Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

КЛАСИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ У НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ І МОЛОДИХ ВЧЕНИХ: ІСТОРИЧНИЙ ТА СУЧАСНИЙ АСПЕКТИ

Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених 09-10 квітня 2020 року

Харків
ХНАДУ
2020

Редакційна колегія:

ГАДЕЦЬКА Світлана Вікторівна - кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики ХНАДУ (Україна).

МОРОЗ Ірина Іванівна – старший викладач кафедри вищої математики ХНАДУ (Україна).

Всеукраїнська науково-практична конференція здобувачів вищої освіти і молодих вчених проведена згідно з планом проведення міжнародних, всеукраїнських та науково-методичних конференцій та семінарів ХНАДУ у 2020 році **(лист ІМЗО України № 22.1/10-69 від 14.01.2020 р.).**

Відповідальні редактори:

ЯРХО Тетяна Олександрівна – доктор педагогічних наук, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики ХНАДУ (Україна)

ЄМЕЛЬЯНОВА Тетяна Вікторівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики ХНАДУ (Україна).

Класичні та прикладні проблеми у наукових дослідженнях здобувачів вищої освіти і молодих вчених: історичний та сучасний аспекти: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених. – Харків: ХНАДУ. – 2020. – 328 с.

В збірку включені матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених, в яких розглянуто науково-педагогічна діяльність видатних вчених в галузі фундаментальних досліджень, новітні математичні та методичні підходи у вивченні природничо-математичних дисциплін, фундаментальні основи розв’язання професійно-прикладних задач.

Збірник матеріалів розраховано на студентів, магістрів, аспірантів і фахівців, діяльність яких пов’язана з науково-дослідною роботою в різних галузях сучасної науки і освіти. Він може бути корисним методистам, викладачам середніх і вищих навчальних закладів, аспірантам та стажерам.

© Харківський національний
автомобільно-дорожній
університет, 2020

ЗМІСТ

НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ ВИДАТНИХ ВЧЕНИХ В ГАЛУЗІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

НОВІТНІ МАТЕМАТИЧНІ ТА ПЕДАГОГІЧНІ ПІДХОДИ У ВИВЧЕННІ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОФЕСІЙНО-ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ ВИДАТНИХ ВЧЕНИХ В ГАЛУЗІ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

УДК 929

Долгополова В. В. (студ., 2 курс)
Научный руководитель – доц. Веневитина С. С.
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, Россия)

СОФЬЯ КОВАЛЕВСКАЯ – ПЕРВАЯ В МИРОВОЙ ИСТОРИИ ЖЕНЩИНА – МАТЕМАТИК

Развитие математики просто невозможно представить без деятельности великих и талантливых ученых. Именно они принесли огромный вклад в эту науку, посвятив ей многие годы своей жизни. На их пути встречались различные препятствия, преодолев которые, они постепенно приближали математику к совершенству. В разное время над ней трудилось огромное количество выдающихся деятелей. Одним из таких является первая в мире женщина-профессор математики Софья Ковалевская.

Софья Васильевна Королевская (урожденная Корвин-Круковская) родилась 15 января 1850 года в Москве в семье дворянского рода артиллерийского генерала Василия Васильевича Корвин-Круковского и Елизаветы Федоровны Шуберт. Предки матери были выдающимися математиками (Ф.Ф. Шуберт) и известными астрономами (Ф.И. Шуберт). С ранних лет Софья интересовалась корнями происхождения своей семьи. Она не раз говорила, что в наследство она получила страсть к науке именно от них[1].

Софья Ковалевская считала себя в семье нелюбимой, в отличие от старшей сестры Анны и младшего брата Феди. Отец души не чаял в Федоре, так как считал его продолжателем рода и возлагал на него большие надежды. Наиболее счастливой Софья чувствовала себя рядом с няней, и большую часть времени она проводила с ней. Из трёх детей няня считала именно

Софью «своей питомицей», любила её больше других. Свои детские годы Ковалевская провела в разных местах России, поскольку её отец вместе с семьёй по делам службы часто переезжал с места на место. Одним из таких мест было поместье Полибино, расположенное в Невельском уезде Витебской губернии, куда в 1885 году переехала семья после отставки главы семейства. Образованием Софьи занимался Иосиф Игнатьевич Малевич, сын мелкопоместного шляхтича, всю жизнь работавший домашним учителем-наставником. Он вел обучение по обширной программе и давал детям достаточно прочные знания. В декабре 1890 года в своей книге «Русская старина» он опубликовал воспоминания о своей талантливой ученице Софье Ковалевской, которой очень гордился.

Сама Софья Ковалевская свой интерес к математике объясняет двумя причинами. «Глубочайшее уважение к этой науке проявлял мой любимый дядя Пётр Васильевич Корвин-Круковский, старший брат отца. С ним я любила «толковать о всякой всячине, и дяде очень нравилось общаться со мной, как со взрослой. Именно от него я впервые услышала о квадратуре круга и асимптоте», – писала Софья Ковалевская в своей книге «Воспоминания детства»[3]. Вторую причину Ковалевская называет «курьёзным обстоятельством». Одну из детских комнат из-за нехватки обоев оклеили листами из печатного издания лекций по дифференциальному и интегральному исчислению академика М.В. Остроградского. В таком виде комната простояла много лет. Софья, стояла перед этой «таинственной» стеной часами. В результате многие формулы и фразы прочно врезались ей в память. Позже, на уроках дифференциального исчисления некоторые математические понятия давались ей на удивление легко, будто она «наперёд их знала». Корвин-Круковский прочил ей славу, карьеру, называл новым «Паскалем в юбке» и рекомендовал продолжать обучение.

Софья мечтала об учебе в высшем заведении. Но в России поступление женщин в высшие учебные заведения было запрещено. Обучение можно было продолжить только за границей. Но получение заграничного паспорта вызывало трудности. На это необходимо было разрешение родителей или мужа. Отец не давал согласия, так как не хотел дальнейшего обучения дочери. Тогда Софья организовала фиктивный брак с молодым учёным В.О. Ковалевским, который и не подозревал, что в итоге влюбится в свою фиктивную жену. В 1868 году новобрачные отправились за границу. В 1869 году Ковалевская проходит обучение в Гейдельбергском университете у профессора Кенигсбергера, а с 1870 по 1874 год – в Берлинском университете у К. Т. Вейерштрасса. Так как женщины не могли слушать лекции (по правилам университета), то Вейерштрасс, заинтересованный в раскрытии математических дарований Софьи, взял руководство её занятиями на себя.

За границей Софья Ковалевская соучаствует в революционной борьбе, разделяет идеи утопического социализма. В апреле 1871 года вместе с мужем В.О. Ковалевским приехала в осаждённый Париж, ухаживала за ранеными коммунарами. Также принимает участие в спасении из тюрьмы деятеля Парижской коммуны В. Жаклара, мужа своей сестры-революционерки Анны.

Фиктивные муж и жена вынуждены жить в разных квартирах и разных городах. Эмансипированные подруги Софьи не одобряли её близости с фиктивным супругом. Это положение тяготило обоих. В 1874 году они стали жить вместе, а четыре года спустя у них родилась дочь.

Совершенствуя уже существовавшие решения других математиков, Ковалевская внесла и свой ощутимый вклад в развитие математики XIX века. Основные научные труды С.В. Ковалевской посвящены математическому анализу, механике и астрономии. В 1874 году Ковалевская защищает диссертацию по теме «К теории дифференциальных уравнений в частных производных». Гёттингенский университет присваивает ей степень доктора философии по защите диссертации. В 1879 году на VI съезде естествоиспытателей и врачей в Санкт-Петербурге Ковалевская сделала сообщение «О приведении абелевских интегралов 3-го ранга к эллиптическим». В 1881 году она была избрана в члены Московского математического общества (приват-доцент).

Сложившиеся обстоятельства, связанные с самоубийством мужа, который запутался в своих коммерческих делах, вынуждают Софью покинуть Родину. В 1883 году Ковалевская, оставшаяся без средств, с пятилетней дочерью, приезжает в Берлин, где останавливается у друга – профессора Вейерштрасса. Лишь только большой авторитет Вейерштрасса и Геста Миттаг-Леффлеру поспособствовал устроиться Ковалевской в Стокгольмском университете. Под именем Соня Ковалевски она стала профессором кафедры математики с обязательством читать лекции первый год по-немецки, а со второго по – шведски.

С осени 1884 по осень 1889 года в университете Ковалевская прочитала следующие курсы: «Теория уравнений в частных производных»; «Теория алгебраических функций по Вейерштрассу»; «Элементарная алгебра»; «Теория абелевых функций по Вейерштрассу»; «Теория потенциальных функций»; «Теория движения твёрдого тела»; «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, по Пуанкаре»; «Теория тета-функций по Вейерштрассу»; «Приложения теории эллиптических функций»; «Теория эллиптических функций по Вейерштрассу»; «Приложение анализа к теории целых чисел». В 1888 году Ковалевская стала лауреатом премии Бордена Парижской академии наук за открытие третьего классического случая разрешимости задачи о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Вторая работа на ту же тему в 1889 году была отмечена премией Шведской академии наук, и Ковалевская была избрана членом-корреспондентом на физико-математическом отделении Российской академии наук [4].

В 1891 году Софья отправляется из Берлина в Стокгольм. Её путь пролегал через Данию, где началась эпидемия оспы. Софья меняет маршрут и продолжает своё путешествие в открытом экипаже. По дороге Ковалевская простудилась. Простуда перешла в воспаление лёгких. Поставленный неверно диагноз приводит к плевриту и параличу сердца. Софья Ковалевская скончалась 29 января 1891 года. Похоронена Ковалевская в Стокгольме на Северном кладбище. Ей было всего 41 год.

