(тут $j = 1, 2, 3, \dots, n_i$)

Лінійність кривої регресії перевіряють за допомогою дисперсійного відношення

$$F = s_2^2 / s_1^2 \quad (8)$$

де s_1^2 – дисперсія усередині системи (осереднена вибіркочна дисперсія),

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \omega_i (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^m n_i - m} \quad (9)$$

s_2^2 – дисперсія навколо емпіричної лінії регресії

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (\bar{y}_i - Y_i)^2}{m - 2} \quad (10)$$

Якщо дисперсійне відношення не перевищує критичного значення для рівня значущості α та чисел ступенів свободи $k_1 = \sum_{i=1}^m n_i - m$ і $k_2 = m - 2$, то присутність лінійної залежності (1) та (2) підтверджується.

У цьому випадку дисперсії об'єднуються у загальну оцінку

$$s^2 = \frac{(\sum_{i=1}^m n_i - m)s_1^2 + (m - 2)s_2^2}{(\sum_{i=1}^m n_i - m) + (m - 2)} \quad (11)$$

або

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \omega_j (y_{ij} - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^m n_i - 2}, \quad (12)$$

за допомогою якої визначаються оцінки дисперсії параметрів рівняння емпіричної лінії регресії a і b , а також величині Y . Вказані величини знаходяться за формулами

$$s_a^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i}; \quad (13)$$

$$s_b^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^m \omega_i n_i (x_i - \bar{x})^2}; \quad (14)$$

$$s_Y^2 = s_a^2 + s_b^2(x - \bar{x})^2. \quad (15)$$

Нульову гіпотезу про присутність зв'язка між величинами, що досліджуються, перевіряють за допомогою критерію Стюдента, для якого обчислюють

$$t = b/s_b \quad (16)$$

і порівнюють з табличним значенням $t_{\alpha,k}$, яке знайдене для рівня значущості α та числа ступенів свободи $k = \sum_{i=1}^m n_i - 2$. Якщо $|t| \geq t_{\alpha,k}$, то нульову гіпотезу приймаємо.

Межі надійності для параметрів рівняння теоретичної лінії регресії та генерального середнього значення обчислюємо за формулами

$$\left. \begin{aligned} a - t_{\alpha,k}s_a < \alpha < a + t_{\alpha,k}s_a; \\ b - t_{\alpha,k}s_b < \beta < b + t_{\alpha,k}s_b; \\ Y - t_{\alpha,k}s_Y < \eta < Y + t_{\alpha,k}s_Y \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

У випадку незалежності умовних дисперсій випадкової величини від рівня не випадкової величини, що можна виявити за критеріями Кочрена, Хартлея або Бартлета, у формулах (3 – 5) та (8 – 16) приймаємо $\omega_i = 1$.

Іноді, в експериментах при кожному значенні не випадкової величини проводять лише одне випробування ($n_i = 1$). В цих випадках для дисперсії навколо емпіричної лінії регресії:

$$s^2 = s_2^2 = \frac{1}{m-2} \sum_{i=1}^m (y_i - Y_i)^2 \quad (18)$$

Подальший аналіз проводимо за допомогою формул 13 – 17.

У багатьох випадках надається можливість за допомогою простих перетворень подати рівняння нелінійної регресії як лінійне співвідношення між перетвореними величинами, до яких можна застосувати апарат лінійного регресійного аналізу.

Наприклад, залежність між величинами, які досліджуємо, записуються у вигляді степеневі функції $u = \beta v^\alpha$, тоді логарифмуємо її та робимо заміну $y = \lg u$ і $x = \lg v$, після цього приходимо до лінійної функції $y = a + bx$ де $a = \lg \beta$, $b = \alpha$.

Після визначення параметрів $y(x)$ повертаємось до рівняння кривої регресії $u(v)$. Аналогічно будуємо межі надійної області для теоретичної кривій регресії. Для підтвердження вірного вибору виду функціональної залежності u від v проводять перевірку гіпотези лінійності регресії $y(x)$, для цього обчислюємо дисперсійні відношення (8).

Література

1. Пак В.В. Вища математика. / В.В. Пак, Ю.Л. Носенко: Підручник. – К.: Либідь, 2005, - 440 с.
2. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 432 с. (Альма-матер)

Мовсесян В. Ю. (студ., 3 курс)

Науковий керівник – доц. Гладка Л. І.

*Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
(Черкаси, Україна)*

РОЗРОБКА ЧАТ-БОТА ЯК ЗАСОБУ КОНТРОЛЮ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ СТУДЕНТІВ

Чат-боти на сьогодні є важливою інновацією в електронному навчанні. За визначенням, чат-бот (Chatbot) - це програма штучного інтелекту, яка імітує інтерактивну розмову людини за допомогою ключових, заздалегідь розрахованих фраз користувача, та слухових або текстових сигналів [1, 2]. Як новітній засіб навчання з групи сучасних інформаційно-комунікаційних засобів, чат-боти мають низку унікальних переваг [3]:

1. Доступність: у чат-бота немає вихідних та робочого часу. Студенти можуть звернутися до чат-бота у будь-який час і в будь-якому місці.
2. Об'єктивність: на відміну від викладачів, чат-боти не можуть бути упередженими щодо конкретного учня. Потенційно це створює простір для набагато більш об'єктивної оцінки знань.
3. Інноваційний інструмент для самонавчання. Самоосвіта є величезною тенденцією вже кілька років. Чат-боти можуть допомогти систематизувати самоосвітні заходи.

4. Мотиваційний фактор. Чат-боти можуть заохочувати осіб, які навчаються до кращих результатів, надавати корисні поради та ідеї, виконувати певні нагадування за допомогою push-сповіщень.

5. Доступність як у мобільних додатках, веб-інструментах, так і в соціальних мережах.

Ідея створення чат-бота для месенджерів (наприклад Telegram) базується на використанні відкритого прикладного програмного інтерфейсу API (англ. application programming interface) та https запитів. В ролі клієнта може виступати як вебсайт месенджера, так і мобільна версія. У роботі створено чат-бот за допомогою платформи Dialogflow [4], яка розрізняє мову і використовується для розробки та інтеграції розмовного користувацького інтерфейсу. Розроблений бот перевіряє рівень знань в студентів по темі «Наслідування» з дисципліни «Об'єктно-орієнтоване програмування». При старті бота (або привітанні), він пише коротку довідкову інформацію і ставить запитання для продовження діалогу (рис. 1а.). При відповіді «так» буде запропоновано вибрати рівень складності (рис. 1б.).

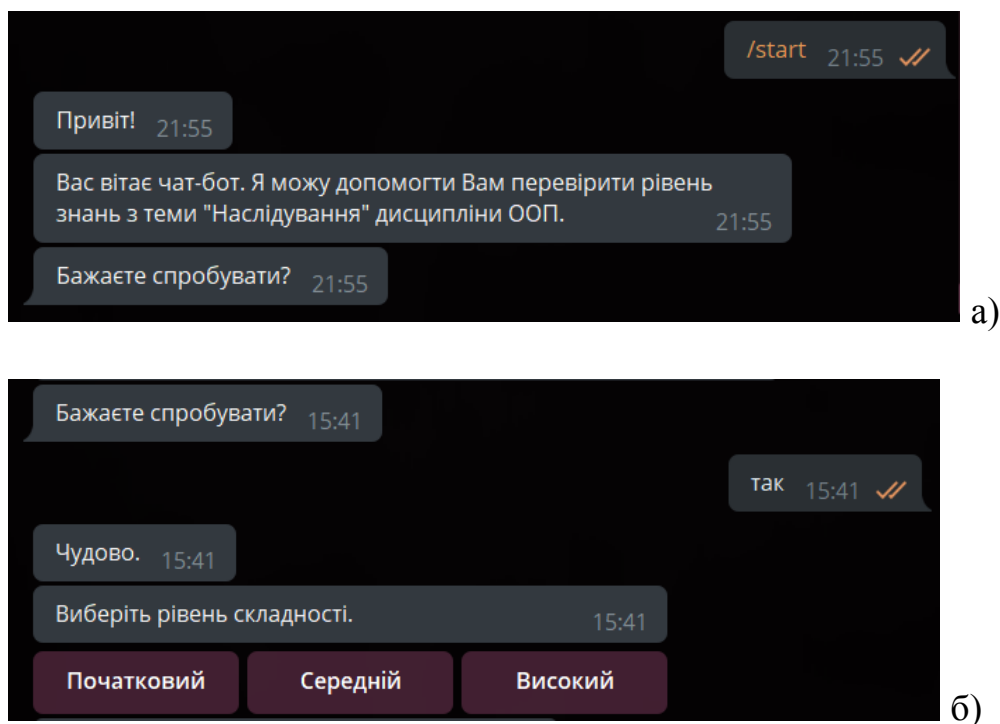


Рис. 1. Знімок екрана початку роботи чат-бота

Після вибору рівня складності чат-бот пропонує код програми для аналізу і контролю знань теми «Наслідування» (Рис. 2).

```
1  #include <iostream>
2  using namespace std;
3  #include <conio.h> // Для консольного режиму роботи
4  using namespace std; // Використання стандартного простору імен
5  class kooClass { // Оголошення класового типу
6  int x, y, z; // Тривимірні координати
7  public:
8  kooClass() {x = y = z = 0; }
9  kooClass(int c, int d, int f) { x = c; y = d; z = f; }
10 kooClass operator*(kooClass obj); // Операнд obj передається н
11 kooClass operator=(kooClass obj);
12 friend kooClass operator*(kooClass obi, int c);
13 friend kooClass operator*(int c, kooClass obi);
14 friend kooClass operator/(kooClass obi, int c);
15 friend kooClass operator/(int c, kooClass obi);
16 void Show(char *s);
17 };
18 // Перевизначення бінарного оператора множення "*".
19 kooClass kooClass::operator*(kooClass obj)
20 {
21 kooClass tmp;
22 tmp.x = x * obj.x;
23 tmp.y = y * obj.y;
24 tmp.z = z * obj.z;
25 return tmp;
26 }
27 // Операторна "дружня" функція класу.
28 // Перевизначення бінарного оператора множення "*".
29
30 kooClass operator*(kooClass obi, int c)
31 {
32 kooClass tmp; // Створення тимчасового об'єкта
33 tmp.x = obi.x * c;
34 tmp.y = obi.y * c;
35 tmp.z = obi.z * c;
36 return tmp; // Повертає модифікований тимчасовий об'єкт
37 }
38 // Операторна "дружня" функція класу.
39 // Перевизначення бінарного оператора множення "*".

79 int main()
80 {
81 kooClass ObjA(1, 2, 3), ObjB(10, 10, 10), ObjC, ObjD;
82 int a = 10, b = 5;
83 ObjA.Show("A"); ObjB.Show("B");
84 ObjC = ObjA * a; // Множення об'єкта ObjA на число a
85 ObjC.Show("C=A*a");
86 ObjC = a * ObjA; // Множення числа a на об'єкт ObjA
87 ObjC.Show("C=a*A");
88 ObjC = ObjB / b; // Ділення об'єкта ObjB на число b
89 ObjC.Show("C=B*b");
90 ObjC = a / ObjB; // Ділення числа a на об'єкт ObjB
91 ObjC.Show("C=a/B");
92 ObjD=ObjA*ObjB;
93 ObjD.Show("D=A*B");
94 getch();
95 return 0;
96 }
```

Рис. 2. Фрагменти програмного коду, запропонованого ботом для аналізу і опитування
Потім організовано діалог у формі запитання – відповідь (Рис. 3).

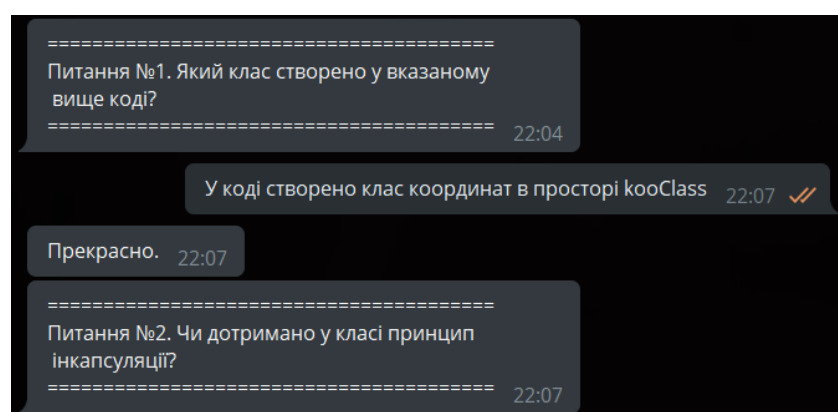


Рис. 3. Організація діалогу

При успішній відповіді на всі запитання бот вітає з успішним завершенням обраного рівня і пропонує обрати наступний рівень або завершити опитування.

Висновки. Чат-бот – це інноваційний інструмент в освіті, який використовується для підвищення інтерактивності навчання, допомагає організувати процес навчання як викладачу, так і особам, які навчаються. У майбутньому роль чат-ботів може бути розширена до репетиторства, тестування, оцінки знань і навіть створення нових методів навчання.

Анотація. У роботі представлено один із способів розробки та впровадження чат-бота як віртуального розумного викладача для курсу університетського рівня. Завданням роботи було створення телеграм-бота як засобу контролю навчальних досягнень студентів з певної теми навчальної дисципліни. Бот розроблено із використанням діалогу Dialogflow, який може запропонувати взаємодію з користувачем на природній мові. Кінцевий продукт отримав загальне схвалення студентів завдяки зручності та добре структурованим даним.

Ключові слова: освіта, діалог, чат-боти, інтелектуальне навчання, інновації в освіті, вища освіта.

Abstract. The paper presents one of the ways to develop and implement a chatbot as a virtual smart teacher for a university level course. The task of the work was to create a telegram-bot as a means of monitoring student achievement on a particular topic of the discipline. It was developed using the Dialogflow dialog, which can offer interaction with the user in natural language. The final product received general approval from students due to its convenience and well-structured data.

Keywords: Education, Dialogflow, Chatbots, Intelligent Tutoring, Educational Innovation, Higher Education.

Література

1. Chatbots In Education: Applications Of Chatbot Technologies - eLearning Industry. [Online]. Available: <https://elearningindustry.com/chatbots-in-education-applications-chatbot-technologies> . Accessed on: September 2, 2020.
2. Luciana Benotti, Mar'ia Cecilia Mart'inez, and Fernando Schapachnik. Engaging high school students using Chatbots. [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/266657029_Engaging_high_school_students_using_Chatbots. Accessed on: December 2, 2020.
3. Debasatwa Dutta. Developing an Intelligent Chat-bot Tool to assist high school students for learning general knowledge subjects. Technical report. [Online]. Available: <https://smartech.gatech.edu/handle/1853/59088>. Accessed on: December 28, 2020.
4. Dialogflow. [Online]. Available: <https://cloud.google.com/dialogflow/docs>. Accessed on: February 22, 2021.

ФОТОВІДЕОТЕХНІКА ЯК ЗАСІБ ФОТОГРАММЕТРИЧНИХ І ЛАБОРАТОРНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ В ВИРОБНИЧІЙ ПРАКТИЦІ ТА НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ РІЗНИХ РІВНІВ

Застосування фото- і відеотехніки для об'єктивної фіксації ходу лабораторних робіт і моніторингу технологічних процесів, систем безпеки, аерофотозйомки тощо: важливо і в навчальному процесі, і на практиці [1] [3]. Для цього необхідне відповідне інженерно-математичне забезпечення у вигляді засобів обробки зображень. Разом з цим потрібно розробляти і методичне забезпечення для курсового математичного навчання відповідних фахівців.