Ковалевская – первая женщина-математик, ставшая профессором. Обладая тонким математическим складом ума, она имела большую способность к художественному воспроизведению всего окружающего. Ей принадлежит множество литературных произведений, в том числе несколько крупных: «Воспоминания о Джордже Эллиоте», семейная хроника «Воспоминания детства», «Три дня в крестьянском университете в Швеции», которые появились на русском языке в русских журналах «Русская Мысль», «Вестник Европы», «Северный Вестник». На шведском языке написаны «Роман Воронцовых», а также воспоминания о польском восстании.

Признание на Родине Ковалевская Софья Васильевна, к сожалению, получила только после смерти. Но её заслуги в науке бесценны. В память о Великой женщине – профессоре, в России в городе Великие Луки названа гимназия, основанная в 1958году, в её честь названа малая планета, открытая 4 сентября 1972 году астрономом Крымской астрофизической обсерватории Людмилой Журавлёвой. Также ее именем названо множество улиц в России.

Имя Софьи Ковалевской будет вдохновлять будущих учёных на дальнейшие исследования и открытия. Оно никогда не поддастся забвению!

Аннотация. *Статья посвящена научной и педагогической деятельности Софьи Васильевны Ковалевской – первой русской женщины математика.*

Литература

[1] - Математики, механики. Биографический справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 637 с.

[2] - Воронцова Л. А. Софья Ковалевская: Жизнь замечательных людей / Л. А. Воронцова. - М.: Изд-во Молодая гвардия, 1959. - 266 с.

[3] - Ковалевская С. В. Воспоминания и письма. - М.: Издательство АН СССР, 1951. – 576 с.

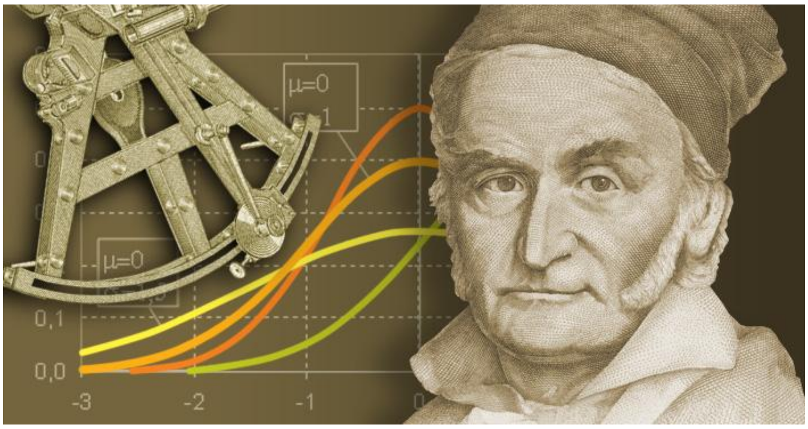
[4] - Малинин В. В. Софья Ковалевская – женщина-математик. Её жизнь и учёная деятельность. – ЦИТ СГГА, 2004.

[5] - Полубаринова-Кочина П. Я. Софья Васильевна Ковалевская. 1850–1891: Её жизнь и деятельность. – М.: Гостехиздат, 1955. – 100 с.

УДК 929

Евдокимова Ю. С.(студ., 2 курс)
Научный руководитель – доц. Веневитина С. С.
Воронежский государственный лесотехнический университет
им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, Россия)

ЖИЗНЬ И НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ КАРЛА ФРИДРИХА ГАУССА



Карл Фридрих Гаусс родился 30 апреля 1777 года в немецком герцогстве Брауншвейг в одной из беднейших семей (отец его был водопроводчиком, а дед – крестьянином).

Когда Карлу было 3 года, родители признали его гением. В этом возрасте он умел писать, читать и исправлять ошибки отца. Позже Гаусс говорил, что разговаривать он научился позже, чем считать.

Учитель Мартин Бартельс, который позже обучал Николая Лобачевского, распознал в мальчике талантливого ученика. Педагог направил прошение герцогу Брауншвейгскому и добился для парня стипендии в техническом университете Германии. В юном возрасте Карлу нравилось изучать не только цифры, но и иностранные языки, поэтому он долго не мог выбрать чем же ему заниматься в будущем математикой или филологией. Но даже выбрав математику, он писал свои труды на немецком, английском и латинском языках. Позже он свободно читал на французском, датском, шведском, итальянском и испанском языках. А в возрасте шестидесяти двух лет Гаусс начал изучать русский язык, так как захотел прочесть в оригинале труды Николая Лобачевского. В библиотеке ученого после его смерти было обнаружено 57 книг на русском языке, среди которых – восьмитомник Пушкина.

С 1792 по 1795 год Карл Гаусс провел в Брауншвейгском университете, где изучал труды Ньютона, Лагранжа, Эйлера. Последующие 3 года он находился в Гёттингенском университете. После первого года обучения ученый решается вести дневник наблюдений. Находясь в коллегиальном колледже он сумел доказать закон взаимности квадратичных вычетов. А в университете гений построил правильный семнадцатиугольник с помощью линейки и циркуля.

В 1798 году Гаусс возвращается в Брауншвейг, где начал работать над доказательством основной теоремы алгебры, и остается там до 1807 года. Герцог финансирует публикацию докторской диссертации ученого и обеспечивает ему стипендию. За доказательство основной теоремы алгебры в 1799 году Гаусс заочно получил докторскую степень.

В 1801 году была опубликована его первая крупная работа «Арифметические исследования», в которой Гаусс описал все открытия предшественников-арифметиков, а также свои исследования.

В 1809 г. Карл Фридрих Гаусс испытал утрату любимого человека – скончалась его жена Джоанн Остофф, а после кончину одного из их детей, Луи. Второй женой стала лучшая подруга умершей жены Фредерика Вильгельмина Вальдек. Но и она после долгой болезни скончалась. У Гаусса осталось шестеро детей от двух браков.

Признание Гаусс получил при жизни. Он был членом-корреспондентом Петербургской Академии наук, получив это звание за обнаружение месторасположения малой планеты Церцеры после проведения рада сложнейших математических расчетов. Вычисление траектории этой планеты математическим путем сделало Гаусса известным всему миру. Также Карл Гаусс был награжден золотой медалью Лондонского королевского общества, стал лауреатом медали Копли.

Карл Фридрих Гаусс сделал фундаментальные открытия в областях геометрии и алгебры, теории вероятностей, физике, геодезии и астрономии. Он разработал абсолютную систему единиц, приняв за единицу массы – 1 грмм, за единицу времени – 1 секунду, за единицу длины – 1 миммиметр.

Карл Фридрих Гаусс стал первым, кто начал изучать внутреннюю геометрию поверхностей. Он заложил основы римановой геометрии, открыл кольцо целых комплексных гауссовых чисел, вывел теорию сравнений, решил множество математических проблем.

Гаусс скончался на 78 году жизни в Гёттингене 23 февраля 1855 года. В результате изучения его мозга Рудольфом Вагнером, его масса составляла 1492 г (средняя масса головного мозга человека равна 1310 г), а площадь сечения - 219.588 мм² (34.362 квадратных дюйма), что являлось доказательством гениальности Карла Фридриха Гаусса.

За огромный вклад в науку, монарх Ганновера Георг 5 дал распоряжение отчеканить медаль с изображением «короля математики».

Изображение Карла Гаусса имеется и на денежной банкноте Германии достоинством в 10 марок.

На родине Карла Фридриха Гаусса в Брауншвейге установлен памятник великому ученому.

Аннотация. *Статья посвящена научно-педагогической деятельности Карла Фридриха Гаусса.*

Жук А. І. (студ., 3 курс)
Науковий керівник –доц. Сіра І. Т.
Харківський національний педагогічний унівесритет імені Г. С. Сковороди
(Харків, Україна)

МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ЧОТИРИКУТНИКУ

Геометрія виникла ще в глибоку давнину в зв'язку з практичними потребами людини: вимірювання відстаней, виготовлення знарядь праці, визначення розмірів, знаходження площі земельних ділянок.

Розвиток землеробства, будівництв ремесел і торгівлі потребувало вміння вимірювати і обчислювати площ, об'єми різних фігур і тіл, а також властивостей тих чи інших фігур. Розв'язання таких задач міститься в вавилонських клинописних табличках, в єгипецьких папірусах, давньокитайських трактатах, індійських релігійно-філософських книгах [2, с.251].

Відволікаючись від фізичних властивостей предметів, вивчаючи лише їх розміри, форму і положення, людина прийшла до абстрактних понять геометричного тіла та геометричної фігури, поверхні, лінії, точки, прямої, площини, відрізка і т.д.

Геометричні фігури зустрічаються в найдавніших математичних документах: в «Московському» папірусі, «папірусі Ахмеса» і давньовавілонських клинописах, написаних близько 4000 років тому. У цих документах містяться завдання, в яких виступає на першому плані обчислення площ та об'ємів окремих фігур. [2, с.253]

Зачатки геометричних знань, пов'язаних з вимірюванням площ, губляться ще вглибині тисячоліть. Ще 4-5 тисяч років тому, вавилоняни вміли обчислювати площу прямокутника і трапеції в квадратних одиницях. Квадрат здавна слугував еталоном для вимірювання площ, завдяки своїм властивостям: рівні сторони, півні і прямі кути, симетричність і досконалість форми. Квадрати легко будувати, ними можна легко заповнити площини без пробілів.