Фотограмметрія – наукова дисципліна, яка вивчає форми, розміри і положення об'єктів за їх фотографічними зображеннями («безконтактно»). Вона вивчає властивості фотозображення, методів його отримання і вимірювання, розробку приладів для вимірювання та перетворення фотозображень. Найбільш поширена – геодезія, картографія, землеустрій, аерокосмічні дослідження. У будівництві та архітектурі фотограмметрія застосовується для оцінки розмірів зведення будівель, їх деформацій; для потреб реставрації [5]. В лабораторії апаратно-програмні пристрої, що під'єднанні до мікроскопа, допомагають у вивченні лабораторних зразків. Військові близькими за ідеологією способами визначають цілі й орієнтири. Впровадження фотограмметричних методів в навчальний процес вищої та середньої школи – важливе методичне завдання. За останні роки в навчальних закладах стали менше експериментувати, тому розглядаються методи здатні оживити процес навчання, наблизити його до учня.

Основою теорії фотограмметрії є математика – векторна алгебра та аналітична геометрія, часто геодезія надає для аналізу координати «опорних» точок. Аналіз фотозображення протікає в два етапи : 1) попередня обробка

зображень (отримала потужний поштовх з впровадженням ЕОМ); 2) методи побудов моделей для оцінки розмірів та положень тіл (проекції, зйомка під кутом, аналіз стереозображень тощо). З фізики залучаються знання з геометричної оптики (об'єктиви, фототехніка) та електроніки (світлочутлива ПЗС матриця, схемні рішення). При методі фотограмметрії застосовуються спеціальні системи координат – геодезична, права система прямокутних координат, фотограмметрична ліва просторова прямокутна система; уводять координатну систему знімку (в площині). Оцінка розмірів тіл залежить від перетворень координат між цими системами; окремий випадок складає нахилений фотознімок. Для аерознімання використовують аерофотоапарат, на поверхні – фототеодоліт, масові цифрові камери [5]. Існують програми для оцінки довжин та кутів нахилу предметів за допомоги смартфонів, що доступно й професіоналам для роботи та учням для навчання. Застосування фотограмметрії можливе й для проектування машин і механізмів. Відома програма Realviz, яка по декількох фотографіях тіла знятих в проекціях, будує низку опорних точок, які імпортують контури в тривимірне креслення.

Передобробка зображень передуює аналізу й допомагає боротися з артефактами зображень, що неминуче виникають внаслідок «помилки», які генеруються оптичними системами. О.Краснящих [2] виокремлює три рівні обробки зображень, прив'язуючи їх до етапів аналізу зображень у тварин і людини, тобто до психофізіології сприйняття. Низький рівень обробки: це примітивні операції (різкість, контраст, прибирання шуму). На вході і виході операції – зображення. Середній рівень – сегментація, тобто опис об'єктів, стискання, класифікація окремих об'єктів. Зображення на вході операції, а на виході ознаки та атрибути. Високий рівень – це уже логічні висновки щодо ознак і атрибутів (рівень «зорового сприйняття»).

Для потреб навчання фотовідеотехніка, зокрема цифрова, застосовується найбільш інтенсивно останні 10–15 років, стимулюючи інтерес до предметів та розвиваючи самостійність учнів. Застосування цих методик особливо продуктивно в лабораторних заняттях інженерно-

фізичного циклу. Я. Філіпова [6] проаналізувавши програми Multilab (програмне забезпечення цифрової лабораторії «Архімед», виробник Fourier Sys, Ізраїль) і Measure Dynamics (програмне забезпечення цифрової лабораторії Cobra4, виробник Phywe, Німеччина), також ImageJ (США) для аналізу рухів, дійшла до висновку, що всі вони при відеоаналізі фізичного руху використовують послідовні етапи: зйомку відеоматеріалу, процедуру масштабування, розмітку відеофрагменту і математичну обробку отриманих результатів. Класичні методи фотограмметрії застосовуються й для оцінки розмірів по нерухомих знімках. Перспективними тут є засоби фотограмметрії стосовно практики лабораторних занять, яким притаманна наочність – механіка й оптика.

Порівняно з раннім етапом розвитку оцінкових фотометодів (і навчальних курсів з цієї дисципліни) де панує лінійна алгебра, аналітична геометрія та елементи інженерної графіки (нарисна геометрія), при впровадженні ЕОМ зросла питома вага методів цифрової фільтрації («передобробка»). Останні розпадаються на безпосереднє маніпулювання пікселями («просторові методи») та застосування модифікацій зображень з переводом їх у систему періодичних функцій з подальшою обробкою методами рядів Фур'є («частотні методи»). Є й фільтри засновані на статистичних методах. Ці методи мають бути ураховані при розробці математичних та інженерно-фізичних курсів для спеціалістів в галузі фотограмметрії та фотоаналізу [2] [4].

Висновки. Фотограмметричні методи знаходять застосування в системах безконтактного моніторингу навколишнього середовища для штучних та природних систем, оцінки їх візуальних властивостей. Вони використовуються також в навчальному процесі школи, коледжу, технічного університету знаходять своє застосування в дослідженнях форми тіл та їх рухів, в гідродинаміці й оптиці, в основному в рамках інженерно-фізичних дисциплін.

Анотація. У статті окреслено математичні та інженерні засади фотограмметричних методів для систем моніторингу процесів та навколишнього середовища. Розглянуто основні орієнтири їх представництва у методичному забезпеченні в навчальних курсах вищої та середньої школи.

Ключові слова: фотограмметрія, передобробка зображень, лабораторні роботи, фотовідеотехніка, експеримент

Abstract. The mathematical and engineering bases of photogrammetric methods for process and environmental monitoring systems are outlined in the article. The main guidelines for the representation of these bases in the methodological support of educational courses in higher and secondary schools are considered.

Key words: photogrammetry, preliminary image processing, laboratory work, photo and video technology, experiment.

Література

1. Дорожинський О. Л., Тукай Р. Фотограмметрія. Львів : Львівська політехніка, 2008. - 332 с.
2. Краснящих А.В. Обработка оптических изображений. Санкт-Петербург: НИУ ИТМО, 2012. - 129 с.
3. Рудий Р.М. Прикладна фотограмметрія. Київ: НМКВО, 1991. 172 с.
4. Старовойтов В.В., Голуб Ю.И. Получение и обработка изображений на ЭВМ. Минск : БНТУ, 2018.- 204 с.
5. Толстохатко В. А. Пеньков В. О.; Конспект лекцій з курсу «Фотограмметрія та дистанційне зондування». Модуль 1: «Фотограмметрія» для студентів 3 курсу денної та заочної форм навчання за напрямом 6.080101 «Геодезія, картографія та землеустрій». Харків : ХНУМГ імені О. М. Бекетова, 2013. - 91 с.
6. Филиппова И.Я. Видеоанализ как современный инструмент учителя физики. URL: http://ifets.ieee.org/russian/depository/v15_i1/pdf/7.pdf (12.03.2021).

Носатов И. В. (студ., 2 курс)
 Научный руководитель – доц. Сапронов И. В.
*Воронежский государственный лесотехнический университет
 им. Г.Ф. Морозова (Воронеж, РФ)*

ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ВЕСОМ

Изучается линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt = 0, \quad 0 \leq x \leq \delta \quad (1)$$

с интегральным оператором второго порядка.

Ядро $K(x, t)$ имеет вид

$$K(x, t) = \frac{1}{2}C_2t^2 - C_2xt + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_1x^{q+1} - C_1x^qt - C_0qx^{2q-1}t + C_0(1+q)x^{2q},$$

$$(q > 1), \quad (2)$$

где

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Не трудно проверить, что

$$C_0 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K(x, x)}{x^{2q}}, \quad C_1 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(-1)K'_t(x, x)}{x^q}, \quad C_2 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K''_{tt}(x, x)}{x_0},$$

причем C_0 имеет ограниченный обратный C_0^{-1} , $\varphi(x) = \vartheta''(x)$ ($\vartheta(x) \in M_{q,v}^{2,-q}$) является искомой функцией в E . Напомним о семействе банаховых

пространств $M_{q,v}^{k,\alpha} = \{\varphi(x): \varphi^{(i)}(x) = x^{\alpha-qi}e^{v \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}}\omega_i(x), \quad \omega_i \in B([0, \delta], E),$

$$\|\varphi\|_{M_{q,v}^{k,\alpha}} = \max_{0 \leq i \leq k} \|\omega_i\|_{B([0, \delta], E)}\}.$$

Уравнение (1) имеет решение $\varphi(x) = \vartheta''(x)$, где $\vartheta(x) \in M_{q,-2}^{2,-q}$, тогда и только тогда, когда интегро-дифференциальное уравнение

$$A\vartheta + D\vartheta = 0 \quad (3)$$

имеет решение $\vartheta(x) \in M_{q,-2}^{2,-q}$, где

$$A\vartheta = C_0x^{2q}\vartheta + C_1x^q\vartheta + C_2 \int_0^x \vartheta(t)dt + qC_0x^{2q-1}\vartheta, \quad (4)$$

$$D\vartheta = [K(x, x) - C_0 x^{2q}] \vartheta' + [-K_t'(x, x) - C_1 x^q] \vartheta + \int_0^x [K_{tt}''(x, t) - C_2] \vartheta(t) dt - \\ - q C_0 x^{2q-1} \vartheta. \quad (5)$$

Доказательство этого утверждения легко провести, интегрируя (1) по частям.

Если рассмотреть операторный пучок

$$B_v = -C_0 v + C_1 - C_2 \frac{1}{v},$$

то при $v = -2$

$$B_{-2} = 2C_0 + C_1 + \frac{1}{2} C_2$$

$$B'_{-2} = -C_0 + \frac{1}{4} C_2$$

Система уравнений

$$\begin{cases} B_{-2} e_0 = 0 \\ B'_{-2} e_0 + B_{-2} e_1 = 0 \end{cases}$$

имеет решения $e_0 = (1, -1)^T$, $e_1 = (1, -1)^T$.

В этой работе будем искать некоторые решения уравнения

$$A\vartheta = 0 \quad (6)$$

$$1. \vartheta_1 = \frac{1}{x^q} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} e_0, \quad (7)$$

Подставляя (7) в равенство (6) получаем

$$C_0 x^{2q} \left[-q x^{-q-1} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} e_0 + \frac{2}{x^{2q}} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} e_0 \right] + C_1 x^q \frac{1}{x^q} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} e_0 + \\ + \frac{1}{2} C_2 e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} e_0 + q C_0 x^{2q-1} \frac{1}{x^q} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} e_0 = \\ = e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left[2C_0 + C_1 + \frac{1}{2} C_2 \right] e_0 = 0,$$

Следовательно $e_0 = (1, -1)^T$ и $\vartheta_1(x) = \frac{1}{x^q} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} (1, -1)^T$ – решение уравнения (6).

$$2. \vartheta_2(x) = \frac{1}{x^q} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left[e_1 + \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} e_0 \right], \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6) получаем

$$\begin{aligned}
& C_0 x^{2q} \left[-q x^{-q-1} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left(e_1 + \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} e_0 \right) + \frac{2}{x^{2q}} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left(e_1 + \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} e_0 \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{x^q} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} e_0 \right] + C_1 x^q \frac{1}{x^q} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left(e_1 + \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} e_0 \right) + \\
& \quad + C_2 \left[\frac{1}{2} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} e_1 + \frac{1}{2} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} e_0 + \frac{1}{4} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} e_0 \right] + \\
& \quad + q C_0 x^{2q-1} \frac{1}{x^q} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left(e_1 + \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} e_0 \right) = \\
& \quad = e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} \left[2C_0 + C_1 + \frac{1}{2} C_2 \right] e_0 + \\
& \quad + e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left\{ \left[-C_0 + \frac{1}{4} C_2 \right] e_0 + \left[2C_0 + C_1 + \frac{1}{2} C_2 \right] e_1 \right\} = \\
& \quad = e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} B_{-2} e_0 + e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \{ B'_{-2} e_0 + B_{-2} e_1 \} = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $e_0 = (1, -1)^T$, $e_1 = (1, -1)^T$ и

$\vartheta_2(x) = \frac{1}{x^q} e^{-2 \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q}} \left[(1, -1)^T + \int_x^{\delta} \frac{dt}{t^q} (1, -1)^T \right]$ – решение уравнения (6).

Аннотация. В последние годы интегральные уравнения Вольтерра исследовались с вещественными коэффициентами, обладающими конечной гладкостью. При этом уравнения рассматривались как в конечномерных, так и банаховых пространствах. Целью настоящей работы является исследование однородного уравнения Вольтерра с регулярной особенностью и ядром специального вида в пространстве суммируемых на $[0, \delta]$ функций со значениями в специально введенном банаховом пространстве E .

Abstract. In recent years, Volterra integral equations have been studied with real coefficients of finite smoothness. Moreover, the equations were considered in both finite-dimensional and Banach spaces. The aim of this work is to study a homogeneous Volterra equation with a regular singularity and a kernel of a special form in the space of functions summable on $[0, \delta]$ with values in a specially introduced Banach space E .

Ключевые слова: регулярная особенность, ядро оператора, ограниченный оператор, спектр, присоединенный вектор.

Key words: regular singularity, kernel of an operator, bounded operator, spectrum, associated vector.

Література

1. Sato T. Sur l'équation integrale // J. Math. Soc. Japan. 1953. V. 5. № 2. P. 145-153.
2. Takesada T. On the singular point of integral equations of Volterra type // J. Math. Soc. Japan. 1955. V. 7. № 2. P. 123-136.
3. Панов Л.И. Об интегральных уравнениях с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность произвольного порядка // ДАН Тадж. ССР. 1967. Т. 10. № 6. С. 3-7.
4. Магницкий Н.А. О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра I-го рода // ДАН СССР. 1977. Т. 235. № 4. С. 772-774.
5. Магницкий Н.А. Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра // ДАН СССР. 1978. Т. 240. № 2. С. 268-271.
6. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // Журнал выч. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19. № 4. С. 970-988.
7. Крейн С.Г., Сапронов И.В. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью // Докл. РАН. 1997. Т. 355. № 4. С. 450-452.
8. Крейн С.Г., Сапронов И.В. Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями // УМН. 1995. Т. 50. Вып. 4. С. 140.
9. Krein S.G., Saponov I.V. One class of solutions of Volterra equation with regular singularity // Укр. мат. ж. 1997. Т. 49. № 3. С. 424-432.

Пимонов Є. І. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – ст.викл. Нестеренко О. В.

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

(Харків, Україна)

КВАДРАТИЧНА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ ЗА ЇЇ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ

Апроксимація - наближене зображення одних математичних об'єктів іншими, простішими.

Основна задача. Проводимо експеримент та одержимо експериментальні значення деякого закону $y = f(x)$. Знайти многочлен другого степеня, який апроксимує закон, за яким робимо експеримент.

x	x_1	x_2	x_3	x_3	x_3		x_n
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		y_n

Постає питання, чи можна апроксимувати квадратним тричленом невідому функцію-закон і як простіше це зробити?