Стародавні єгиптян 4000 років тому користувалися майже такими ж прийомами, що і ми зараз, для вимірювання площ прямокутників, трикутників, трапецій: основа трикутники ділилась навпіл і помножалась на висоту; для трапеції ж сума паралельних сторін ділилась навпіл і помножалась на висоту і т.д. Для обчислення площі чотирикутника зі сторонами a, b, c, d (рис.1.1) застосовувалась формула: $S=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$ тобто множилися півсуми протилежних сторін. Ця формула вірна тільки для прямокутника. З її допомогою можна обчислити площу таких чотирикутників, в яких всі кути близькі до прямих.

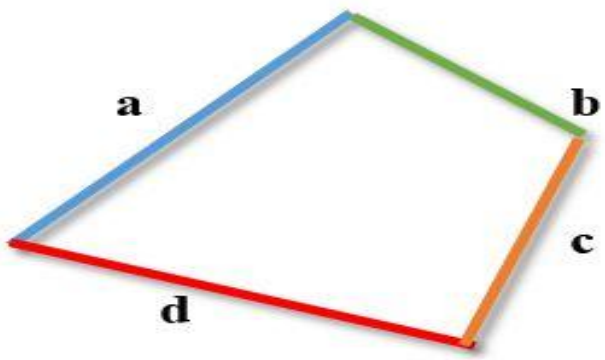


Рис.1. Чотирикутник

Що стосується геометрії індусів, то на ній не доводиться зупинятися: більшість знайомих їм теорем були, напевно, запозичені у греків, хоча самі вони нерідко йшли далі в обчисленнях, заснованих на цих теоремах. Однак слід все ж звернути увагу на одну теорему Брахмагупти, що є поширенням на чотирикутники формули Герона для трикутників. [2, с.268] Формула Герона для обчислення площі трикутника, зі сторонами a,b,c $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ де р – півпериметр.

Брамагу́пта (598 – 668) – давньоіндійський математик і астроном, який написав важливі роботи з математики та астрономії. Формула Брахмагупти для обчислення площі чотирикутника , дуже схожа на формулу Герона. Відмінність в тому, що формула Герона дійсна для довільного трикутника (навколо якого можна завжди описати коло). Формула Брахмагупти - тільки для вписаного в коло чотирикутника, має такий вигляд: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, де a,b,c,d – сторони чотирикутника, а $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ - півпериметр.

Доведення

Нехай дано вписаний чотирикутник ABCD зі сторонами a,b,c,d (рис.2.). позначимо кут при вершині А за α. Тоді, так як сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180^o, то $\angle C=180^o-\alpha$.

$$S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}ad\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin(180^o-\alpha)=\frac{1}{2}\sin\alpha(ad+bc).$$

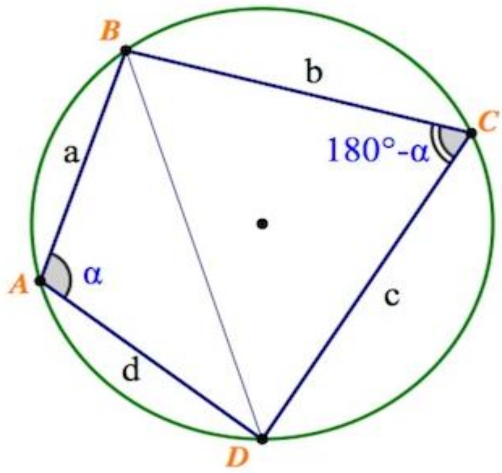


Рис.2. Вписаний чотирикутник

Звідки $S^2{}_{ABCD}=\dfrac{1}{4}\sin^2\alpha(ad+bc)^2=\dfrac{1}{4}(1-\cos^2\alpha)(ad+bc)^2$ (1)

Двічі застосувавши теорему косинусів спочатку для трикутника ABD, потім до трикутника BCD, пам'ятаючи про те, що $\cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha$: $BD^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2+c^2+2bc\cos\alpha$. Звідки $\cos\alpha(2ad+2bc)=a^2+d^2-b^2-c^2$ $\cos\alpha=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$. З формули 1

$$S^2{}_{ABCD}=\frac{1}{4}(1-\cos^2\alpha)(ad+bc)^2=\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right)^2\right)(ad+bc)^2=$$

$$=\frac{1}{4}(1-\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)})(1+\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)})(ad+bc)^2=$$

$$=\frac{(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)(ad+bc)^2}{16(ad+bc)^2}=$$

$$\frac{((b+c)^2-(a-d)^2)((a+d)^2-(b-c)^2)}{16}=\frac{((b+c)-(a-d))((b+c)+(a-d)-(b-c))((a+d)+(b-c))}{16}=$$

$$=\frac{(2p-2a)(2p-2d)(2p-2b)(2p-2c)}{16}=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Остаточно $S_{ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

На випадок довільних (не вписаних) чотирикутників (рис.3.) формула Брахмагупти може бути записана таким чином:

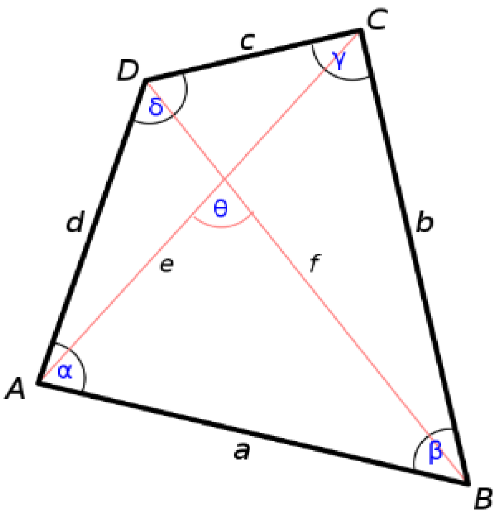


Рис.3

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}=$$

$=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-\frac{1}{2}abcd[1+\cos(\alpha+\gamma)]}$, де a,b,c,d - сторони чотирикутника , α,γ - протилежні кути чотирикутника. Яку саме пару протилежних кутів взяли, не важливо. Оскільки півсума однієї пари протилежних кутів дорівнює φ, то півсума двої інших буде $180^o-\varphi$, а $\cos^2=\cos^2(180^o-\varphi)$. Іноді цю формулу записують так:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-\frac{1}{4}(ac+bd+uv)(ac+bd-uv)},$$

де u,v - довжини діагоналей чотирикутника.

Формули Брахмагупти $S=\sqrt{abcd}$, $S=h^2$ значно спрошують розв'язування геометричних задач та доведення теорем. Насамперед дають змогу обчислити площу чотирикутника без будь-яких зайвих пояснень і побудов. Це значно економить час для і виключає допускання помилок під час розв'язання.

Якщо не використовувати півпериметр в формулі Бахмагути, то матимемо: $S=\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)+8abcd-2(a^4+b^4+c^4+d^4)}}{4}$ [1. с.119]

Також хочеться відмітити, що серед загальних формул для чотирикутників відома також формула Бретшнайдера. Німецький математик Карл Антон Бретшнайдер (1808–1878), до речі вчитель математики та географії, в 1842 році запропонував досить таки цікаву формулу для чотирикутників. На рис.1.4 дано чотирикутник з додатковими побудовами.

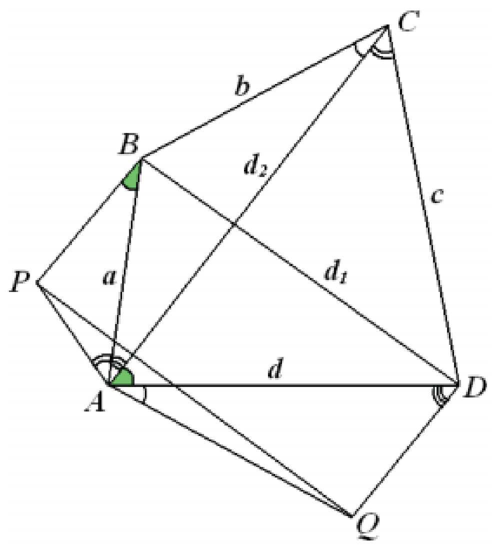


Рис.4 Чотирикутник з додатковими побудовами

Будуються трикутники, подібними , а саме: $\triangle ABP \sim \triangle ACD, \triangle AQD \sim \triangle ABC$. Випишемо пропорції $\dfrac{BP}{d}=\dfrac{AP}{c}=\dfrac{a}{d^2},\dfrac{AQ}{b}=\dfrac{DQ}{a}=\dfrac{d}{d^2}$. Як наслідок маємо наступні відношення: $BP=\dfrac{a\cdot d}{d_2}; AP=\dfrac{a\cdot c}{d_2}; AQ=\dfrac{b\cdot d}{d_2}; DQ=\dfrac{a\cdot d}{d_2}$. В чотирикутнику $BPQD$ сума кутів $\angle PBD+\angle BDQ=\angle BAD+\angle ABD+\angle ADB=180^0$, тобто $BP \parallel DQ$, враховуючи, що $BP = DQ$, отримаємо, що $BPQD$ - паралелограм. Для $\triangle APQ$ запишемо теорему косинусів $PQ^2 = d_1^2 = \left(\frac{ac}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{bd}{d_2}\right)^2 - 2\frac{abcd}{d_2^2}\cdot\cos(A+C)$. Таким чином отримуємо загальну формулу $d_1^2 d_2^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd\cdot\cos(A+C)$ [3.c.8]

На основі аналізу історичної наукової літератури було виділено основну формулу середньовіччя для обчислення площ чотирикутників. Вклад в розвиток обчислення площ чотирикутників внесли такі вчені: Брахмагупта, Карл Антон Бретшнайдер . Проаналізувавши, можна зробити висновок, про значущість відкриття нових формул для обчислення площ чотирикутників, які дають змогу без додаткових побудов знаходити площі. В першу чергу це зменшує ризик отримання помилок при обчислення у учнів. Визначено великий вклад теми дослідження у розвиток всієї математики, безмежну практичну застосовність. За час дослідження обраної теми майбутній вчитель отримує певний набір знань, вмінь, навичок та сформування відповідної компетентності, які мають допомогти йому в роботі в умовах старшої школи, адже застосування наведених формул має бути досить доцільним при підготовці до ЗНО.