Припустимо, що розглядаємо значення аргументу, які є рівновіддаленими, тобто вони утворюють арифметичну прогресію:

$$x_2 = x_1 + \square, x_3 = x_1 + 2\square, \dots, x_n = x_1 + (n - 1)\square.$$

Знайдемо різниці значень функції

$$y_2 - y_1 = f(x_1 + \square) - f(x_1) = \Delta y_1 = \Delta f(x_1),$$

$$y_3 - y_2 = f(x_1 + 2\Delta x) - f(x_1 + \Delta x) = \Delta y_2 = \Delta f(x_1 + \Delta x),$$

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= f(x_1 + (n-1)\square) - f(x_1 + (n-2)\square) = \Delta y_{n-1} = \\ &= \Delta f(x_1 + (n-2)\square). \end{aligned}$$

Ці значення називаються *першими різницями* функції, або *різницями першого порядку*. За ними можна скласти різниці другого порядку, або *другі різниці*

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots, \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2},$$

а, отже, різниці будь якого порядку. Записуємо різниці в один рядок із від'ємником у таблицю. Оскільки різниці функцій бувають малими, то їх прийнято записувати у одиницях останнього знака без нулів попереду.

Критерій того, що функція може бути подана у вигляді многочлена за експериментальними даними формулюється таким чином: якщо n —ні різниці функції, які утворюються для рівновіддалених значень аргументу для будь якого кроку Δx , сталі, тобто не відрізняються, то функція є многочлен степеня n .

Висновок: якщо другі різниці рівні, або мало відрізняються між собою, то функція, яку досліджуємо, можна подати у вигляді квадратного тричлена.

Знаходження функції $Y = a + bx + cx^2$, яка апроксимує функцію $y = f(x)$. ..

За методом найменших квадратів для визначення коефіцієнтів a, b, c маємо систему

$$\left. \begin{aligned} 2a + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Покажемо спосіб, який спрощує систему (1). Нехай значення x є точними та подані зі сталим кроком $x_{i+1} - x_i = \square$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) .

Вводимо замість x новий аргумент u . Якщо число спостережень непарне, $n = 2k + 1$, то беремо

$$u = \frac{x - x_{k+1}}{\square} \text{ або } x = x_{k+1} + u\square; \quad (2)$$

коли x послідовно приймає значення $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, \dots, x_{2k+1}$, то u буде приймати цілочисельні значення

$$-k, -k + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k - 1, k$$

Для випадку парного числа спостережень $n = 2k$ вводимо змінну u рівністю

$$u = \frac{2(x - x_k)}{\square} - 1 \text{ або } x = \frac{(u+1)\square}{2} + x_k. \quad (3)$$

Тоді, для значень $x: x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{2k}$ величина u буде дорівнювати

$$-2k + 1, \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, 2k - 1.$$

Якщо шукати залежність Y від u тобто коефіцієнти многочлена

$$Y = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 \quad (4)$$

то система вигляду (1) для визначення a_0, a_1, a_2 значно спроститься, оскільки сума непарних степенів буде дорівнювати нулю:

$$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n u_i^2 = 0 \quad (5)$$

Тоді, для обчислення коефіцієнтів функції (4) запишемо систему у вигляді

$$\left. \begin{aligned} na_0 + a_2 \sum_{i=1}^n u_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^n u_i^2 &= \sum_{i=1}^n u_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n u_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n u_i^4 &= \sum_{i=1}^n u_i^2 y_i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n u_i^4 - \sum_{i=1}^n u_i^2 y_i \sum_{i=1}^n u_i^2}{n \sum_{i=1}^n u_i^4 - (\sum_{i=1}^n u_i^2)^2} \\ a_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n u_i y_i}{\sum_{i=1}^n u_i^2} \\ a_2 &= \frac{n \sum_{i=1}^n u_i^2 y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n u_i^2}{n \sum_{i=1}^n u_i^4 - (\sum_{i=1}^n u_i^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким чином, апроксимуючий квадратний тричлен, який залежить від u буде знайдено. За формулами (2), (3) повертаємось до квадратного тричлена

$$Y = a + bx + cx^2.$$

Отже, квадратична апроксимація знайдена.

Література

- 1.Дубовик В.П. Вища математика / В.П. Дубовик, І.І. Юрик : Навч. посібник. А.С.К. – 2006. – 648с.
- 2.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления /Н.С. Пискунов. в 2 т. – М.: Интеграл-Пресс. 2004. – т. 1. – 416с.

УДК 004.932.2:004.93'1

Плиско В. С. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – доц. Гадецька С. В.

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)*

АНАЛІЗ МЕТОДІВ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ В ПРОЦЕСІ КЕРУВАННЯ ТРАНСПОРТНИМИ ПОТОКАМИ

У роботі здійснено аналіз методів цифрової обробки зображень, що закладені в основу функціонування сучасних систем керування транспортними потоками і засновані на математичному, програмному і інформаційному підґрунті. Проведена класифікація цих методів в залежності від задіяного математичного апарату, а також специфіки поставленої проблеми.

Бурхливий процес автомобілізації з кожним роком охоплює все більше число країн, постійно збільшується автомобільний парк, кількість людей, що втягують у сферу дорожнього руху. Ріст автомобільного парку і обсягу перевезень веде до збільшення інтенсивності руху, що в умовах міст з історично сформованою забудовою приводить до виникнення транспортної проблеми. Особливо гостро вона проявляється у вузлових пунктах вулично-дорожньої мережі.

Одночасно росте й кількість дорожньо-транспортних випадків, при цьому на перехрестях, що займають незначну частину території міста, концентрується більше 30% всіх ДТП. Забезпечення швидкого й безпечного руху в сучасних містах вимагає застосування комплексу заходів архітектурно-планувального й організаційного характеру. За останні роки в нашій країні і за рубежом інтенсивно ведуться роботи зі створення складних автоматизованих систем із застосуванням керуючих ЕОМ, засобів

автоматики, телемеханіки, диспетчерського зв'язку й телебачення для керування рухом у масштабах великого району або цілого міста. Досвід експлуатації таких систем переконливо свідчить про їхню ефективність у рішенні транспортної проблеми [1, 2].

При цьому багатоплановим завданням є задача обробки зображень як важливої дієвої складової вищеназваних систем. Сюди включають рішення завдань фільтрації шумів, геометричної корекції, градаційної корекції, посилення локальних контрастів, різкості.

Метою даної роботи є аналіз методів цифрової обробки зображень, що закладені в основу функціонування сучасних систем керування транспортними потоками і засновані на серйозному математичному, програмному і інформаційному підґрунті.

Зауважимо, що з різних точок зору вказані методи підлягають різноплановій класифікації.

Так, з позицій використання обчислювальних засобів існуючі методи цифрової обробки зображень можна розділити на структуровані і неструктуровані. Структуровані методи побудовані на використанні великих обчислювальних (програмних) блоків, що оперують векторами звітів, а не окремими звітами зображень. Неструктуровані методи - ті, які не можна представити більшими стандартними блоками, ніж звичайні для виконання арифметико-логічних операцій над окремими звітами сигналів існуючими цифровими обчислювальними машинами. Неструктуровані методи, як правило, виникають на початковій стадії пошуку рішення змістовних завдань обробки зображень і в міру знаходження рішення переростають у структуровані.

Отже, структурування методів обробки зображень є основою підвищення їхньої обчислювальної ефективності, побудови обчислювальних машин обробки зображень, а також спеціального математичного забезпечення таких машин.

Наведені методи дозволяють здійснити нелінійне посилення високочастотної складової зображення, що приводить до підвищення детальності зображень, однак супроводжується зменшенням контрастності тонкоструктурних об'єктів. Можливим способом усунення цього недоліку є використання зважених рангових перетворень. Крім застосувань для згладжування, посилення детальності, виділення деталей зображень і границь деталей, рангові алгоритми можна також вживати для вирішення багатьох інших завдань обробки зображень, зокрема, для діагностики статистичних характеристик перекручувань відеосигналу, стандартизації зображень, визначення статистичних характеристик відеосигналу й виміру текстурних ознак.

Психофізичні експерименти показують, що фотографічне або телевізійне зображення з підкресленими границями часто сприймається суб'єктивно краще, ніж фотометрично виконана продукція. Процедуру підкреслення границь реалізують за допомогою іншої групи методів - різницевих методів нечіткого маскування, використання яких приводить до посилення локальних контрастів деталей різних розмірів і поліпшенню візуального сприйняття зображень.

Зображення, які формуються під час різних досліджень, часто не використовують увесь діапазон можливих градацій яркостей, що визначає їхню низьку інформативність. Один з методів підвищення якості таких зображень полягає в нелінійному перетворенні значень відеосигналу, зокрема, у розширенні області використовуваних значень градацій яскравості на максимально можливий діапазон. Часто в основі таких перетворень лежить лінійне розтягання або гамма - корекція. Завдяки простій програмній реалізації і відносно високій швидкодії, цей метод набув широкого практичного застосування.

Інша група методів обробки зображень набула назву методів гістограмних перетворень. Гістограма розподілу яскравостей реального зображення, підданого лінійному квантируванню, має виражений підйом убік

малих рівнів. Тому візуалізація дрібних деталей на темних ділянках є слабкою, а самі зображення характеризуються низьким контрастом. З метою підвищення контрасту таких зображень використовують методи перетворення гістограми, сутність яких полягає у зміні яскравостей вихідного зображення таким чином, щоб відповідна гістограма розподілу придбала бажану форму. Оскільки оптимальним з погляду зорового сприйняття людиною є зображення, елементи якого мають рівномірний розподіл яскравостей, велика кількість дослідників спрямовували свої зусилля на одержанні поліпшених зображень шляхом вирівнювання гістограми, і в кожному випадку вони прагнули досягти рівномірності розподілу яскравостей обробленого зображення. Так, У. Фрэй [3] досліджував метод видозміни гістограм, що забезпечував експонентну або гіперболічну форму розподілу яскравостей поліпшеного зображення. Д. Кетчам [3] удосконалив цей метод, застосувавши ковзну "локальну" гістограму, отриману для деякої ділянки зображення. Існує також ряд відомих методів видозміни гістограми, які приводять до одержання зображень із заздалегідь заданим розподілом.

Інший поширений спосіб підвищення якості зображень ґрунтується на перетворенні локальних контрастів. Основна ідея полягає в тому, що для кожного елемента зображення спочатку визначається локальний контраст, а потім відбувається його нелінійне посилення й відновлення яскравості даного елемента зображення із скорегованого локального контрасту. Наведений підхід є класичним прикладом методу класу перетворення локальних контрастів, який дозволяє вирішувати завдання не тільки поліпшення візуальної якості зображень, але й реалізовувати як високочастотну, так і низькочастотну фільтрацію за допомогою застосування різних функцій перетворення локальних контрастів.

Література

1. Алексієв В.О. Принципи інтелектуалізації моніторингу транспортних засобів та систем / В.О. Алексієв, В.О. Хабаров, О.В. Дзюбенко // Автомобильный транспорт : Сборник научн. трудов. – 2007. – Вып. 20. – С. 143–145.
2. Костюченко С.М. Оценка состояния транспортных систем в задачах управления движением // Автомобильный транспорт, вып. 9, 2002. - С.115 - 117.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982.— Т. 2. — 790 с.

Соколов А. А. (студ., 1 курс)
 Научный руководитель – доц. Смирнова Е. В.
Воронежский государственный лесотехнический университет
(Воронеж, РФ)

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПРЯМОЙ СХЕМЫ НА ПРИМЕРЕ ОДНОЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу оптимального управления для дескрипторной системы с матрично возмущенной правой частью уравнения состояния.

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} x'(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (x'(t) W x(t) + u'(t) R u(t)) dt \rightarrow \min_u, \quad (1)$$

$$A \frac{dx(t)}{dt} = (C_0 + \varepsilon C_1) x(t) + Du(t), \quad (2)$$

$$Ax(0) = x^0. \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ малый параметр, $x(t) \in R^m$, $u(t) \in R^r$, $t \in [0, T]$, штрих означает транспонирование, $\dim \text{Ker } A = 1$, $F = F' > 0$, $W = W' \geq 0$, $R = R' > 0$.

Пусть выполнены условия:

$$QC_0P = 0, \quad QC_1P \neq 0, \quad QD = 0, \quad QC_0A_+(I - Q)C_0P \neq 0, \quad (4)$$

где A_+ – обратный к оператору $(I - Q)A(I - P) : \text{Im } A' \rightarrow \text{Im } A$, P – ортогональный проектор R^m на $\text{Ker } A$, Q – ортогональный проектор R^m на $\text{Ker } A'$, соответствующие разложениям $R^m = \text{Ker } A \oplus \text{Im } A' = \text{Ker } A' \oplus \text{Im } A$.

Для построения асимптотики решения будем использовать метод прямой схемы [1]. Этот способ нахождения приближенного решения заключается в непосредственной подстановке постулируемого

асимптотического разложения решения в условия задачи и определении серии задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики.

Асимптотику решения задачи P_ε будем искать в виде

$$z(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq -1} \varepsilon^j (\bar{z}_j(t) + \Pi_j z(\tau_0) + Q_j z(\tau_1)) \quad (5)$$

Здесь $z' = (x', u')$, $\tau_0 = \frac{t}{\varepsilon}$, $\tau_1 = \frac{t-T}{\varepsilon}$, $\Pi_j z(\tau_0)$, $Q_j z(\tau_1)$ - функции пограничного слоя в окрестностях $t=0$, $t=T$ соответственно, $\|\Pi_j z(\tau_0)\| \leq C e^{-\kappa \tau_0}$, $\|Q_j z(\tau_1)\| \leq C e^{\kappa \tau_1}$, $C, \kappa > 0$.

Подставим разложение (5) в (2), представим правую часть в виде функций, зависящих от t , τ_0 , τ_1 и разложим, левые и правые части в (2) в степенные ряды по ε , отдельно зависящие от t , τ_0 , τ_1 .

$$A \frac{d\bar{x}_j(t)}{dt} = C_0 \bar{x}_j(t) + C_1 \bar{x}_{j-1}(t) + D \bar{u}_j(t),$$

$$A \frac{d\Pi_j x(\tau_0)}{d\tau_0} = C_0 \Pi_{j-1} x(\tau_0) + C_1 \Pi_{j-2} x(\tau_0) + D \Pi_{j-1} u(\tau_0),$$

$$A \frac{dQ_j x(\tau_1)}{d\tau_1} = C_0 Q_{j-1} x(\tau_1) + C_1 Q_{j-2} x(\tau_1) + D Q_{j-1} u(\tau_1), \quad j \geq -1,$$

Подставляя (5) в начальное условие (3), получим

$$A \bar{x}_0(0) + A \Pi_0 x(0) = x^0, \quad A \bar{x}_j(0) + A \Pi_j x(0) = 0, \quad \text{при } j \neq 0.$$

Подставляя (5) в (1), подынтегральную функцию представим в виде суммы функций, зависящих от t , τ_0 , τ_1 . При интегрировании функций, зависящих от τ_0 , τ_1 , перейдем к интегрированию по τ_0 , τ_1 на промежутках $[0; +\infty)$, $(-\infty; 0]$ соответственно (см [2]). Тогда (1) запишется в виде

$$J_{\varepsilon}(u) = \sum_{j \geq -2} \varepsilon^j J_j. \quad (6)$$

Для определения $\bar{z}_{-1}(t)$ получим задачу

$$P_{-1} : J_{-2} = \bar{J}_{-1}(\bar{u}_{-1}) = \frac{1}{2} (x_{-1}(T))' F x_{-1}(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (\bar{x}'_{-1} W \bar{x}_{-1} + \bar{u}'_{-1} R \bar{u}_{-1}) dt \rightarrow \min_{\bar{u}_{-1}},$$

$$A \frac{d \bar{x}_{-1}}{dt} = C_0 \bar{x}_{-1} + D \bar{u}_{-1}, \quad A \bar{x}_{-1}(0) = 0.$$

При этом отметим, что $(I - P) \Pi_{-1} x(\tau_0) \equiv 0$, $(I - P) Q_{-1} x(\tau_1) \equiv 0$,
 $P Q_{-1} x(0) = -(P F P)^{-1} P F \bar{x}_{-1}(T).$

При предположении, что операторы $Q C_0 (I - P) : \text{Im} A' \rightarrow \text{Ker} A'$,
 $(I - Q) C_0 P : \text{Ker} A \rightarrow \text{Im} A$ имеют обратные, можно доказать, что задача P_{-1}
имеет только решение: $\bar{x}_{-1}(t) = \bar{u}_{-1}(t) \equiv 0$. Будем использовать обозначения
 $A_1 = -A(Q C_0 (I - P))^{-1} Q C_1 P$, $\tilde{C}_0 = (Q C_0 (I - P))^{-1}$.