Анотація. *В статті розглядаються найперші згадки вчених про обчислення площ чотирикутників. Формули , та їх доведення для площ чотирикутників, які переважно не водять до програми шкільного курсу математики.*

Ключові слова*: чотирикутник, сторона, кут, півпериметр, площа.*

Література

[1] - Корнілов М. Ю. Платохник В. В. Про трикутники Герона // У світі математики: Зб. наук. - популярних статей. - К.: Радянська школа. – Вип.19. – С.134.

[2] - Глейзер Г. И. История математики в школе. Пособие для учителей / Под ред. В. Н. Молодшего. – Москва: Просвещение, 1964. – 376 с.

[3] - Малышев И. Г. Геометрия вписаних и описаних четырехугольников. Элективный курс для клссов с углубленным изучением математики: учебное пособие / И. Г. Малышев. – Н.Новгород: Нижнегородский інститут развития образования, 2019. – С. 62.

Зеликова Н. В.студ., 2 курс)
Научный руководитель – доц. Веневитина С. С.
Воронежский государственный лесотехнический университет
им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, Россия)

НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ НИКОЛАЯ ИВАНОВИЧА ЛОБАЧЕВСКОГО В ОБЛАСТИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Николай Иванович Лобачевский (1792-1856) – русский математик, один из создателей неевклидовой геометрии, выдающийся педагог, деятель университетского образования и народного просвещения. Магистр естественных наук. На Воробьёвых горах близ Московского университета на аллее выдающихся учёных установлен Бюст Николая Лобачевского. Достойную память о нем хранит и его альма-матер Казанский университет, где на протяжении почти полувека учился и работал Николай Иванович. В сквере Казанского университета, есть памятник Николаю Ивановичу Лобачевскому. В его чертах видна сосредоточенность, твердая воля и упорство.

«Коперник геометрии» так высказывался о Лобачевском известный английский математик Уильям Клиффорд. И он был прав, так как Николай Иванович Лобачевский в своё время делал первые шаги к тем фундаментальным открытиям в науке, над которыми еще будут работать ученые будущего. Его жизненный путь был тернист, а наука, которую боготворил Николай Иванович, еще не постижима как наша вселенная.

Родился Николай Иванович 20 ноября 1792 года в Нижнем Новгороде. Отец Николая Ивановича Иван Максимович Лобачевский умер, оставив на попечение жене троих детей. Прасковья Александровна отдала сыновей в Казанскую гимназию, где юный Николай проявил большой интерес к точным наукам и иностранным языкам. Особый интерес к математике привил тогдашнему ученику преподаватель гимназии Григорий Иванович Карташевский. Выдержав экзамены, Николай поступает в Казанский университет.

Согласно документальным источникам в 1808 году в университете преподавали профессор чистой математики Мартин Бартельс, математик Каспар Реннер, а два года спустя – профессор теоретической и опытной физики Броннер и профессор астрономии Литров.

Под влиянием увлеченных педагогов Лобачевский проявлял неистовый интерес не только к точным и фармакологическим (в то время они причислялись к медицинским) наукам. Теоретические знания молодой человек стремился опробовать на практических опытах, в том числе пиротехнических. Он был очень озорным юношей: из-за спора с мальчишками перепрыгнул через грузного профессора Никольского, спускавшегося по лестнице, проехал верхом на корове по аллее, держась за её рога, придумывал эпиграммы, вызывая всеобщий интерес и хохот товарищей. Вопреки запретам он ходит в новогодние праздники в гости и участвует в маскараде. За все эти и другие шалости Лобачевского лишают звания правящего камерного студента и выплаты на книги и учебные пособия. Вот так преподаватели характеризовали студента: упрямство, «мечтательное о себе самомнение, упорство, неповиновение», а также «возмутительные поступки» и даже «признаки безбожия». С этим документом только в солдаты, но заступничество Бартельса отвело «приговор».

С отличием окончив университет, Лобачевский получил степень магистра по физике и математике. Молодой ученый читает лекции по арифметике и геометрии и т.д. В конце августа 1811 года Литров вместе с Лобачевским и Симоновым проводят научный эксперимент и наблюдают комету. А с октября Бартельс с Лобачевским изучают работы Гаусса и Лапласа. После чего Лобачевский представляет научную работу: «Теория эллиптического движения небесных тел». Через два года выходит в свет следующий труд «О разрешении алгебраического уравнения». 26 марта 1814 года 21-летний Лобачевский по ходатайству Броннера и Бартельса утверждён адъюнктом чистой математики. В июле 1816 года Лобачевский утвержден экстраординарным профессором. В этом академическом году он читает курс арифметики, алгебры и тригонометрии, в следующем – курс плоской и сферической геометрии, в 1818/1819 году – курс дифференциального и интегрального исчисления по Монжу и Лагранжу.

В 1819 году Николая Ивановича Лобачевского, как человека показавшего свои незаурядные организаторские и преподавательские способности, назначили деканом физико-математического факультета. В обязанности декана входили следующие обязанности: чтение лекций по математике, астрономии и физике, комплектация и приведение в порядок библиотеки, музея, физического кабинета, создание обсерватории и даже «наблюдение за благонадёжностью» всех учащихся Казани.

Для Николая Ивановича Лобачевского важным аспектом деятельности в первую очередь была наука, но и не менее важной для него умение увлечь ею студента. А для этого нужен был дар педагогический. Умение владеть наукой и давать знания, у него было от природы. Как ученый он был гениален, как педагог одарен, как оратор – ярок, рассудителен, настойчив, стремился увлечь студента патриотическими идеалами учёного-гражданина, который «высокими познаниями составляет честь и славу своего отечества». Он стремился воспитать учеников патриотами своей родины, привить им любовь к прекрасному.

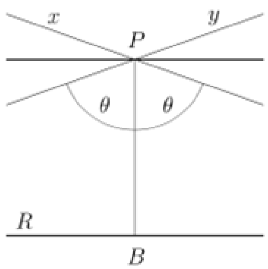
Николай Иванович проявлял внимание к воспитательным аспектам науки, искал философские основы научных знаний. Эти основы методико-педагогической теории Лобачевского применяются и современными педагогами. Свои идеи он изложил в работе «Наставление учителям математики в гимназиях». В своем труде Николай Иванович Лобачевский разработал план ступенчатого изучения математики, он заключался в постепенном восхождении от чувственного восприятия предмета к формированию отвлечённых понятий и суждений – их доказательству. Процесс обучения Николай Иванович рассматривал в единстве умственного и нравственного воспитания.

В 35 лет Лобачевский избран ректором университета. С первых дней Николай Иванович погрузился в хозяйственные дела, реорганизовал штат, построил учебные корпуса, механические мастерские, лаборатории обсерватории, в должном состоянии поддерживал библиотеки и минералогические коллекции, принимал участие в издании «Казанского Вестника» одновременно вел курсы по геометрии, тригонометрии, алгебре, анализу, теории вероятностей, механике, физике, астрономии и даже гидравлике.

Несмотря на занятость, Николай Иванович по-прежнему самоотверженно отдавал все свои силы науке. Один из набросков новой теории – доклад «Сжатое изложение начал геометрии» Лобачевский сделал 11 февраля 1826 года. Это не просто дата в календаре, а официальный день рождения неевклидовой геометрии.

В основе теории Николай Иванович Лобачевский связывал геометрические образы с теми, что существуют в природе. «Оставьте трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость, – цитировал он Ф. Бэкона, – спрашивайте природу, она хранит все тайны и на вопросы ваши будет Вам отвечать непременно и удовлетворительно». Ученый сам проверяет законы новой геометрии, проводит астрономические опыты, с их помощью пытается понять кривизну реального пространства.

В геометрии Лобачевского вместо пятого постулата Евклида принимается следующая аксиома: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пресекающие ее.



Через точку P, не лежащую на данной прямой R, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих R и находящихся с ней в одной плоскости; среди них есть две крайние x, y, которые и называются параллельными прямой R.

Рис. 1.

Отличие геометрии Н.И. Лобачевского можно представить наглядно.

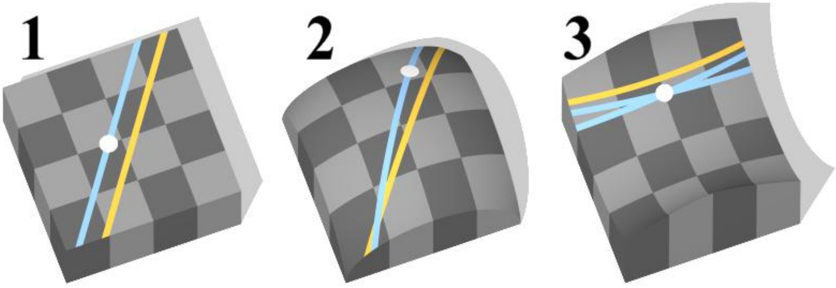


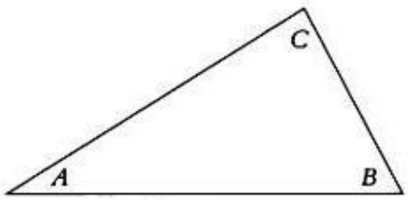
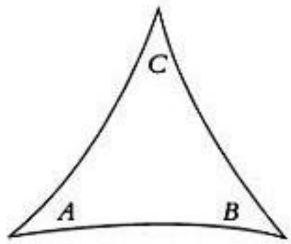
Рис. 2.