Коэффициент J_{-1} из (6) преобразуем к виду $J_{-1} = \Pi J_{-1} + Q J_{-1}$ и
рассмотрим задачи ΠP_{-1} , $Q P_{-1}$ для определения (-1)-го приближения
функций погранслоев.

$$\Pi P_{-1} : \Pi J_{-1} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} ((\Pi P_{-1} x)' P W \Pi P_{-1} x + (\Pi_{-1} u)' R \Pi_{-1} u) d\tau_0 \rightarrow \min_{\Pi_{-1} u},$$

$$\frac{d A_1 \Pi P_{-1} x}{d \tau_0} = C_0 \Pi P_{-1} x + D \Pi_{-1} u, \quad A_1 \Pi P_{-1} x(0) = x^0,$$

$$(I - P) \Pi_{-1} x(\tau_0) \equiv 0.$$

$$Q P_{-1} : Q J_{-1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 ((P Q_{-1} x)' P W P Q_{-1} x + (Q_{-1} u)' R Q_{-1} u) d\tau_1 \rightarrow \min_{Q_{-1} u},$$

$$\frac{d A_1 P Q_{-1} x}{d \tau_1} = C_0 P Q_{-1} x + D Q_{-1} u, \quad A_1 P Q_{-1} x(0) = 0,$$

$$(I - P) Q_{-1} x(\tau_1) \equiv 0.$$

При условии устойчивости оператора $((I - Q)A_1P)^{-1}C_0P$, получим $PQ_{-1}x(\tau_1) = Q_{-1}u(\tau_1) \equiv 0$, $(I - P)Q_0x(\tau_1) \equiv 0$. Преобразовывая из (6) коэффициент при $j = 0$, получим $J_0 = \bar{J}_0 + \bar{a}_0$, где $\bar{a}_0$ – известная после решения задачи PP_{-1} величина. Задача P_0 для определения $\bar{z}_0(t)$ аналогична P_{-1} , поэтому $\bar{x}_0(t) = \bar{u}_0(t) \equiv 0$, $PQ_0x(0) = 0$. Коэффициент $J_1 = PJ_0 + QJ_0 + a_1$, где PJ_0 , QJ_0 – определяют критерии качества в задачах PP_0 , QP_0 соответственно, а a_1 – известная величина после решения задачи PP_{-1} . Задача QP_0 аналогична задаче QP_{-1} , поэтому $Q_0x(\tau_1) = Q_0u(\tau_1) \equiv 0$.

Задача PP_0 имеет вид

$$PJ_0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty ((P\Pi_0x)'PWP\Pi_0x + (\Pi_0u)'R\Pi_0u + 2(P\Pi_0x)'b_1)d\tau_0 \rightarrow \min_{\Pi_0u}, \quad \text{где}$$

$$b_1 = PW(I - P)\Pi_0x - (\tilde{C}_0QC_1P)'WP\Pi_{-1}x + (C_0\tilde{C}_0QC_1 - C_1)'(I - Q)\Pi_{-1}\psi - (A(\tilde{C}_0QC_1)^2)' \frac{d(I - Q)\Pi_{-1}\psi}{d\tau_0} - \text{известная, после решения задачи } PP_{-1},$$

величина, $\Pi_{-1}\psi$ – сопряженная переменная из задачи PP_{-1} ,

$$\frac{dA_1P\Pi_0x}{d\tau_0} = C_0P\Pi_0x + D\Pi_0u - \frac{d(A(\tilde{C}_0QC_1)^2P\Pi_{-1}x)}{d\tau_0} - (C_0\tilde{C}_0QC_1 - C_1)P\Pi_{-1}x,$$

$$A_1P\Pi_0x(0) = A\tilde{C}_0QC_1(I - P)\Pi_0x(0),$$

$$(I - P)\Pi_0x(\tau_0) = -\tilde{C}_0QC_1P\Pi_{-1}x(\tau_0).$$

Аннотация. В статье применяется метод прямой схемы для решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления дескрипторной системы с сингулярно возмущенной правой частью. Получены задачи для нахождения первых двух приближений решения.

Ключевые слова: прямая схема, дескрипторная система

Abstract. The paper uses the direct scheme method to solve the linear-quadratic optimal control problem of a descriptor system with a singularly

perturbed right-hand side. Problems for finding the first two approximations of the solution are obtained.

Key words: *direct scheme, descriptor system*

Литература

1. Белокопытов, С.В. Решение классических задач оптимального управления с погранслоем / С.В. Белокопытов, М.Г. Дмитриев // Автоматика и тетемеханика. 1989. № 7. С. 71-82
2. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. О некоторых сингулярно возмущенных задачах оптимального управления // Проблемы устойчивости и управления / Сборник научных статей, посвященных 80-летию академика В.М. Матросова. М.: Физматлит, 2013. С. 148-161.

УДК 517.928.2

Татаринцев В. Ю. (студ., 2 курс)

Научный руководитель – доц. Зюкин П. Н.

Воронежский государственный лесотехнический университет
(Воронеж, РФ)

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЯВЛЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ В СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Пусть $\mathbf{C}^3$ – комплексное трёхмерное векторное пространство, $C^4([0,1]; \mathbf{C}^3)$ – пространство четырежды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций со значениями в $\mathbf{C}^3$. Для системы дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \frac{dy_\varepsilon}{dx} + B(x)y_\varepsilon + f(x) = \bar{0}, \quad (1)$$

где $x \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $f(x) \in C^4([0,1]; \mathbf{C}^3)$, $\bar{0}$ – нулевой вектор пространства $\mathbf{C}^3$, $B(x)$ – жорданова клетка третьего порядка с собственным значением $\lambda(x) \in C^4([0,1]; \mathbf{C}^1)$, $\lambda(0) \neq 0$, $\operatorname{Re} \lambda(x) = x^k$, k – натуральное число, $k > 1$, рассматривается задача Коши

$$y_\varepsilon(0) = -B^{-1}(0)f(0) + \psi, \quad (2)$$

где ψ не зависит от ε .

Определение. Будем говорить, что для функций $y_\varepsilon(x) \in C([0,1]; \mathbb{C}^3)$ ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$) имеет место явление пограничного слоя по отношению к функции $y_0(x) \in C([0,1]; \mathbb{C}^3)$ в точке $x=0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если функции $y_\varepsilon(x)$ сходятся к $y_0(x)$ равномерно по $x \in [\delta, 1]$ на любом отрезке $[\delta, 1]$ ($\delta > 0$) и не сходятся к $y_0(x)$ равномерно по $x \in [0, 1]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если при этом существует промежуток $(0, \varepsilon'_0] \subseteq (0, \varepsilon_0]$ такой, что функции $y_\varepsilon(x)$ равномерно ограничены по $x \in [0, 1]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0]$, то будем говорить, что для них имеет место явление ограниченного пограничного слоя по отношению к функции $y_0(x)$ в точке $x=0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; в противном случае будем говорить, что для них имеет место явление неограниченного пограничного слоя по отношению к функции $y_0(x)$ в точке $x=0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В статье [1] для решений $y_\varepsilon(x)$ задачи Коши (1), (2) (в частности) при $\psi = \bar{0}$ получены необходимые и достаточные условия существования явления ограниченного пограничного слоя и явления неограниченного пограничного слоя по отношению к решению $y_0(x) = -B^{-1}(x)f(x)$ предельной ($\varepsilon = 0$) для (1) системы уравнений в точке $x=0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В данной работе такие условия получены в случае $\psi \neq \bar{0}$, $f(0) = f'(0) = \bar{0}$.

Для всякого вектора $z \in \mathbb{C}^3$ через $P_j z$ будем обозначать его j -ю компоненту, $j = 1, 2, 3$.

Теорема 1. Если в задаче Коши (1), (2) $\psi \neq \bar{0}$, $f(0) = f'(0) = \bar{0}$, то для решений $y_\varepsilon(x)$ этой задачи явление ограниченного пограничного слоя по отношению к решению $y_0(x)$ предельной ($\varepsilon = 0$) для (1) системы уравнений в точке $x=0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $P_2 \psi = P_3 \psi = 0$.

Теорема 2. Если в задаче Коши (1), (2) $\psi \neq \bar{0}$, $f(0) = f'(0) = \bar{0}$, то для решений $y_\varepsilon(x)$ этой задачи явление неограниченного пограничного слоя по отношению к решению $y_0(x)$ предельной ($\varepsilon = 0$) для (1) системы уравнений в

точке $x=0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел $P_2\psi$, $P_3\psi$ отлично от нуля.

Приведём примеры задач Коши, для которых выполнены условия теорем 1, 2 и имеют место указанные в этих теоремах явления пограничного слоя.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши (3), (4), получающуюся из задачи (1), (2) при $\lambda(x) \equiv x^2 + i$ (i – мнимая единица), $f(x) \equiv \bar{0}$, $P_1\psi = 1, P_2\psi = P_3\psi = 0$. Для задачи (3), (4) условия теоремы 1 выполнены. Решение этой задачи имеет вид

$$y_\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{x^3}{3\varepsilon} - \frac{x}{\varepsilon}i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому очевидно, что для решений $y_\varepsilon(x)$ задачи Коши (3), (4) имеет место явление ограниченного пограничного слоя по отношению к решению $y_0(x) = \bar{0}$ предельной ($\varepsilon = 0$) для (3) системы уравнений в точке $x=0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши (5), (6), получающуюся из задачи (1), (2) при $\lambda(x) \equiv x^2 + i$ (i – мнимая единица), $f(x) \equiv \bar{0}$, $P_1\psi = P_3\psi = 0, P_2\psi = 1$. Для задачи (5), (6) условия теоремы 2 выполнены. Решение этой задачи имеет вид

$$y_\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\varepsilon} e^{-\frac{x^3}{3\varepsilon} - \frac{x}{\varepsilon}i} \\ e^{-\frac{x^3}{3\varepsilon} - \frac{x}{\varepsilon}i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\max_{x \in [0,1]} \left(\frac{x}{\varepsilon} e^{\frac{x^3}{3\varepsilon}} \right) \rightarrow +\infty$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, то для решений $y_\varepsilon(x)$ задачи Коши (5), (6) имеет место явление неограниченного пограничного слоя по отношению к решению $y_0(x) = \bar{0}$ предельной ($\varepsilon = 0$) для (5) системы уравнений в точке $x = 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных и матрицей коэффициентов при неизвестных, являющейся жордановой клеткой третьего порядка. Начальное условие задачи задано в нуле. Предполагается, что значения решений задачи в нуле не зависят от малого параметра и не совпадают со значением решения соответствующей предельной системы уравнений в нуле. В специальном случае получены необходимые и достаточные условия существования явления ограниченного пограничного слоя и явления неограниченного пограничного слоя по отношению к решению соответствующей предельной системы уравнений при стремлении параметра к нулю.

Abstract. The Cauchy problem is considered for a system of differential equations with a small parameter for derivatives and a matrix of coefficients for unknowns, which is a third-order Jordan cell. The initial condition of the problem is set to zero. It is assumed that the values of the solutions of the problem at zero do not depend on a small parameter and do not coincide with the value of the solution of the corresponding limit system of equations at zero. In the special case, we obtain the necessary and sufficient conditions for the existence of the phenomenon of a bounded boundary layer and the phenomenon of an unbounded boundary layer with respect to the solution of the corresponding limit system of equations when the parameter tends to zero.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, малый параметр, явление пограничного слоя.

Key words: system of differential equations, small parameter, boundary layer phenomenon.

Литература

1. Зюкин, П. Н. О явлении пограничного слоя для решений специальной задачи Коши [Текст] / П. Н. Зюкин // Вестник факультета прикладной математики и механики : сборник статей, ВГУ. - Воронеж, 1998. - Вып. 1. - С. 63-67.

Чабанов І. О. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – ст. викл. Михайленко І. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ МЕРЕЖЕВОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПІДПРИЄМСТВ ТРАНСПОРТУ

У багатьох задачах математики, інформатики та технічних дисциплін виникає необхідність відображення відношень між деякими об'єктами. Графи – це природна модель таких відношень. Найкращою ілюстрацією може слугувати карта автошляхів. Міста – це вершини графів, а дороги – його ребра. Теорія графів відноситься до дискретної математики, яка є теоретичною основою для побудови алгоритмів та написання комп'ютерних програм.

Транспорт, будучи одним з головних національних ресурсів, виконує суттєву роль у розвитку виробничого та економічного потенціалу країни. Стрімкий розвиток інформаційно-комунікаційних технологій та посилення конкуренції на ринку транспортно-логістичних послуг спонукає підприємства транспорту до пошуку нових інноваційних форм ведення бізнесу, заснованих на використанні основних положень теорії складних мереж.

Перша робота з теорії графів, що належить відомому швейцарському математику Л. Ейлеру, з'явилася у 1736 році та була присвячена розв'язуванню задачі про Кенігсберзькі мости. Питання полягало в тому, чи можна здійснити прогулянку містом так, щоб виходячи з дому, повернутися назад, пройшовши в точності по одному разу кожен із семи мостів. Цю задачу можна представити у вигляді геометричної схеми, на якій точки зображують частини суші, а лінії, які їх з'єднують – мости. (рис. 1)

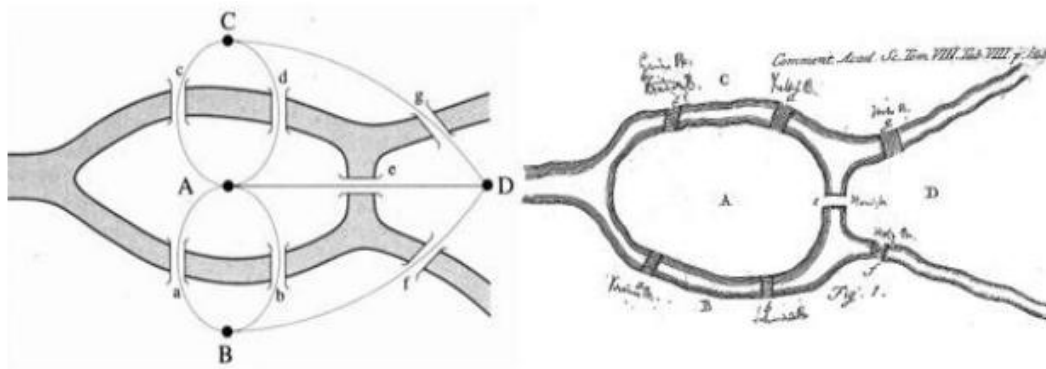


Рис. 1. Кенігсберзькі мости

Теорія графів використовується для завдання початкових умов під час моделювання транспортних потоків та систем, де моделюванню підлягають транспортні потоки автомагістралей. Для моделювання використовуються орієнтовані графи, задаються певні початкові умови, густина транспортного потоку на кожній дузі графу, а пошук оптимального рішення здійснюється за допомогою розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь [1].