Номер 1 – Геометрия Евклида, номер 2 – Сферическая геометрия, номер 3 – Геометрия Лобачевского

Основные постулаты геометрии Лобачевского:

1. Прямые на плоскости либо пересекаются, либо параллельны, либо являются расходящимися. 2. Сохраняются все теоремы, которые можно доказать без использования аксиомы параллельности.

К примеру. Возьмем теорему о сумме углов треугольника.

Геометрия Евклида	Геометрия Лобачевского
 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ Рис. а.	 $\angle A + \angle B + \angle C < 180°$ Рис. б.

1. Разность между 180° и суммой углов треугольника в геометрии Лобачевского называется дефектом этого треугольника.

2. Согласно геометрии Евклида, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны. В геометрии Лобачевского нет подобных треугольников, но есть четвертый признак равенства треугольников: если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

3. Линия равных расстояний от прямой не есть прямая, а особая кривая, называемая эквидистантой, или гиперциклом.

4. Длина окружности не пропорциональна радиусу, а растет быстрее.

Но, увы, опубликованный труд Лобачевского в 1832–1834 годах по неевклидовой геометрии, подвергается резкой невежественной критике современников в Петербурге.

Труд Лобачевского «О началах геометрии», представленный в Академию наук, получил у Михаила Васильевича Остроградского иронически-язвитель-ный отзыв. Остроградский признался, что он ничего в ней не понял. Непонимание соотечественников не остановило ученого, скорее наоборот придавало решительности, Лобачевский стал искать ученых-единомышленников за рубежом. В 1837 году статья Лобачевского «*Воображаемая геометрия*» на французском языке (*Géométrie imaginaire*) вышла в берлинском журнале Крелле. Через три года новый труд Николай Иванович публикует на немецком языке книгу «*Геометрические исследования по теории параллельных линий*».

Книга попадает в руки Карла Фридриха Гаусса. Этот человек считался, «королем математиков» поддерживал взгляды ученого. По рекомендации Гаусса в 1842 году Лобачевский был избран иностранным членом-корреспондентом Гёттингенского королевского научного общества как «один из превосходнейших математиков русского государства». Этот факт единственным прижизненным признанием научных заслуг Лобачевского.

Большую роль в признании трудов Лобачевского сыграли исследования Эудженио Бельтрами (1868), Феликс Клейна (1871), Анри Пуанкаре (1883) и др. Построенные ими модели – (Проективная модель, Конформно-евклидова модель и модель псевдосферы) – доказали, что геометрия Лобачевского непротиворечива в той же мере, что и евклидова геометрия.

16 августа 1846 года Министерство по указанию «Правительствующего сената» (закон за выслугу лет) отстранило Лобачевского не только от профессорской кафедры, но и от должности ректора. Он был назначен помощником попечителя Казанского учебного округа со значительным понижением в окладе. Большое значение для педагогической практики имела деятельность Лобачевского в области народного образования. Он добился улучшения материального положения начальных школ округа, проводил широкую методическую работу среди учителей.

За год до смерти, будучи слепым, закончил свой последний труд «Пангеометрия», диктуя его своим ученикам. Его горячим желанием было создать единую механику – но времени не хватило.

Он умер 24 февраля 1856 года – забытый царем, лишившись орденов и квартиры. Лобачевский скончался в тот самый день, в который 30 годами ранее впервые обнародовал свою версию неевклидовой геометрии.

В честь памяти ученого учреждена международная премия имени Н.И. Лобачевского. Именем Лобачевского названы космические объекты, образовательные учреждения, библиотеки, улицы городов, самолеты и т. д.

Труд ученого продолжили его ученики. А это основная и главная победа ученого. Их имена: Больцани Иосиф Антонович, Зинин Николай Николаевич, Попов Александр Фёдорович, Янишевский Эраст Петрович.

Аннотация. *Статья посвящена научной и педагогической деятельности Николая Ивановича Лобачевского, в частности, геометрическим исследованиям по теории параллельных линий.*

Кузнецова Г. Д. (студ.,2 курс)
Науковий керівник – доц. Ємельянова Т. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ДІАГРАМИ ВЕННА

У теорії ймовірностей при вирішенні логічних задач алгебри випадкових подій можливо скористатися не тільки алгебраїчними методи, а й спеціальними діаграмами, які представляють собою геометричну інтерпретацію процесу вирішення таких задач. В цих діаграмах події зображуються у вигляді різних областей (множин) на площині. Відносини між множинами, областями на площині, можуть стати способом вирішення логічних задач, який виявляється у багатьох випадках, більш швидким ніж аналітичний.

Символічний підхід до вирішення логічних задач був запропонований в 1847 р Дж. Булем, який розробив символіку вирішення логічних задач і показав, що символіка такого роду підпорядковується алгебраїчним законам. Так що, літерні символи об'єктів можна складати, віднімати, множити і навіть ділити. У такій символіці висловлювання можуть бути зведені до форми рівнянь. [1].

У 1880 р британський математик, професор логіки Дж. Венн (1834-1923) опублікував в Philosophical Magazine і журналі Science статтю «Про схематичне і механічне подання прийменників і міркувань», в якій запропонував закон побудови конструкцій з геометричних фігур, що дозволяють отримувати рішення логічних задач. У цій роботі були наведені приклади логічних задач, вирішення яких запропонованим геометричним способом виявлялося не тільки швидким, але й ілюстративним. Пропонуючи графічний спосіб вирішення логічних задач, Венн вважав, що зробив спробу прояснити деякі, на його думку, невідповідності і неясності в логіці Буля. [2].

Найпростіша Діаграма Венна являє собою діаграму другого порядку і складається з двох кіл, які перетинаються так, що утворюють в цілому чотири області A, B, перетин A і B та Ø (порожня множина). Діаграма Венна n-порядку являє собою набір n- простих замкнутих кривих на площині, які перетинаються, таких що:

- криві ділять площину на пов'язані області,
- між кривими існує 2n точок перетину,
- кожна пов'язана область утворена в результаті перетину n- кривих,
- має бути рівно 2^n областей, включаючи зовнішню (порожню) область, яка знаходиться поза всіх кривих. [3].

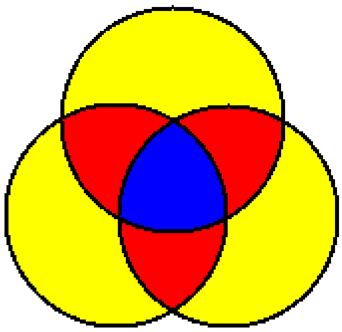
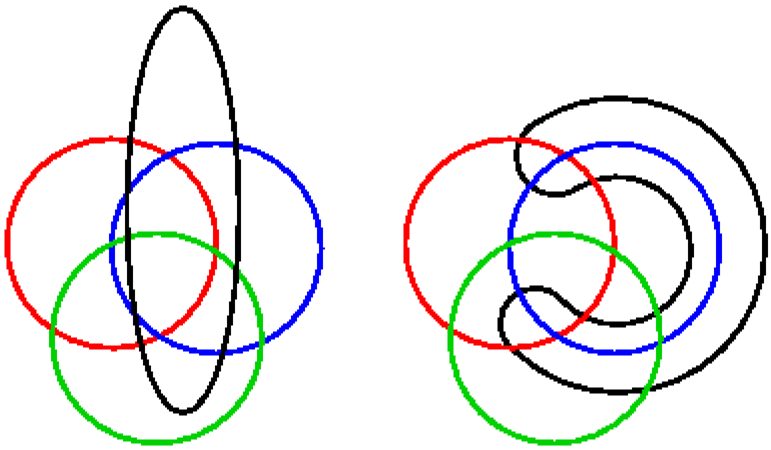


Рис.1. Діаграма 3-Венна. Область, пофарбована синім кольором, називається трикутником Рело.

На рис. 1 показана діаграма Венна з n = 3. Всі прості замкнуті криві являють собою кола. Діаграма містить $2^3 = 8$ областей, з них позначені кольором 7 областей, що лежать всередині зовнішньої області. Кольорова діаграма складається з 3-х областей, забарвлених в жовтий колір, з 3-х областей червоного кольору і однієї області, пофарбованої в синій колір. Таких областей 7. Восьма область - це зовнішня область.

На діаграмі Венна третього порядку область перетину внутрішніх частин трьох кіл являє собою геометричну фігуру, відому як трикутник Рело. Трикутник Рело - унікальний трикутник, він «виділяється рядом екстремальних властивостей: найменшою площею, найменшим можливим кутом при вершині, найменшою симетричністю щодо центру. Трикутник набув поширення в техніці: на його основі були розроблені кулачкові, грейферні механізми, роторно-поршневий двигун і дрилі, що дозволяють свердлити (фрезерувати) квадратні отвори». [4].

У статті «Про схематичне і механічне подання прийменників і міркувань» Дж. Венн дав схему побудови запропонованих ним діаграм, які, тільки на перший погляд, схожі на діаграми Ейлера.[5]. Особливість діаграм Венна полягає в черговості побудови кривих: кожна нова крива, відстежуючи останню додану, ділить кожну існуючу область на дві частини.



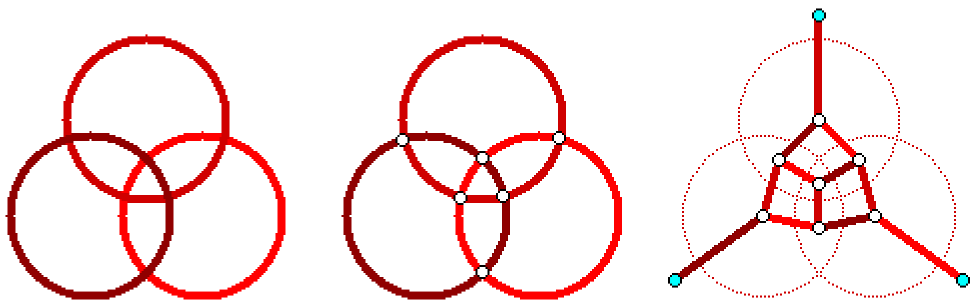
а) б)

Рис. 2. Способи побудови 4-ої кривої (крива виділена чорним кольором) на трикруговій діаграмі Венна

До конструкції 3-ох кругової діаграми (рис.2) додається 4-а крива. Крива чорного кольору побудована четвертою і проведена за вимогами конструкції Венна так, що поділяє кожну існуючу область на дві частини.

Діаграму Венна часто представляють в якості графа (множини вершин, пов'язаних певним чином). Наведемо приклад побудови графів на трикруговій діаграмі Венна.

На рис. 3б представлений трикругова діаграма Венна у вигляді графа, вершини якого знаходяться в точках перетину кривих, ребра відповідають відрізкам кривих між їх перетинами. Такий граф має 6 вершин і 12 ребер, забарвлених відповідно до кривої, якій вони належать.



а) б) в)

Рис. 3. Трикругова діаграма Венна з побудованими на ній графами.

На рис. 3в представлений інший граф, званий двоїстим Венном. Його вершинами є кожна з 7 зв’язкових областей (7 вершин), вершини пов’язані ребрами, якщо мають спільну межу. Ребра пофарбовані відповідно до кордону, яку вони перетинають.

Література

[1] - Кузичев А.С. Диаграммы Венна. – М.: Наука, 1968. – 253 с.
[2] - https://www.newworldencyclopedia.org/entry/Venn_diagram
[3] - https://www.combinatorics.org/files/Surveys/ds5/VennEJC.html
[4] - https://simple.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle
[5] - Фомин В. И. Визуальные решения логических задач Джоном Венном / В. И. Фомин// Метод. – 2016. - № 6. - С.321-328.

Ковалівська А. А. (студ., 3 курс)
Науковий керівник – доц. Сіра І. Т.
Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С.Сковороди (Харків, Україна)

«НАЧАЛА» ЕВКЛІДА, ЇХ ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ ГЕОМЕТРІЇ

Багатовікова робота грецьких геометрів була підсумована і систематизована Евклідом в його знаменитій праці «Начала». Цей твір дає першу логічну побудову геометрії. В ньому виклад настільки бездоганний для того часу, що протягом двох тисяч років з моменту появи «Начал» він був єдиним керівництвом для тих, хто вивчав геометрію.

Велика частина нашої шкільної геометрії часто запозичена з перших шести книг «Начал», і традиція Евкліда дотепер тяжіє над нашим елементарним навчанням. Для професійних математиків ці книги усе ще мають беззаперечну чарівність, а їх логічна побудова вплинула на наукове мислення, мабуть, більше, ніж будь-який інший твір.

Евклід – давньогрецький математик, фізик, філософ (III ст. до н.е.). Біографічні відомості про життя та діяльність Евкліда вкрай обмежені, відомо лише що він родом з Афін, був учнем Платона.

Коли Олександр Македонський (356 – 323 до н.е.) намірився підкорити світ, він переніс центр грецької Ойкумени з Афін в одне з міст Єгипту, який він з властивою йому «скромністю» перейменував в Олександрію. Саме там, в Олександрії, проходила діяльність Евкліда, де він написав перший пам’ятний документ математичного знання – свої класичні «Начала».

В цьому першому трактаті з математики підбито підсумок попереднього розвитку давньогрецької математики, зокрема викладені планіметрія, стереометрія і ряд питань з теорії чисел. Вперше застосовано доведення [1, с. 29].

За своїми філософськими поглядами Евклід був, мабуть, послідовником Платона. Так, принаймні, говорить Прокл. Він додає, що саме тому кінцевою метою «Начал» Евклід поставив побудову правильних багатогранників. І справді, остання, XIII книга «Начал» присвячена правильним багатогранникам, а останнє вісімнадцяте припущення цієї книги дає побудову ребер всіх п’яти правильних багатогранників, вписаних в кулю даного діаметра. З іншого боку, в космологічній теорії Платона (викладеній в діалозі «Тімей») правильні багатогранники грають особливо важливу роль. Вони служать формою чотирьох «елементів»: елемент вогню, як найбільш легкий і рухливий, має форму тетраедра; повітрю приписується форма октаедра, землі – форма куба і воді – форма ікосаедра. П’ятий правильний багатогранник, додекаедр, залишався невикористаним, і бог, якщо вірити Платону, вирішив вжити його для обрисів Всесвіту.

Таким чином, для послідовника Платона було б цілком природно увінчати свою працю теорією правильних багатогранників. Але не слід думати (не думав цього, ймовірно, і Прокл), що побудова правильних багатогранників була єдиною або хоча б важливою метою «Начал». Проти такого припущення говорить сам витвір Евкліда. Було б також неправильним вважати, що розміщення Евклідом теорії правильних багатогранників у самому кінці «Начал» є вирішальним доказом його «платонізму». Такий порядок міг диктуватися лише логічними або естетичними міркуваннями [2, с. 218].

Вплив філософії Платона позначається в «Началах» вже в основному питанні про співвідношення теорії й практики, І хоча Евклід і не ставить це питання на спеціальний розгляд, але позиції його виявляються із самої структури «Начал».

Насправді, в праці Евкліда немає жодного слова про практичні додатки геометрії, в них свідомо пропущені деякі теоретичні питання, без яких не може обійтися вимірювальна практика.

Так, Евклід знаходить відношення площ двох кіл, але залишає без розгляду питання про порівняння площі кола з площею квадрата (або іншою прямолінійною фігурою). Довжина кола не розглядається зовсім, зокрема, залишається без жодної уваги питання відношення кола до діаметра. У практичній геометрії ці задачі відіграють важливу роль, і для їх вирішення за багато століть до Евкліда були відомі досить точні правила. Питання ці й теоретично були актуальними, і через півстоліття Архімед у своєму творі «Вимірювання круга» дав той спосіб вирішення згаданих задач, ідея якого зберігаються у всіх теперішніх шкільних підручниках.

У способі Архімеда немає нічого, що перевершувало б рівень знань або творчих можливостей автора «Начал». Але Евклід не мириться з наближеними методами. Наближені розрахунки – справа практики, а за вченням Платона наука не має з практикою нічого спільного. «Під іменем науки, – говорить Платон в «Державі» вустами Сократа, – я не можу розуміти нічого іншого, крім того, що міркує про суще і невидиме. Там же Сократ заявляє, що геометрія це лише наука, оскільки вона споглядає «суще» (тобто не матеріальне), через те, що вона направляється на «побут» – вона не наука. Такими й тільки такими мотивами міг керуватися Евклід, усунувши з розгляду найважливіші метричні задачі геометрії.

У «Началах» викладається не тільки геометрія, а й «арифметика», тобто по-нашому, теорія чисел. Вченню ж про рахунок, яке зараз ми називаємо арифметикою (в епоху Евкліда називалось «логістикою»), Евклід не приділяє ні рядочка. І в цьому не важко побачити вплив поглядів Платона. Обговорюючи питання про математичну підготовку філософів, яким в ідеальній своїй державі Платон відводить головну роль, Платон вустами Сократа говорить, що вони «повинні займатися арифметикою не як прості люди, а до тих пір поки не піднімуться мисленням до споглядання природи чисел, вивчаючи її не для купівлі та продажу, як купці або торгаші, але для війни й самої душі з метою полегшити їй перетворення від побутових речей до істини й сущого. Напевно, цим керувався Евклід, усуваючи з розгляду важливі задачі арифметики.

Історичне значення «Начал» полягає в тому, що в них вперше була спроба логічної побудови геометрії на основі аксіоматики. Аксіоматичний метод, який панує у сучасній математиці, своїм походженням великою мірою зобов'язаний «Началам» Евкліда.

Основним недоліком аксіоматики Евкліда слід вважати її неповноту; тут немає аксіом безперервності, руху і порядку, тому Евкліду часто доводиться апелювати до інтуїції, довірятися оку. Що стосується визначень точки, лінії, прямої, поверхні й площини, то їх значення полягає в тому, що вони показують природний процес утворення цих понять. Жодна наукова книга не користувалася таким великим і тривалим успіхом, як «Начала». Математики більш пізнього часу – Папп і Прокол – згадують і посилаються на роботи Евкліда, які не дійшли до нас: чотири книги про конічні перетини, матеріал яких увійшов у твори Аполлонія Перського; дві книги про місця на поверхні; три книги «Призми», зміст яких досі до кінця не з'ясовано [2, с. 219].

Яку мету ставив собі математик, коли писав свої «Начала»? Ми можемо з впевненістю вважати, що він хотів спільно викласти в одній праці три великих відкриття недавнього минулого: теорію відносин Евдокса, теорію ірраціональних Теетета і теорію п'яти правильних тіл, які займали видатне місце в космології Платона. То були три типово «грецьких» досягнення [3, с. 18].