Перші спроби графічної оптимізації транспортного обслуговування проводились в напрямках пошуку кращих маршрутів перевезення вантажів та пасажирів, взаємодія транспортних підприємств зазвичай розглядалась як співпраця відправника, посередника та отримувача вантажу, а алгоритми оптимізації передбачали багатоітераційні ручні розрахунки.

М.В. Правдін, В.Я. Негрей, В.О. Подкопаєв [2] пропонують використовувати поточкові орієнтовані графи обробки вантажів на залізниці і на автомобільному та річковому транспорті, де вузли – станції перевалки вантажів, а дуги орієнтованого графа – кількість вантажу (рис. 2).

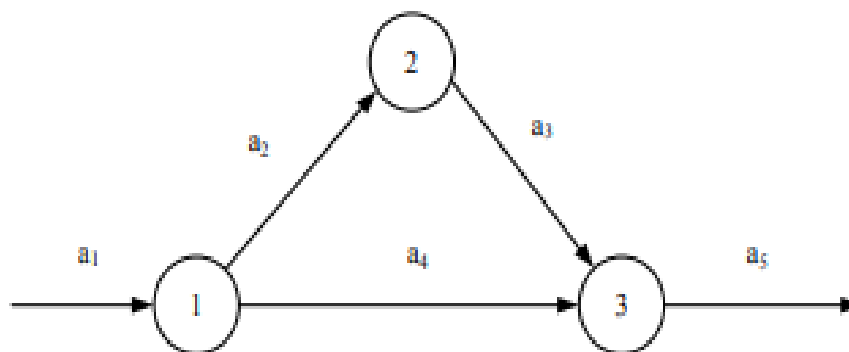


Рис. 2. Поточковий граф обробки вантажів. 1, 2, 3 – транспортні вузли;
 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – обсяги вантажу між вузлами.

Для більш масштабних перевезень авторами пропонується використовувати полігон транспортної мережі, де вузли – пункти виробництва, перевалки, споживання, а дуги – відстань між ними (рис. 3).

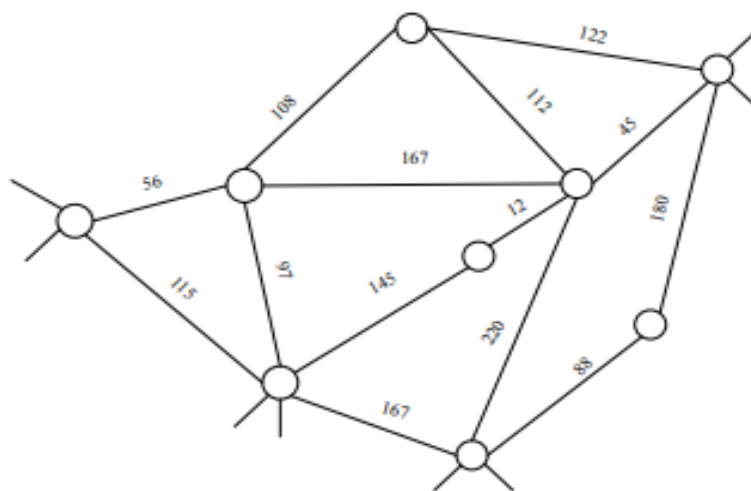


Рис. 3. Приклад полігону транспортної мережі

Використання теорії графів для вирішення завдань покращення транспортного обслуговування заслуговує на увагу. На основі дослідження широкого кола прикладних завдань застосування теорії графів на транспорті розглянемо можливості їх застосування під час моделювання мережових структур.

Мережі транспорту характеризуються наявністю вузлів з великою кількістю зв'язків між підприємствами різних видів транспорту, постачальниками, посередниками, споживачами тощо. У процесі моделювання мережової взаємодії транспортних підприємств дуже важливими є зв'язки кожного вузла з найближчими партнерами для швидкого та ефективного взаємообміну ресурсами, технологіями, досвідом. У процесі дослідження транспортних потоків важливою характеристикою мережі є навантаження її вузлів. Навантаження вузла з позицій теорії графів характеризує важливість вузла у мережі. Чим більше навантаження на вузол, то вище його важливість для мережі та ступінь довіри до нього.

Висновки. Графи – це унікальні математичні об'єкти, за допомогою яких можна розв'язувати математичні, економічні та логічні задачі, спрощувати та моделювати фізичні та хімічні процеси і явища, складати

схеми і графіки. Окрім того, мовою теорії графів зручно ілюструвати цілу низку математичних фактів. Теорія графів допомагає моделювати взаємозв'язки між підприємствами та оптимізувати їх, є науковим підґрунтям для отримання мережевого ефекту від партнерської співпраці. Дуги орієнтованих графів ілюструють вплив одних підприємств транспорту на інші, доступ до інформації та ступінь повноважень у мережі.

Література

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков : учеб. пособие / А.В. Гасников, С.Л. Кленов, Е.А. Нурминский, Я.А. Холодов, Н.Б. Шамрай ; Приложения: М.Л. Бланк, Е.В. Гасникова, А.А. Замятин, В.А. Малышев, А.В. Колесников, А.М. Райгородский ; под ред. А.В. Гасникова. – М. : МФТИ, 2010. – 360 с.
2. Правдин Н.В. Взаимодействие различных видов транспорта: примеры и расчеты / Н.В. Правдин, В.Я. Негрей, В.А. Подкопаев. – М. : Транспорт, 1989. – 208 с.
3. Розв'язування задач за допомогою графів [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://ua-referat.com/> Розв'язування_задач_за_допомогою_графів.
3. Швачич Г.Г. Основи дискретної математики. / Г.Г. Швачич, Г.М. Бартенев, О.В. Онищенко, В.В. Толстой. Частина III. Основи теорії графів: Навч. посібник (російською мовою). – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2014. – 67 с.

УДК 517.928

Шиян В. О. (студ., 4 курс)

Науковий керівник – доц. Рашевський М. О.

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка
(Київ, Україна)*

АСИМПТОТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ МАТРИЦІ ІМПУЛЬСНИХ ПЕРЕХІДНИХ ФУНКЦІЙ НЕСТАЦІОНАРНОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Система оптимального керування, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(\tau, \varepsilon)}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x(\tau, \varepsilon) + B(\tau, \varepsilon)u(\tau, \varepsilon), \quad (1)$$

неодноразово досліджувались [4] у різних припущеннях про її коефіцієнти. Тут $x(\tau, \varepsilon)$ – невідомий n - вимірний вектор, $A(\tau, \varepsilon)$ та $B(\tau, \varepsilon)$ – відповідно $n \times n$ та $n \times r$ - матриці динамічних коефіцієнтів системи, що є функціями повільного часу $\tau = \varepsilon t$, $\tau \in [0; L]$, $L < +\infty$, і допускають зображення збіжними

рядами за степенями дійсного малого параметра $\varepsilon > 0$; $u(\tau, \varepsilon)$ – r - вимірний вектор керування. Система (1) є системою рівнянь із змінними коефіцієнтами, тому, як правило, не зводиться до квадратур, і для побудови її розв'язку використовують асимптотичні методи. Для побудови асимптотичного зображення розв'язку необхідно враховувати характер спектру матриці $A(\tau, 0)$. Системи керування із нестабільним спектром почали вивчатися відносно недавно [1]. У роботі [2] побудовано асимптотичне зображення матриці імпульсних перехідних функцій системи (1) із майже діагональною матрицею $A(\tau, \varepsilon)$. У цій роботі розглянемо випадок наявності жорданової клітини у матриці $A(\tau, 0)$ з точкою повороту [3].

Надалі вимагатимемо виконання таких умов.

1⁰. Матриця $A(\tau, \varepsilon)$ на сегменті $[0; L]$ диференційовна до порядку m включно; $m \geq 1$ – натуральне число.

2⁰. Корені $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \dots, \lambda_n(\tau)$ рівняння $P(\lambda, \tau) \equiv \det\|A(\tau, 0) - \lambda E\| = 0$ є різними на $(0; L]$ і збігаються при $\tau = 0$ так, що $A(0, 0)$ подібна жордановій клітині довжини n із нульовою діагоналлю.

Якщо виконано умови 1⁰ і 2⁰, то існує неособлива m разів диференційовна матриця $P(\tau, \varepsilon)$ така, що підстановка $x(\tau, \varepsilon) = P(\tau, \varepsilon)z(\tau, \varepsilon)$ зводить систему рівнянь

$$\frac{dx(\tau, \varepsilon)}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x(\tau, \varepsilon) \quad (2)$$

до такого ж вигляду з матрицею $A(\tau, \varepsilon)$, що має нормальну форму Арнольда. Вважатимемо, що описане перетворення вже виконано, і застосуємо метод [3] для побудови фундаментальної матриці системи (2). У припущенні, що точка повороту $\tau = 0$ є простою, тобто $\left. \frac{d}{d\tau} (\det A(\tau, 0)) \right|_{\tau=0} \neq 0$, фундаментальна матриця $\Phi(\tau, \varepsilon)$ матиме двомасштабне асимптотичне зображення вигляду:

$$\Phi(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{j=0}^n Z^{(j)}(\varepsilon^{-\alpha} \xi) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_{jk}(\varepsilon^{-\alpha} \xi), & \tau \in [0; L_1 \varepsilon^\alpha], \\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(\tau) \exp \left\{ \int_{\tau_1}^t \Lambda_k(s) ds \right\}, & \tau \in [L_2 \varepsilon^\alpha; L], \end{cases} \quad \alpha = \frac{n}{n+1}, \quad \xi = \left(\frac{n+1}{n} \int_9^\tau a_{n1}(s) ds \right)^{\frac{n}{n+1}}. \quad (3)$$

Тут $Z^{(j)}(s)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння Ейрі $Z^{(n)}(s) + sZ(s) = 0$, а L_1 і L_2 – сталі, що не залежать від ε , $L_1 < L_2$. Зрощування асимптотичних зображень можна виконати методом [3], визначаючи матрицю C із рівності

$$\sum_{j=0}^n Z^{(j)}(\varepsilon^{-\alpha} \xi(L_3)) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_{jk}(\varepsilon^{-\alpha} \xi(L_3)) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k((L_3)) \exp \left\{ \varepsilon^{-1} \int_{\tau_1}^{L_3} \Lambda_k(s) ds \right\} \cdot C. \quad L_1 < L_3 < L_2.$$

Маючи фундаментальну матрицю системи (2), яку запишемо за допомогою розбиття одиниці, та повторивши міркування [4, стор. 101], дістанемо асимптотичне зображення матриці $G(t, \xi, \varepsilon)$ імпульсних перехідних функцій системи (1):

$$G(t, \xi, \varepsilon) = \Phi_m(\tau, \varepsilon) \cdot \Phi_m^{-1}(\varepsilon \xi, \varepsilon) B(\varepsilon \xi, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{mn}{n+1}}\right),$$

де $\Phi_m(\tau, \varepsilon)$ – m -наближення [4], отримане із (3).

У роботі [4, стор. 92] розглянуто задачу розв'язання рівняння

$$\frac{d^2 x(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + \omega^2(\tau, \varepsilon) x(\tau, \varepsilon) = u(\tau)$$

зі скалярним керуванням $u(\tau)$ на проміжку $[0; 1]$, де

$$\omega(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \omega_s(\tau), \quad \omega_0(\tau) > 0.$$

Остання умова виключає наявність точок повороту, які виникають там, де $\omega_0(\tau) = 0$. Фізичний зміст цього нуля і його реальність у конкретних системах потребує окремого дослідження.

Рівняння, що описує у лінійній постановці рух системи автоматичного керування при повільній зміні параметрів об'єкта і регулятора

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon a(\tau, \varepsilon) \frac{dx}{dt} + b(\tau, \varepsilon)x = \varepsilon h(\tau) \int_{-\infty}^t G(t - t_1, \tau_1, \varepsilon)x(t_1, \varepsilon) dt_1$$

досліджено у роботі [1]. Тут $G(t, \xi, \varepsilon)$ – імпульсна перехідна функція регулятора. Рівняння є окремим випадком системи (1). У роботі [1] також застосовано багатомасштабний метод побудови асимптотичного розв’язку. Проте для даного рівняння, як і для системи (1) розмірності $n = 2$ можна побудувати асимптотичне зображення без задіяння багатомасштабних розвинень.

Анотація. Побудовано асимптотичне зображення матриці перехідних імпульсних функцій нестационарної системи автоматичного керування при наявності нестійкостей у спектрі головної матриці.

Ключові слова: асимптотичне зображення, матриця імпульсних перехідних функцій, точка повороту.

Література

1. Leifura V. N. On One Problem of Automatic Control with Turning Points. *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics* : Proceedings of the Second International Conference, Kyiv, 1997. V. 2. P. 488-491.
2. Рашевський М. О. Асимптотичний аналіз нестационарних систем автоматичного керування. *Математичне моделювання*. 2018. №2(39). С. 72-78.
3. Самойленко А. М., Самусенко П. Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем з точками повороту. I, *Український математичний журнал*, 2020, 72(12), 1669-1681.
4. Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Киев : Выща шк., 1985. 248 с.

Штеренберг Й. Э.
(участник Национальной кибер-программы «Magshimim»)
Научный руководитель – проф. Филер З. Е.
(Нетания, Израиль)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ ПРИ ПРОСТОЙ ПАРЕ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть в составе полинома $L(\lambda)$ характеристического уравнения для дифференциального уравнения $L[y]=f(t)$ есть множитель $\lambda^2+\omega^2$. Если остальные множители имеют отрицательные действительные части корней, то решения устойчивы, но не *асимптотически*. При отсутствии чисто мнимых корней *асимптотическая* устойчивость хорошо изучена, в том числе и нами [1; 2; 4]. Тогда точка О не лежит на годографе и, в случае устойчивости, охватывается им.

В статье приведен пример рассмотрения годографа Михайлова для уравнения с чисто мнимым корнем, характер переходного процесса при внешнем гармоническом возбуждении.

В настоящей статье годограф $L(i\omega)$ будет проходить через точку О. Угол φ поворота его радиуса-вектора при переходе через точку ω должен скачком увеличиться на π , так как он является решением задачи Коши

$$\varphi'(t)=(v'(t)\cdot\cos(\varphi) - u'(t)\cdot\sin(\varphi))/\sqrt{(u^2(t)+v^2(t))}, \varphi(0)=0; \quad (1)$$

оно должно иметь точку разрыва $t_0=\omega/(1+\omega)$ – скачок на $+\pi$, так как для финитизации аргумента делается замена $\omega=t/(1-t)$.

В качестве примера рассмотрим полином

$$L(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 8\lambda + 8. \quad (2)$$

Его корни $-2i$, $+2i$ и $-1-i$, $-1+i$ можно отыскать как в статье [3].

Финитизованный годограф даёт функцию

$$\begin{aligned} (1-t)^4 \cdot L(it/(1-t)) &= 8(1-t)^4 - 6t^2(1-t)^2 + t^4 + i(8t(1-t)^3 - 2t^3(1-t)) = u(t) + iv(t), \\ u(t) &= 8(1-t)^4 - 6t^2(1-t)^2 + t^4, \quad v(t) = 8t(1-t)^3 - 2t^3(1-t). \end{aligned} \quad (3)$$

Строим годограф $(u(t), v(t))$ для $t \in [0, 1]$. Точка $\omega=2$ даёт $t_0=2/(1+2)=2/3$. Она и даёт точку О на финитизированном годографе. Направление

касательной в точке определяется её угловым коэффициентом $k=v'(2/3)/u'(2/3) = -4/1 = -4$. На рис. 1 показана и эта касательная.