Геометрія як емпірична наука в ранній період досягла особливо високого рівня розвитку в Єгипті у зв'язку з землемірними й іригаційними роботами.

У першому тисячолітті до н. е. геометричні відомості від єгиптян перейшли до греків, у Греції почався новий етап розвитку геометрії. У період з VII по III століття до н. е. грецькі геометри не тільки збагатили геометрію численними новими фактами, але зробили також серйозні кроки до строгого її логічного обґрунтування. Робота грецьких геометрів була підсумована і систематизована Евклідом у його праці «Начала» [4, с. 10].

Кожна книга «Начал» починається означенням понять, які зустрічаються вперше. Так, наприклад, в першій книзі подано 23 означення. Зокрема,

Означення 1. Крапка є те, що не має частин.

Означення 2. Лінія є довжина без ширини.

Означення 4. Пряма є така лінія, яка однаково розташована по відношенню до всіх своїх точок [4, с. 11].

У першій книзі «Начал» за означеннями слідують постулати й аксіоми. Наприклад:

Постулат I. Потрібно, щоб від кожної точки до будь-якої іншої точки можна було провести пряму.

Постулат V. Потрібно, щоб кожен раз, коли пряма при перетині з двома іншими прямими утворює з ними внутрішні односторонні кути, сума яких менше двох прямих, ці прямі перетинались з того боку, з якою ця сума менше двох прямих.

Аксіома I. Рівні порізно третьому рівні між собою.

Аксіома II. Якщо до рівних додати рівні, то одержимо рівні [4, с. 11].

І постулати, й аксіоми являють собою твердження, що приймаються без доведення. За яким принципом одні твердження відносяться до постулатів, а інші до аксіом, невідомо.

Слідом за аксіомами йдуть теореми та задачі на побудову під загальною назвою «припущення», розташовані в суворій послідовності так, що доведення (розв'язання) кожного наступного припущення спирається на попереднє. Ось одне з цих припущень.

Припущення 4. Якщо у двох трикутниках дві сторони одного дорівнюють двом сторонам другого і кути, що містяться між рівними сторонами, рівні, то й основа одного трикутника рівна основі іншого, і один трикутник дорівнює іншому, і решта кутів одного трикутника дорівнюють решті кутів іншого, саме рівні кути, протилежні рівним сторонам [4, с. 11].

Хоча «Начала» Евкліда і були протягом тривалого часу зразком для порівняння, вони не досягають рівня сучасної строгості викладу. Дані в першій книзі означення геометричних образів є скоріш описом їх, причому далеко не досконалими. Так, наприклад, означення 4 прямої лінії не відрізняє її від кола, а означення 2 довільної лінії містить згадку про довжину та ширину, які самі потребують означення.

Не слід думати, що дефектні всі означення, подані в першій книзі «Начал». Навпаки, цілий ряд означень, в тому числі кола, трикутника, прямого, гострого і тупого кута, або бездоганні, або містять незначні недоліки, які легко усунути. Якщо при цьому врахувати, що властивості геометричних образів, що містяться в дефектних означеннях, ніде в доведеннях не використовуються, то ці означення можуть бути вилучені без шкоди для викладу.

Що стосується постулатів і аксіом, то їх формулювання бездоганні, твердження, що містяться в них істотні й складають основу наступних за ними доведень.

Що стосується доведень. За задумом автора «Начал», доведення всіх припущень повинні в кінці спиратися на властивості геометричних образів, які визначаються постулатами та аксіомами. Однак швидке знайомство з доведеннями Евкліда переконує нас в тому, що в них неодноразово використовуються такі властивості геометричних образів і відносини між ними, котрі не з'ясовуються ні постулатами, ні аксіомами. Так, наприклад, в доведенні згаданого вище припущення 4 Евклід користується рухом, а в ході інших доведень посилається на властивості взаємного розташування точок на прямій, що виражаються словами «лежати між».

Виникає природне запитання, чи не можна звільнити евклідові доведення від цього недоліку, замінивши, можливо, їх іншими, котрі спиралися б тільки на постулати й аксіоми. Відповідь на це питання була отримана порівняно недавно. Виявилося, що це можливо зробити тільки після належного поповнення системи постулатів і аксіом Евкліда [4, с. 12].

Анотація. *У статті розглянуто зміст «Начал» Евкліда, та показано, як вони вплинули на розвиток геометрії.*

Ключові слова: *Евклід, «Начала», постулат, позиція.*

Література

[1] - Морис К. Математика. Поиск истины. – М.; Мир, 1988. - 185 с.
[2] - Рыбкин Г.Ф., Юшкевич А.П. Историко-математические исследования. Выпуск 1. – М.; ОГИЗ, 1948. - 383 с.
[3] - Стройк Д.Я.. Краткий очерк истории математики. – М.; Наука, 1984. - 56 с.
[4] - Погорелов А.В.. Основания геометрии. – М.; Наука, 1979. 152 с.

УДК 929

Латышева К. А. (студ., 1 курс)
Научный руководитель – доц. Веневитина С. С.
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова (Воронеж, Россия)

РОЛЬ ЖЕНЩИН В МАТЕМАТИКЕ

«Все, что без этого было темно, сомнительно и неверно, математика сделала ясным, верным и очевидным».
(М. В. Ломоносов)

Математика – это наука, исторически основанная на решении задач о количественных и пространственных соотношениях реального мира, что в свою очередь достигается путём идеализации необходимых для этого свойств объектов и формализации этих задач. Наука, занимающаяся изучением чисел, структур, пространств и преобразований.

Данный вид науки – это способ описать мир и то, как одна его часть сочетается с другой. В настоящее время трудно представить, как бы существовали люди без математики, ведь всем известно: «Математика – царица всех наук». Это инструмент для описания нашего разнообразного мира и множества явлений и предметов Вселенной.

А с чего и благодаря кому начала развиваться математика?

Развитие математики началось с создания практических способов счета и измерений. Знакомством с первоначальными истинами обладали уже древние индусы, халдеи, которые занимались в основном алгеброй и арифметикой, а также египтяне вложили большой вклад в изучение и процветание науки.

Я не могу не упомянуть тех людей, кто посвятил всю свою жизнь математике. Уверена, долг каждого из нас – помнить имена каждого и продолжать их дело. Считаю необходимым вспомнить женщин - математиков и их роль в данной науке. К моему сожалению, имен женщин, которые внесли существенный вклад в математику и продвигали ее вперед, встречается мало, многие данные не дошли до наших времен, будучи уничтоженными.

Исходя из исторических сведений, которые свидетельствуют, что женщины-ученые существовали в каждой культуре на протяжении всей истории развития общества, но каких-либо успехов они могли добиваться только в той среде, где имелось позитивное отношение к научным занятиям и система образования, доступная для женщин. Так, в условиях Царской России они не находили поддержки со стороны государства.

Нелегко было пробиваться в науке женщинам, преодолевая и сложные условия того времени, которые их охватывали под влиянием неудач, борьбы между личным и общественным.

Этапы развития женского образования свидетельствуют о том, что во Франции в 1405 году Кристина Пизанская – писательница сделала предположение, что в результате хорошего образования женщины могли бы стать равными мужчинам. А в 1764, в Санкт–Петербурге, был открыт Смольный институт благородных девиц – первое в России привилегированное среднее общеобразовательное учебное заведение для женщин. С этого момента в Германии, Индии, Японии, Франции, России, США, Великобритании женщины смогли получать доступное образование на ровне с мужчинами, добившись равноправия в данной сфере деятельности, преодолев все трудности. Известно, что уже в 6-м веке до н.э. жена Пифагора Феано становится его ученицей. После его смерти она вела его школу еще шесть лет.

Судьбы всех женщин-математиков схожи между собой, и это очевидный факт, связанный с историческим аспектом того времени, неодобрением их выбора обществом.

Расскажу подробнее о нелегком труде и об успехах некоторых из них:

1. Теона Гипатия (Ипатия. 370 н.э. – 415 н.э.) – математик, астроном, философ.

Считается, что Гипатия - первая в истории человечества женщина-ученый. Ее отец был известнейшим математиком, астрономом и механиком того времени. С самого детства девушка увлекалась работой отца, способна была сама придумывать вариацию доказательств известных теорем. Она так быстро достигала успеха в изучении науки, что у нее были ученики. Посещать школу Теоны было большим успехом и честью. Слава о ней шла во многих странах. Однако математики, астрономы и прочие ученые – не вызывали ни симпатии, ни доверия к девушке. Она считалась настоящей гордостью Александрии.

Наследник Императора, Кирилл, начал еще более активную травлю Теоны. Противники Гипатии убили не только ее. Они уничтожили и наследство Великой женщины – не осталось ни одной записи, сделанной ею. Можно сказать, была убита и сама память о женщине.

Что касаемо ее трудов, были комментарии к Арифметике Диофанта Александрийского (3 в.) и Коническим сечениям Аполлония Пергского (2 в. до н.э.).

2. Аньези Мария Гаэтана (16.5.1718–9.1.1799).

Женщина, которая не была похожа на типичного математика.

Средние века характеризуются временами, когда страны выступают против любой формы высшего образования для женщин, утверждая, что это источник соблазна и греха. Женщины в большинстве своем были лишены возможности учиться даже чтению и письму. Единственным выходом для них являлись женские монастыри.