Угол поворота $\varphi(t) = \arctg(v(t)/u(t)) + k\pi$, где $k=0$ в первой четверти; в начале второй четверти $k=1$, а после $2/3$ $k=2$. Он найдётся с помощью уравнения (1) на отрезке $[0, 2/3)$ и далее продолженной задачи для того же уравнения с начальной точкой $\varphi(2/3)$ для отрезка $t \in (2/3, 0]$. Тогда $\varphi(1)$ должно дать угол $\Phi=2*\pi/2=\pi$.

Угол $\varphi(t) = \arctg(|v(t)/(u(t))|)$. На АВ: $\pi - \arctg(|v(t) / u(t)|)$, как и после В.

Неоднородное уравнение $L[y]=f(t)$ будет иметь устойчивое решение в нерезонансном случае (при отсутствии возбуждения с частотой ω). Общее решение *однородного* уравнения $y^{(4)}+2y^{(3)}+6y^{(2)}+8y'+8y=0$ будет иметь структуру $y=C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)+(C_3\cos(t)+C_4\sin(t))e^{-t}$. Очевидно, колебания частоты $\omega=1$ быстро затухают. Коэффициенты незатухающих колебаний определяются начальными условиями.

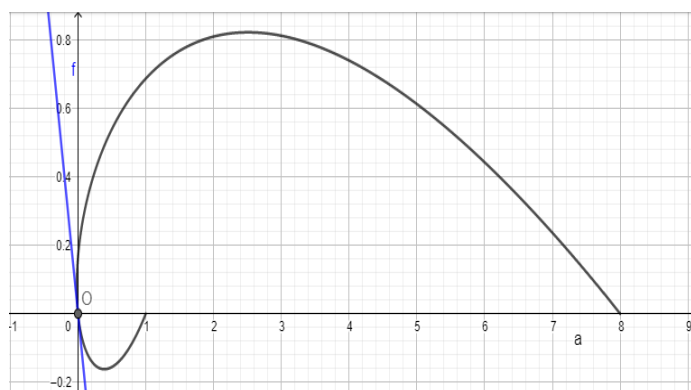


Рис. 1. Годограф уравнения $L[y]$

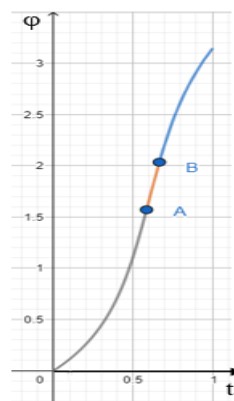


Рис. 2. Угол поворота радиуса

Рассмотрим численно-аналитическое решение *линейного* уравнения с гармоническим возбуждением $f(t) = 3\sin(0,6t)$ на отрезке $[0, 10\pi]$ (рис. 3):

$$y=C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)+(C_3\cos(t)+C_4\sin(t))\cdot e^{-t}+A\sin(0,6t)+B\cos(0,6t). \quad (4)$$

Постоянные C_k , $k=1..4$, найдутся из начальных условий; А и В - из подстановки последних двух слагаемых в уравнение. Для 6 линейных уравнений с 6 неизвестными получится система 6 алгебраических линейных уравнений. Можно ограничиться численным решением этого уравнения при

$f(t)=3\sin(0,6t)$. Коэффициенты A и B , найденные подстановкой в уравнение $L[y]=f(t)$, дают вынужденные колебания $y_B = A\sin(0,6t)+B\cos(0,6t) = 3\cdot(5,9696\sin(0,6t) - 4,368\cos(0,6t))/(5,9696^2+4,368^2) = 3(0,59696\sin(0,6t)-0,4368\cos(0,6t))/54,71554816\approx 0,0327\sin(0,6t)-0,0240\cdot \cos(0,6t)$. Для построения графика примем условия $C_1=1$, $C_3=-0,9$, $C_2=C_4=0$. На рис. 3 видны в переходном процессе колебания с частотой 1, собственные колебания с частотой 2 и вынужденные колебания с частотой 0,6. Период колебаний равен 10π - наименьшему общему кратному этих периодов.

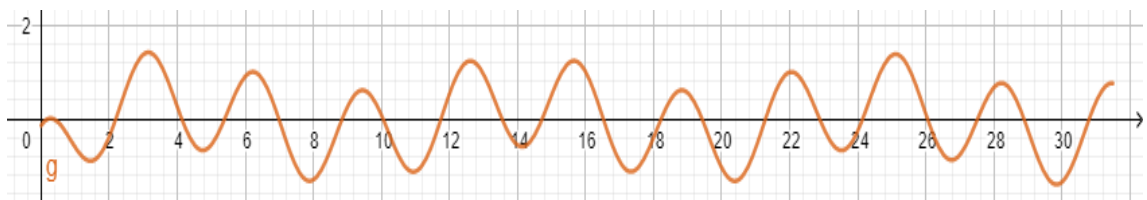


Рис. 3. Численное решение линейной задачи [5]

Выводы. На примере уравнения (2) показано построение финитизированного годографа, дающего неасимптотическую устойчивость, показан переходной режим в линейной системе.

Анотація: Розглядається побудова годографу характеристичного полінома у випадку простої пари чисто уявних коренів, що веде до неасимптотичної стійкості розв'язку, який має незатухаючі коливання в складі загального розв'язку.

Ключові слова: чисто уявний корінь, годограф, фінітизація, коливання в нерезонансній системі.

Annotation: We examine the construction of the hodograph of the characteristic polynomial in the case of the presence of a simple pair of purely imaginary roots, leading to non-asymptotic stability of a solution that has persistent oscillations as part of the general solution.

Key words: purely imaginary root, hodograph, finitization, oscillations in a nonresonant mode.

Литература

1. Філер З. Ю., Музиченко О. І. Коливання та стійкість систем із запізненнями // Інформаційні технології в освіті, науці і техніці. Матеріали VI Всеукраїнської конференції молодих науковців ІТОНТ-2008. 5-7 травня 2008 року. – Черкаси: ЧНУ, 2008. – С. 45.
2. Філер З. Е., Музиченко О. І., Шелуденко А. С. Стійкість лінійних систем. Навч. пос. – Кіровоград: КДПУ, 2010. – 65 с.
3. Филер З. Е., Штеренберг Й. Э. Комплексные корни действительной функции // X Международ. науч.-практ. конф. «Science, Society, Education: Topical issues and

Development Prospects”, 29-31.08.2020. – Харьков. – С.77-84. 4. Филер З.Е. Динамика вибрационных машин, взаимодействующих с асинхронными возбудителями и технологической нагрузкой/ Диссертация...доктора техн. наук. – Киев: КПИ, 1987. – 452 с.
5. <https://www.geogebra.org/>

Щербініна Ю. В. (студ., 1 курс),
Харченко С. Д. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц.. Пташний О. Д.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ПРО ВИБІР ПАРАМЕТРІВ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ВВЕДЕННЯ КАРАНТИННИХ ЗАХОДІВ

Відомо, одним з дійових засобів боротьби з епідеміями та пандеміями є карантинні заходи. Соціально-економічні наслідки введення карантину можуть суттєво впливати на суспільне життя, тому в основі прийняття таких рішень повинен бути, за можливістю, точний розрахунок, виважений аналіз усіх «за» та «проти».

Одним з ключових об’єктивних факторів, що впливають на прийняття рішень, є можливість лікувальних закладів забезпечити населення потрібним лікуванням. Ця можливість визначається наявністю койко-місць та підготовленого медичного персоналу, а також наявністю необхідного медичного обладнання. Об’єктивний характер цих факторів дозволяє будувати модель для обґрунтування прийняття рішень.

Метою розробки математичної моделі процесу є, у кінцевому разі, та чи інша оптимізація. Тобто починати треба з вибору параметрів, які варто враховувати та які треба оптимізувати. У нашому випадку, щоб запобігти введенню всеосяжного карантину, треба ввести поняття групи ризику. Ми введемо це поняття за віковою ознакою, як це має місце, наприклад, при COVID-19. Тобто поділимо населення на декілька вікових груп. Градація по віку та кількість груп визначається із врахуванням медичних показників та особливостей протікання хвороби. По складності проходження захворювання поділимо хворих на три категорії:

Категорія 1 – хворі у легкій формі, що не потребує госпіталізації.

Категорія 2 – хворі у середній формі (потребують госпіталізації без використання спеціального медичного обладнання).

Категорія 3 – хворі у тяжкій формі (потребують госпіталізації із використанням спеціального медичного обладнання).

Виділимо якийсь основний фактор, що впливає на складність протікання захворювання і може бути підданий попередньому обліку. Згідно з прийнятою ознакою групи ризику, це вік пацієнтів. Тоді можна конкретизувати мету створення моделі: визначення оптимального віку, починаючи з якого слід відправляти людей на карантин таким чином, щоб число пацієнтів у лікарнях відповідало їхній максимальній пропускній спроможності.

Таким чином, створювана модель не є моделлю лікування пацієнтів, а є моделлю розподілу людей по застосуванню до них карантинних заходів з метою оптимізації завантаженості лікарень. Вводимо для нашого прикладу наступні вхідні дані та параметри:

1. Строки видужування або перебування у лікарні.

T_1 строк видужування хворих першої категорії; T_2, T_3 строки необхідного перебування у лікарні хворих другої та третьої категорій.

2. Точки актуальності.

Процеси захворювання, видужування та введення карантинних заходів розгортаються у часі. Зміни ситуації мають дискретний характер. Числа nT_1, nT_2, nT_3 , де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ розташуємо «на одному часовому рядку» у хронологічному порядку $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$. Будемо називати їх точками актуальності. У ці моменти часу поновлюються дані та відбувається перерахунок.

3. Пропускна спроможність лікарень та кількість вільних місць (для пацієнтів) у лікарні:

M_2, M_3 - пропускна спроможність лікарень для хворих другої та третьої категорій;

$M_2^{(0)}, M_2^{(1)}, M_2^{(2)}, M_2^{(3)}, \dots; M_3^{(0)}, M_3^{(1)}, M_3^{(2)}, M_3^{(3)}, \dots$ - число звільнених місць у лікарнях для хворих другої та третьої категорії у 0-й, 1-й, 2-й, 3-й тощо точках актуальності. Ці дані моніторяться та надаються Міністерством охорони здоров'я країни або регіону перед настанням кожної точки актуальності.

Починати використання даної системи розрахунку можна з будь-якого моменту часу, тобто і до початку активної фази епідемії і під час її, коли лікарні вже заповнені (повністю чи частково). Цей момент часу і буде нульовою точкою актуальності t_0 .

Зокрема, до початку епідемії $M_2^{(0)} = M_2$, а $M_3^{(0)} = M_3$.

4. Вікові групи.

Все населення ділиться на декілька вікових груп. Наприклад, з інтервалом 10 років, 5 років і навіть 1 рік. Причому інтервали не обов'язково однакові за довжиною. Кількість і розмах вікових груп визначає Міністерство охорони здоров'я, виходячи із даних про захворюваність.

n - число вікових груп населення;

i - номер вікової групи ($i = \overline{1, n}$);

K_{ij} - число людей, що не лікуються, в i -й віковій групі у j -й точці актуальності.

5. Імовірності зараження.

Будемо вважати, що ймовірності зараження людини, що знаходиться на карантині, або не знаходиться на карантині, за періоди між суміжними точками актуальності сталі на кожному періоді. Імовірності можуть змінюватись від проміжку до проміжку через те, що відбувається перерозподіл між кількістю тих, хто видужав, і тих, хто не хворів, проводяться дезінфекції тощо.

Ці ймовірності переобчислюються перед настанням кожної точки актуальності.

$P_{ij}^{(1)}, P_{ij}^{(2)}$ - ймовірності заразитися для людини i -ї вікової групи у період від j -ї до наступної $j+1$ -ї точки актуальності, перебуваючи (1) на карантині та (2) не на карантині.

6. Ймовірності для захворівши потрапити в дану категорію.

Для кожної вікової групи повинна бути стійка статистика потрапляння хворого в кожен із трьох категорій. Будемо вважати, що ймовірності потрапляння хворих у певну категорію залежить тільки від віку і не залежить від того, на якому часовому проміжку між точками актуальності ми знаходимося. Проте у нашій методиці ці ймовірності перераховуються для збільшення адекватності моделі.

P_{i1}, P_{i2}, P_{i3} - ймовірності, що хвора людина i -ї вікової групи потрапляє відповідно в першу, другу або третю категорії. Отже,

$$P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} = 1$$

7. Кількість хворих, які завершили лікування.

$A_{ij}^{(1)}, A_{ij}^{(2)}, A_{ij}^{(3)}$ - число хворих, що завершили лікування, відповідно першої, другої, третьої категорій i -ї вікової групи до моменту настання $j+1$ -ї точки актуальності.

8. Розрахована кількість хворих.

Метод розв'язування задачі передбачає під час розрахунку теоретичні переміщення вікових груп із карантину на свободу і навпаки (ітерації). При цьому на кожній ітерації визначається теоретична кількість хворих.

N_{1m}, N_{2m}, N_{3m} - теоретична кількість хворих відповідно першої, другої, третьої категорій на m -й ітерації.

9. Фактична кількість хворих (інфікованих)

Міністерство охорони здоров'я отримує дані про кількість хворих за кожною віковою групою.

$x_{ij}^{(1)}, x_{ij}^{(2)}$ - загальна кількість хворих в i -й віковій групі до моменту за день до настання j -ї точки актуальності відповідно на карантині та ні;

$x_{ij}^{(1)'}, x_{ij}^{(2)'}$ - загальна кількість хворих в i -й віковій групі до моменту за два дні до настання j -ї точки актуальності відповідно на карантині та ні.

10. Інтенсивність зараження.

Числа $\lambda_{ij}^{(1)} = \frac{x_{ij}^{(1)}}{x_{ij}^{(1)'}}$ і $\lambda_{ij}^{(2)} = \frac{x_{ij}^{(2)}}{x_{ij}^{(2)'}}$ будемо називати інтенсивностями

зараження у i -й віковій групі до моменту настання j -ї точки актуальності відповідно на карантині та ні. Будемо вважати, що інтенсивність зараження залишається сталою на кожному проміжку між суміжними точками актуальності. При підході до чергової точки актуальності вона буде перераховуватись.

Суть створюваної моделі полягає у тому, що, при збільшенні m , проводяться «ітерації», з перевіркою виконання нерівностей $N_{2m} \leq M_2^{(j)}$ і $N_{3m} \leq M_3^{(j)}$.

Процес продовжується, доки не дійдемо до такого значення m , для якого ці нерівності виконуються, а для значень $m+1$ хоча б одна з нерівностей не виконується. За знайденим значенням m робиться висновок, що на даний момент часу (у j -й точці актуальності) перші m вікових груп можна позбавити від карантину. Якщо ж виявиться, що нерівності виконуються при всіх значеннях $m = \overline{1, n}$ робиться висновок, що на даний момент часу (у j -й точці актуальності) карантин не потрібний (з огляду на заповнюваність лікарень).

Щербініна Ю. В. (студ., 1 курс),
Харченко С. Д. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Пташний О. Д.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

З ДОСВІДУ РОЗРОБКИ ТЕСТІВ В ОБОЛОНЦІ MOODLE

У процесі створення та проведення тесту у системі MOODLE виділимо наступні етапи: розробка тесту, втілення розробленого тесту у оболонку MOODLE, безпосереднє проведення тестування.

У даній роботі ми зосередимо увагу на технічних питаннях інтегрування розробленого тесту у систему MOODLE. При цьому стандартні опції системи, які зрозумілі із контексту, будемо залишати без особливих пояснень.

Для прикладу, створимо тест з теми «**Диференціальні рівняння 1-го порядку**». Визначаємось із змістом тесту. Скажімо, ми хочемо, щоб тест містив три питання:

- 1) визначити тип диф. рівняння за його виглядом;
- 2) розпізнати рівняння даного типу із декількох запропонованих;
- 3) знайти загальний розв'язок диф. рівняння з відокремлюваними змінними.

Тобто ми повинні підібрати достатню кількість завдань цих трьох *категорій*. Зразу ж визначаємось з формою відповідей. У нашому випадку доцільно, щоб відповіді вибиралися із запропонованих. Тому бажано підбирати завдання із готовими та перевіреними відповідями.

У нашому прикладі ми для простоти підібрали для кожної категорії питань по 2 варіанти завдань. Ось вони:

Завдання для питання 1-ї категорії

3.4. Визначити тип диференціального рівняння першого порядку за його виглядом:	
$\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0.$	а) рівняння Бернуллі; б) лінійне відносно y та y' ; в) однорідне відносно змінних; г) з відокремлюваними змінними.

3.4. Визначити тип диференціального рівняння першого порядку за його виглядом:	
$y' = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3};$	а) рівняння Бернуллі; б) лінійне відносно y та y' ; в) однорідне відносно змінних; г) з відокремлюваними змінними.

Завдання для питання 2-ї категорії

4.2. Серед заданих рівнянь вибрати те, що відповідає вказаному типу:	
однорідне відносно змінних;	а) $(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0$; б) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$; в) $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - xdy = 0$; г) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}.$

4.2. Серед заданих рівнянь вибрати те, що відповідає вказаному типу:	
Бернуллі.	а) $(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0$; б) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$; в) $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - xdy = 0$; г) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}.$

Завдання для питання 3-ї категорії

Умова	Варіанти відповідей
5.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними: $(x - y^2 x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$;	а) $(1 - x^2)(1 - y^2) = C$; б) $\ln y + \frac{1}{y} = \ln x - \frac{1}{x} + C$; в) $\ln\sqrt{y^2 - 1} = \ln x - \frac{2}{x} + C$; г) $1 + y^2 = C(1 - x^2).$

Умова	Варіанти відповідей
5.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними: $(x^2 y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx$;	а) $(1 - x^2)(1 - y^2) = C$; б) $\ln y + \frac{1}{y} = \ln x - \frac{1}{x} + C$; в) $\ln\sqrt{y^2 - 1} = \ln x - \frac{2}{x} + C$; г) $1 + y^2 = C(1 - x^2).$

Доцільно створити у своєму комп'ютері папку «Тест Диф.рівняння 1-го порядку», а у ній три папки – «Питання 1-ї категорії», «Питання 2-ї категорії» та «Питання 3-ї категорії» і там зберігати ці завдання та

правильні відповіді на них. Зауважимо, що завдання можуть бути у вигляді текстових, або інших файлів. У нашому випадку – це фотографії.

Цим завершується етап розробки тесту. Наступний етап – це інтегрування розробленого тесту у систему MOODLE.

Заходимо у "**Режим редактирования**", вибираємо потрібний **робочий тиждень** і за допомогою опції "**Добавить элемент или ресурс**" виходимо на меню, де обираємо «Тест» і опиняємося на сторінці "**Настройки теста**".

У полях «**Название**» і «**Вступление**» ми записуємо, як цей тест буде відображатися у курсі. Наприклад,

назва: Контрольна робота «Диф. рівняння»;

вступ: Тест доступний у період з 9-00 11 квітня по 21-00 12 квітня, час виконання – 45 хвилин.

У полі "**Синхронизация**" ми можемо налаштувати час відкриття та час закриття тесту, час, відведений на проходження тесту. Час відкриття та закриття визначає період часу, у який можна проходити тест. Ця інформація може бути відображена у вступі, як показано вище. Можливість виконати тест у будь-який час зазначеного періоду надає додаткові зручності як студентам, так і викладачам. Це звільняє викладачів від необхідності проводити тест прямо на занятті і витратити на це навчальний час. Зазначимо, що позитивний результат дає розміщення на сайті тренувального завдання, аналогічного тестовому, з розв'язаннями або відповідями. Студентам дається наполеглива рекомендація попередньо перед тестуванням розв'язати це завдання.

У пункті "**Оценка**" можна виставити, скільки буде спроб для проходження тесту та метод оцінювання: найвища оцінка, середня, перша спроба чи остання спроба. Запропоновані варіанти оцінювання дають можливість використання не тільки контролюючої функції тесту, а й активізуючої. З метою отримання кращого результату студенти будуть робити додаткові спроби проходження тесту, а це сприятиме кращому засвоєнню навчального матеріалу.

У пункті **"Расположение"** обирається кількість питань на одній сторінці тесту. На наш погляд, досить зручно обирати одне питання.

У пункті **"Свойства вопроса"** ми обираємо, чи буде випадковий порядок відповідей чи ні, а у пункті **"Настройки просмотра"** обираємо, яку інформацію студенти можуть бачити перед проходженням тесту, при його проходженні, після нього, та у звіті про нього. Зміст пункту **"Внешний вид"** зрозумілий з його опцій. У пункті **"Общие настройки модуля"** ми можемо сховати тест від студентів і вони побачать його тільки тоді, коли ми власноруч відкриємо тест

Завершується налаштування натисканням кнопки **«Сохранить и перейти»**, після чого ми побачимо наступне вікно:

Диф. рівняння

Метод оценивания: Высшая оценка

Пока не добавлено ни одного вопроса

Редактировать тест

Вернуться к курсу

← Контрольная работа "Дифференциальные уравнения" (скрытый)

Перейти на...

Обираємо **"Редактировать тест"**. В опції **«Добавить»** обираємо **"Случайный вопрос"**.

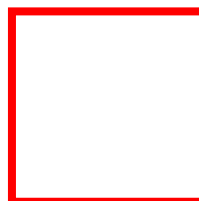
Максимальная оценка 10,00 Сохранить

Итоговый балл: 0,00

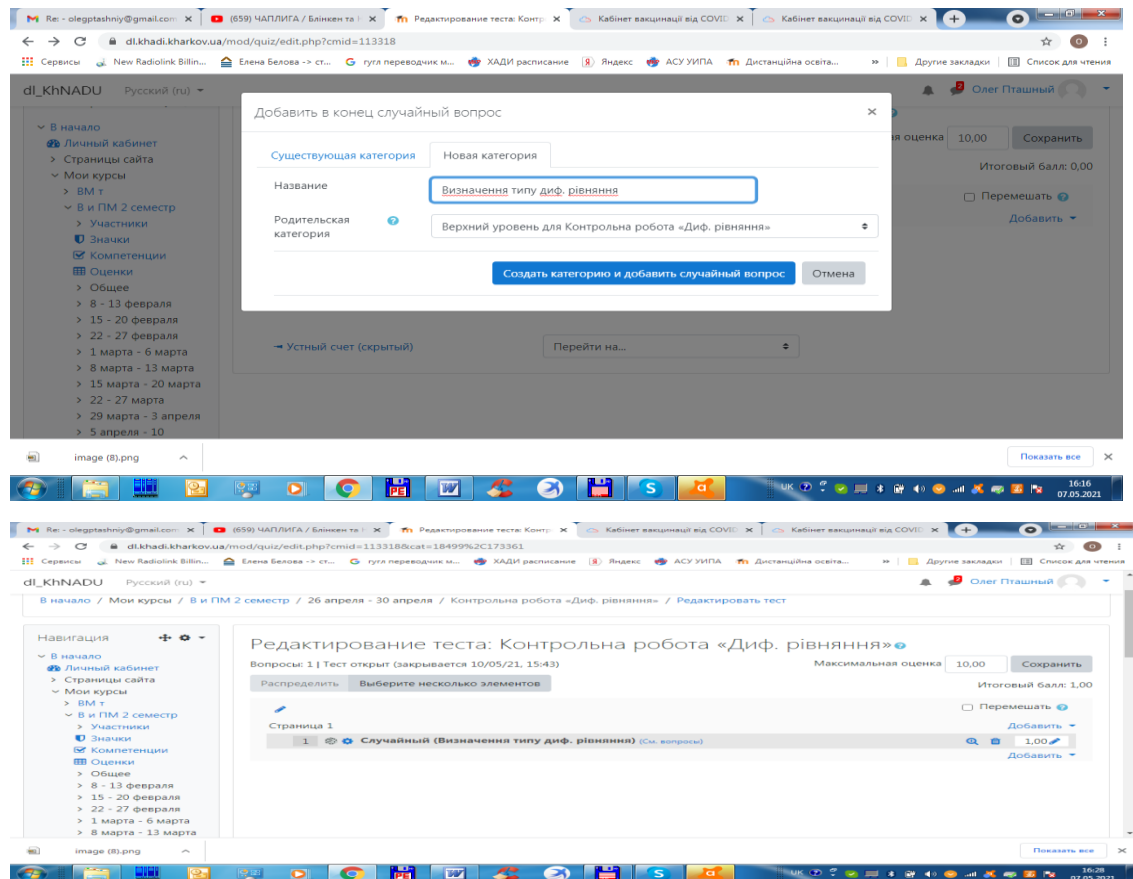
☐ Перемешать

Добавить

- + новый вопрос
- + из банка вопросов
- + случайный вопрос

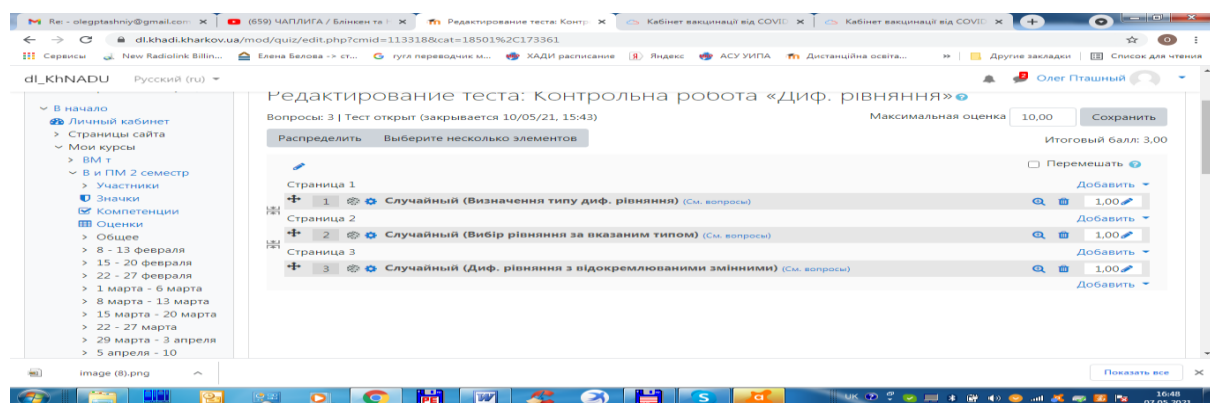


Спочатку будемо створювати *категорії* питань. У нашому випадку це три категорії. Обираємо «Новая категория». У полі «Родительская категория» обираємо «... *Контрольна робота «Диф. рівняння»*», а у полі «Название» записуємо бажану назву завдань 1-ї категорії: «*Визначення типу диф. рівняння*». Натискаємо «Создать категорию и добавить случайный вопрос».



Перша категорія питань створена, але поки вона порожня. Перш ніж наповнювати її питаннями, створимо аналогічно другу та третю категорії. А саме: натискаємо «Добавить», обираємо «Случайный вопрос», «Новая категория», в поле «Название» записуємо бажану назву для другої категорії питань. У нас це «*Вибір рівняння за вказаним типом*», натискаємо «Добавить категорию и случайный вопрос» і друга категорія питань (поки що порожня) створена. Далі аналогічно натискаємо «Добавить» і створюємо третю категорію «*Диф. рівняння з відокремлюваними змінними*».

Маємо три «порожні» категорії.



Поки не забули, на цій сторінці подбаємо про оцінювання. Виходячи з порівняної складності завдань, назначимо максимальні бали: за питання першої та другої категорії по 1 балу, а за питання третьої категорії – 3 бали. Тепер встановимо, за якою бальною системою ми хочемо, щоб оцінювався тест. Вибираємо, наприклад, 10-бальну. Тоді встановлюємо максимальний бал – 10. Набрана кількість балів буде автоматично перерахована у десятибальну систему. В полі «**Перемешать**» установимо галочку. Це забезпечить випадкову послідовність категорій та питань у тестах та ускладнить можливий підбір відповідей «за досвідом попередників».

Тепер починаємо «наповнювати» створені категорії питань. На поточній сторінці у першому рядку «**Случайный (Визначення типу диф. рівняння)**» натискаємо «**См. вопросы**» і опиняємося на сторінці «**Банк вопросов**», далі натискаємо «**Создать новый вопрос**». Виникло вікно «**Выберите тип вопроса для добавления**». У нашому випадку помічаємо «**Множественный выбор**» і опиняємося у вікні «**Добавление вопроса «В закрытой форме (множественный выбор)»**». У полі «**Название вопроса**» ставимо позначку « - », бо в нас питання не мають назви. А у поле «**Текст вопроса**» у нашому випадку вносимо перше питання першої категорії з папки, яку ми створювали у комп'ютері на початку роботи. Це в нас перше фото зі створеної нами папки «**Питання 1-ї категорії**».

У полі «**Балл по умолчанию**» залишаємо 1 (саме такий бал ми раніше виставили при налаштуванні першої категорії).

Поле «**Общий отзыв к вопросу**» у цьому тесті залишаємо порожнім, а в опції «**Случайный порядок ответов**» ставимо галочку, бо це теж, як і

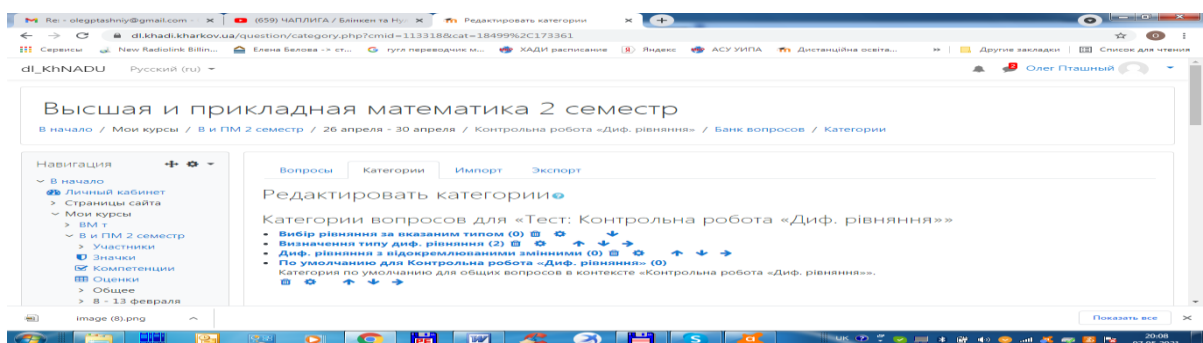
раніше налаштований випадковий порядок відповідей, ускладнює можливий їх підбір.

Призначення опції «**Нумеровать варианты ответов ?**» зрозуміле з її змісту. У нашому випадку відповіді мають вигляд літер (а, б, в, г), тому нумерувати варіанти краще цифрами 1, 2, 3, 4.

Нарешті, на цій же сторінці заповнюємо поля «**Ответы**». У нашому випадку вносимо у «**Вариант ответа 1**» літеру а, «**Вариант ответа 2**» літеру б, «**Вариант ответа 3**» літеру в, «**Вариант ответа 4**» - літеру г. Звіряємося з нашою «базою» у відповідній папці комп'ютера і бачимо, що г – це вірна відповідь. Тому там, у полі «**Оценка**» обираємо **100%**. Зауважимо, що тут передбачена можливість *частково вірних* відповідей. У цьому разі можна обирати, наприклад, 30 чи 50 % .

Отже, натискаємо «**Сохранить**» і перше питання першої категорії сформоване. Ми знов опинились на сторінці «**Банк вопросов**», натискаємо «**Создать новый вопрос**» і аналогічно створюємо друге питання першої категорії. У нашій базі питань вже немає питань цієї категорії.

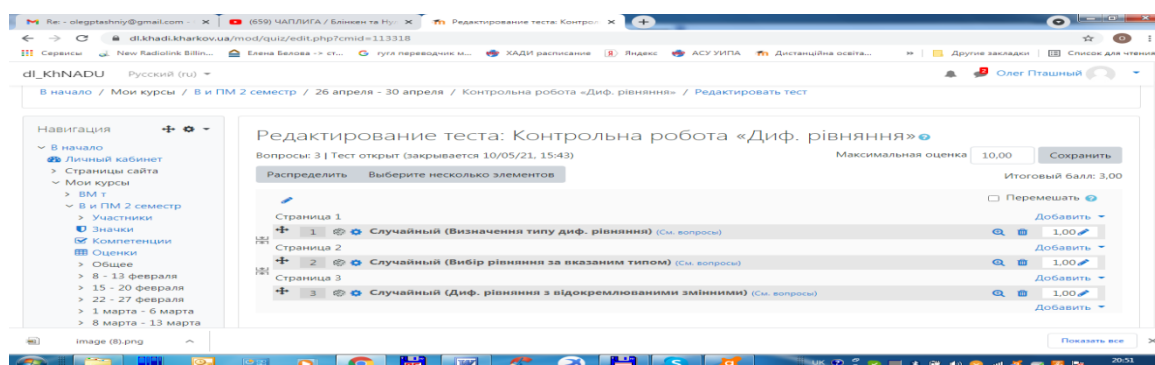
Тепер, аналогічно, будемо заповнювати питаннями другу категорію. На цій же сторінці «**Банк вопросов**» натискаємо «**Категории**» і опиняємося на сторінці «**Редактировать категории**» ,



де обираємо нашу другу категорію «**Выбор уравнения за указанным типом**». Знов опиняємося на сторінці «**Банк вопросов**», натискаємо «**Создать новый вопрос**» і, аналогічно, формуємо питання та відповіді другої категорії.

Після цього знов натискаємо «Категорії» і, аналогічно попередньому, додаємо питання третьої категорії «Диф. рівняння з відокремлюваними змінними» Тільки зауважимо, що у полі «Балл по умолчанию» для цих питань треба поставити 3 бали, бо ми запланували раніше такий максимальний бал за питання цієї категорії.

Питання усіх запланованих категорій сформовані. Тепер у колонці «Настройки» (на екрані зліва) натискаємо «Редактировать тест» і опиняємося на сторінці «Редактирование теста: Контрольная работа «Диф. рівняння».



У полі «Перемешать» ставимо галочку (якщо її там немає) і натискаємо «Сохранить». Тест готовий!

Обмежений об'єм статті не дозволив розглянути тут цілий ряд важливих питань. По-перше, це різноманіття типів тестів (та опцій до них), які дозволяє створювати платформа **Moodle**, по-друге, це питання експорту тестів до інших курсів, по-третє – технології використання тестів у навчальних курсах. Але сподіваємося, що ця робота допоможе викладачам зробити перший крок в напрямку створення та використання тестів і сприятиме подальшому удосконаленню застосування платформи **Moodle** у навчальному процесі.

Яременко С. О. (студ., 3 курс),
Мурашко Н. М. (магістрант, 5 курс)
Наукові керівники – проф. Диха О. В., доц. Рудик О. Ю.
Хмельницький національний університет (Хмельницький, Україна)

ВИПРЕСУВАННЯ ТА КОНТРОЛЬ ЗАПРЕСОВУВАННЯ ЗАПІРНОГО КІЛЬЦЯ ПІВОСІ

Для заміни підшипника півосі необхідно зняти запірне кільце. Його можна збити молотком, попередньо нагрівши кільце паяльною лампою, сточивши на наждаку або розпилявши ножівкою. Але так піввісь легко ушкодити [1].

Після запресовування кільця необхідно переконатися у тому, що воно не буде зміщатися під осьовим навантаженням в 2000 кгс. Перевірку рекомендується проводити за допомогою пристосування А.95601/Р. Воно досить складне, з литою масивною станиною й призначене тільки для контролю запресовування запірного кільця.

Пропоноване пристосування (рис. 1 – [1]) універсальніше (можна проводити контроль запресовування й випресування) і простіше.

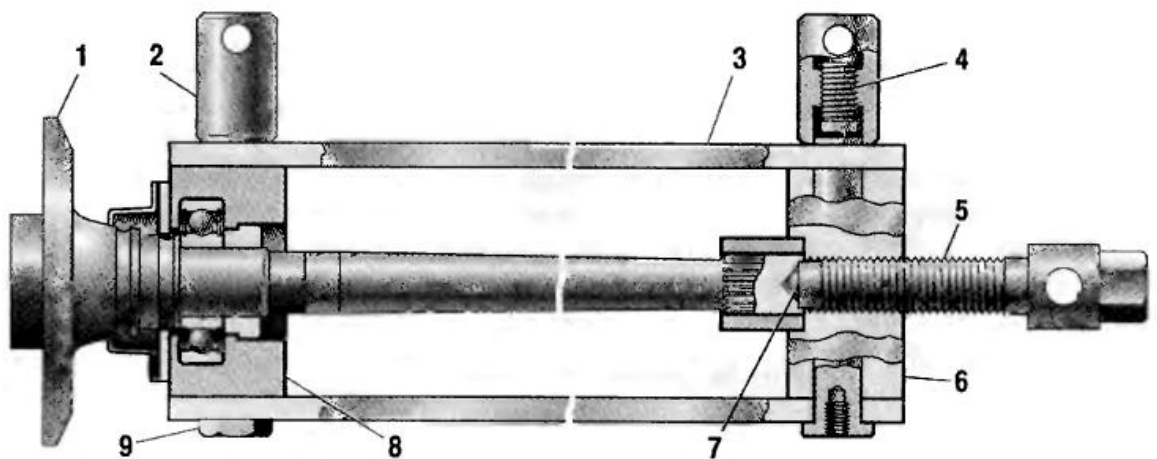


Рис.1. Стенд для випресування запірного кільця підшипника півосі й перевірки якості його напресування

Пристосування закріплюється на верстаті за допомогою двох болтів М10, які вкручуються в болти 4. Піввісь 1 встановлюється у рознімну опору

8, шліцьовий кінець її входить у втулку опори 6. Далі, установивши верхню тягу 3, затягуються гайки 2. У рознімній опорі 8 поглиблення виконані так, що сила випресування буде передаватися насамперед на запірне кільце, що й потрібно при контролі запресовування.

При випресуванні після зсуву запірного кільця починає переміщатися й підшипник. Відсутність зсуву запірного кільця під осьовим навантаженням у 2000 кгс контролюється індикатором з переміщення фланця півосі. Він виставляється на нуль при крутному моменті на гвинті 5 приблизно 2-5 кгс-м (для вибірки зазорів і створення «жорстких стиків»). Переміщення стрілки індикатора при збільшенні осьової сили ще не свідчить про зсув запірного кільця відносно півосі — це результат пружних деформацій деталей пристосування.

Після досягнення моменту 9,6 кгс-м або зусилля на ключі (S27) 32 кгс відкручується гвинт 5, щоб переконатись, що стрілка індикатора повернулася в нульове положення. Повернення стрілки й свідчить про відсутність зсуву запірного кільця. Осьову силу (2000 кгс) контролюють динамометричним ключем за моментом затягування гвинта пристосування [1].

Але наскільки надійний цей стенд – задача даного дослідження. Для цього скористувались системою твердотільного параметричного моделювання SolidWorks, що створена по модульному принципу, який забезпечує можливість гнучкої побудови інтегрованого комплексу автоматизації процесів: проектування – інженерного аналізу – технологічної підготовки виробництва [2, 3].

На першому етапі комп'ютерного моделювання у SolidWorks створюється 3D-модель досліджуваного стенду. На другому – береться орієнтовно найбільш навантажена деталь (опора 6 на рис. 1) і для неї проводяться розрахунки на міцність. До твердотільної моделі опори застосовують програмний модуль SolidWorks Simulation: вибирається тип дослідження напружено-деформівного стану – статичний аналіз [4]. При його проведенні назначають матеріал деталі – сталь 45 (DIN 1,1191; C45E) і

призначають граничні умови: вибирають місця закріплення (рис. 2 – у даному дослідженні отвори під болти 4 і фіксуючі грані 3, що на рис. 1) і прикладають зовнішні навантаження (осьова сила $2000 \text{ кгс} = 19615 \text{ Н}$, яка сприймається різьбою опори).

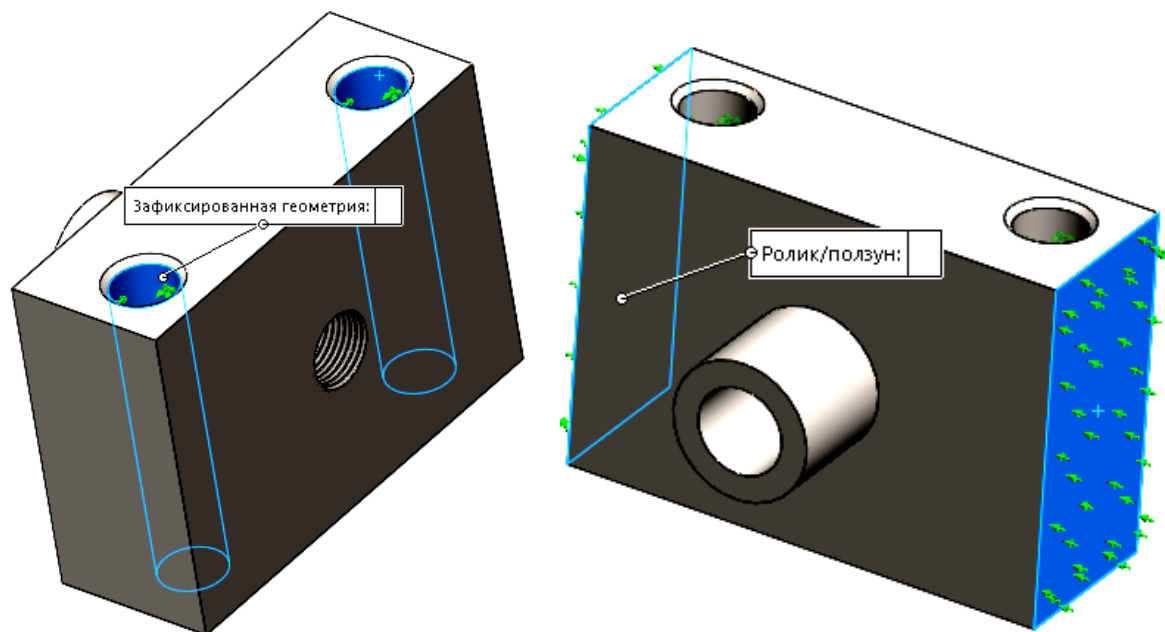


Рис.2. Кріплення опори

Потім проводиться поділ моделі на елементи, з'єднані у вузлах: програма аналізу скінченних елементів розглядає модель як сітку (4 точки Якобіана; розмір елемента $8,63609 \text{ мм}$; допуск $0,431804 \text{ мм}$; всього вузлів 25256; всього елементів 15718; максимальне співвідношення сторін 3382,5; відсоток елементів із співвідношенням сторін менше трьох – 75,5).

У результаті статичного аналізу встановлено, що для опори вузлові максимальні напруження Von Mises, максимальні переміщення URES та еквівалентна деформація ESTRN складають відповідно $44,11 \text{ МПа}$ (вузол 25235), $0,002561 \text{ мм}$ (вузол 4), і $0,0001099 \text{ мм}$ (елемент 11866), тобто не перевищують допустимих значень. При цьому мінімальний коефіцієнт запасу міцності FOS становить $n = 12,81$, тобто вище допустимого, який складає $[n] = 5$.

Таким чином, за допомогою CAD-системи SolidWorks та CAE-системи SolidWorks Simulation доведена працездатність однієї з деталей стенду для

випресування запірного кільця підшипника півосі й перевірки якості його напресування – опори. Наступними дослідженнями потрібно провести аналогічні розрахунки інших деталей цього пристосування.

Анотація. *За допомогою SolidWorks проведено дослідження орієнтовно найбільш навантаженої деталі стенду для випресування запірного кільця підшипника півосі й перевірки якості його напресування.*

Ключові слова: *SolidWorks, твердотільна модель, розрахунки на міцність, граничні умови, скінченний елемент, вузлові переміщення, напруження, деформації, коефіцієнт запасу міцності.*

Abstract. *With the help of SolidWorks, the study of approximately the most loaded part of the stand for pressing the locking ring of the shaft bearing and checking the quality of its pressing was carried out.*

Key words: *SolidWorks, solid model, strength calculations, boundary conditions, finite element, nodal displacements, stresses, strains, safety margin.*

Література

[1] – Приспособления для ремонта автомобилей [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://chertezhi.ru/modules/ebook/showfile.php?lid=696>

[2] – Rudyk O. Yu. Using of SolidWorks for simulation of screw puller of bearings [Electronic resource] / O. Yu. Rudyk, P. V. Kaplun, R. V. Solovyov. – Access mode: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/10062>

[3] – Рудик О. Ю. SolidWorks як інноваційний засіб вивчення дисциплін автомобільного профілю / О. Ю. Рудик, О. В. Диха // «Системні технології» 3 (128) 2020. – С. 21-35. – Режим доступу: <https://journals.nmetau.edu.ua/index.php/st/article/view/178/92>

[4] – Psol S. V. CAD/CAE-systems in the study of performance of the off-road differential / S. V. Psol, O. Yu. Rudyk, I. V. Korobka. – Access mode: <http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/10147>

Наукове видання

КЛАСИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ СПАДКОЄМНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ У ЗВО : ІСТОРИЧНИЙ ТА СУЧАСНИЙ ПОГЛЯД МОЛОДИХ ВЧЕНИХ І ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

**Матеріали Всеукраїнської науково-практичної
конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених**

08-09 квітня 2021 року

Відповідальний за випуск *Ємельянова Т.В.*

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка *Купіної Н.А.*

Підписано до друку _____ р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman Сут . Віддруковано на ризографії.
Ум. друк. арк.18,6. Обл.-вид. арк. 20,3.
Зам. № _____. Тираж _____ прим. Ціна договірна

ВИДАВНИЦТВО

Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

**Видавництво ХНАДУ, 61200, Харків-МСП, вул. Ярослава Мудрого, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-72; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua**

*Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення
та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції, серія № ДК №897 від 17.04 2002 р.*