После падения Константинополя, многие ученые переселились в Рим, в результате чего Европа пополнила объем научных знаний. Интеллектуальная женщина вызывала восхищение людей. Такой подход позволил итальянским женщинам заниматься искусством, медициной, литературой и математикой. Среди таких женщин была и Мария Гаетана Агнеси – самый важный и самый выдающийся деятель в области математики в 18-м веке.

Она была самой старшей и, кроме нее, было еще 20 детей. Ее отец был профессором математики и дал ей глубокое образование. Мария была признана чудо–ребенком очень рано. Она выступила в течение часа с пространной речью на латыни на диспуте по вопросу о праве женщин на образование. В подростковом возрасте девушка освоила математику.

Дом ее семьи был местом сбора самых выдающихся интеллектуалов того времени.

Несмотря на все жизненные трудности, девушка не отказывалась от математики. В 1738 опубликовала сборник эссе о сложных вопросах естествознания и философии. Ее жизнь стала очень замкнутой, Мария посвятила себя целиком изучению математики.

Наиболее ценным результатом ее трудов было сочинение «Основания анализа для употребления итальянского юношества» (v.1-2, Mil., 1748). Эта работа вызвала сенсацию в академических кругах, содержит изложение аналитической геометрии, в частности там рассмотрена кривая третьего порядка, названная "локоном Аньези", уравнение которой y=a3 / (x2 +a2) .

Книга была широко переведена и использовалась в качестве учебника.

После успеха своей книги, Мария была избрана в Болонскую академию наук. Она была назначена профессором математики и естественной философии в Болонье. Университет вручил ей диплом, и ее имя было добавлено в список профессоров факультета.

Смерть отца повлияла на судьбу женщины: посвятила всю свою жизнь бедным, бездомным и больным, присоединилась к монашескому ордену.

3. Любовь Николаевна Запольская – первая русская женщина-алгебраист (7 августа 1871– 3 ноября 1943).

Родилась Любовь Николаевна в деревне Сурки Данковского уезда Рязанской губернии в семье учителя. В 1887г. оканчивает с медалью Петровскую женскую гимназию и поступает на трёхлетние женские педагогические курсы, которые оканчивает так же с медалью.

С осени 1890г. Любовь Запольская – слушательница физико-математического факультета четырёхгодичных Петербургских высших женских курсов. Она изучала общий курс математики, аналитическую геометрию, алгебраический анализ, дифференциальное и интегральное исчисление, а также физику, астрономию и другие дисциплины.

Решила посвятить себя научной деятельности в области математики. Но, в связи с тем, что в царской России женщинам был закрыт путь в университеты, с личного разрешения министра просвещения поступает в 1895 году вольнослушательницей в Геттингенский университет.

Диссертацию Любовь Запольская написала самостоятельно. В работе рассмотрены группы подстановок и их подгруппы для некоторых расширений числовых полей. Результаты не только доказаны в общем виде, но и рассмотрены все возможные случаи, в сочетании со сложными и тонкими рассуждениями.

Судьба Л. Н. Запольской в России оказалась более успешной, чем у других женщин–математиков. Она читает лекции по теории рядов, интегральному исчислению, высшей алгебре в Высших женских курсах. В этом же году выходит книга Любови Николаевны «Теория алгебраических областей рациональности, образующихся при решении уравнений третьей степени».

Великую женщину–математика называли новой Ковалевской. В этом же году Московский университет присваивает ей звание профессора.

За заслуги в области науки и народного образования Л. Запольской была назначена персональная пенсия. Умерла Любовь Николаевна Запольская 3 ноября 1943г. в Рязани.

Исходя из выше сказанного, стоит отметить: каждая женщина-математик и их судьба достойна нашего внимания и уважения. Ведь они внесли большой вклад в развитие науки. Благодаря упорству и стремления к поставленной цели – заниматься наукой эти Великие женщины смогли поменять не только свое место в обществе, но и реализоваться в своей деятельности, оставив след в математике для нового поколения.

Аннотация. *Статья посвящена женщинам-математикам. Актуальность выбранной темы обусловлена необходимостью сохранения памяти о значимости женщин в продвижении и реализации математики, как науки.*

Майорович К. Д. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – доц.. Вишневецький О. Л.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет (Харків, Україна)

П. ФЕРМА І ДВІ ЙОГО ВЕЛИКИХ ТЕОРЕМИ

Ім’я цього математика стало прозивним. Якщо говорять «ферматист», значить, мова йде про людину, одержиму якийсь нездійсненною ідеєю. Але це слово не може бути віднесено до самого П'єра Ферма (1601-1665), одного з найсвітліших умів Франції.

Ферма - людина дивовижної долі: один з найвидатніших математиків всіх часів, він не був професійним математиком. За професією Ферма був юристом. Він отримав чудове гуманітарну освіту і був видатним знавцем мистецтва і літератури. Все життя він пропрацював на державній службі, а останні 17 років був радником місцевого парламенту в Тулузі. До математики його вабила безкорислива і піднесена любов, і саме ця наука дала йому все, що може дати людині любов: захоплення красою, насолоду і щастя. У ті роки не було ще математичних журналів, і Ферма майже нічого не надрукував за життя. Але він багато листувався зі своїми сучасниками, і за допомогою цього листування деякі його досягнення ставали відомими. П'єру Ферма пощастило з дітьми: син обробив архів батька і видав його.

«Я довів багато виключно красивих теорем», - сказав якось Ферма. Особливо багато красивих фактів вдалося йому виявити в теорії чисел, одним з авторів якої він був. У паперах і в листуванні Ферма було сформульовано чимало чудових тверджень, про які він писав, що має їх доведення. І поступово, рік за роком таких недоведених тверджень ставало все менше і менше. І нарешті, залишилося тільки одне.

Добре відомо, що квадрати деяких чисел можна розкласти в суму двох квадратів. Такі довжини сторін єгипетського трикутника (зі сторонами 3, 4 і 5: $3^2 + 4^2 = 5^2$). Всі цілочисельні розв'язання рівняння $x^2 + y^2 = z^2$ знайшов Діофант, грецький математик, що жив в III в. н. е., в другій книзі його трактату <Арифметика> (до нас дійшло 6 книг з 13). На полях біля розв'язання Діофанта Ферма написав: «Не можна розкласти куб на два куба, ні квадрато-квадрат (тобто четверту ступінь числа) на два квадрато-квадрата, ні взагалі ніяку степінь вище квадрата і до безкінечності не можна розкласти на два степеня з тим же показником. Я відкрив цьому воістину чудове доведення, але ці поля для нього занадто вузькі ». На сучасній математичній мові це формулюється так: рівняння $x^n + y^n = z^n$ при натуральному $n > 2$ в натуральних числах є нерозв'язним.

У паперах Ферма було знайдено доказ цього твердження для n = 4 (це єдине докладний доведення теореми з теорії чисел, виявлене в паперах Ферма). Для n = 3 теорему Ферма довів Ейлер в 1768 році. Протягом XIX століття для доведення теореми Ферма були зроблені величезні зусилля. Особливих успіхів досяг німецький математик Куммер.

Після його робіт теорема Ферма виявилася доведеною для всіх простих n (а довести її досить тільки для них), менших 100, крім 37, 59 і 97. У XX столітті теорема Ферма була доведена для простих чисел, менших 100 000, але остаточне рішення так і не було знайдено.

У 1908 році любитель математики Вольфскель заповів 100 000 марок тому, хто доведе теорему Ферма. Це стало лихом для математиків багатьох країн. Потекли сотні і тисячі листів з доведеннями теореми Ферма. Як правило, вони містили елементарні помилки, але на їх знаходження витрачалися чималі сили багатьох математиків.

Під час Першої світової війни ця премія знецінилася. Потік псевдодоведень скоротився, але не вичерпався. Здавалося, що ця проблема перейде у 21 сторіччя, але все-таки в 1993 році англійський математик Уайлс «залатав останню дірку» в своєму доказі цієї великої теореми.

Отже, Велика теорема Ферма доведена. Однак тим, хто цікавиться математикою, ім'я Ферма говорить дуже багато незалежно від його Великої теореми. Він був, поза всяким сумнівом, одним з найбільш проникливих умів свого часу. Його по праву вважають основоположником теорії чисел, він вніс величезний внесок в зароджуються нові напрямки, що визначили подальший розвиток науки: математичний аналіз і аналітичну геометрію.

Наступна теорема, безсумнівно, належить до числа вищих досягнень математики XVII-XVIII століть.

Ось кілька перших непарних простих чисел: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Числа 5, 13, 17 представимо у вигляді суми двох квадратів: $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 2^2$

$+ 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, а решта числа (3, 7, 11, 19) цієї властивості не має. Як це пояснити? Відповідь дає

Теорема. Непарне просте число представимо у вигляді суми двох квадратів, тоді і тільки тоді, коли воно при розподілі на 4 дає в залишку 1.

На Різдво 1640 року в листі від 25 грудня П'єр Ферма сповіщав знаменитого Мерсенна, головного посередника в листуванні вчених того часу, про те, що «будь-яке просте число, яке при діленні на чотири дає одиницю, єдиним способом представимо як сума двох квадратів». В ту пору математичних журналів ще не було, інформацією обмінювалися в листах і, як правило, без детальних доведень.

Правда, через майже двадцять років після листа Мерсенна в листі до Каркаві, відправленому в серпні 1659 року Ферма відкриває задум доведення сформульованої вище теореми. Він пише, що основна ідея полягає в методі спуску, що дозволяє з припущення, що для якогось простого числа виду $4n + 1$ висновок теореми невірний, отримати, що він невірний і для меншого числа того ж виду, і т. д., поки ми не доберемося до числа 5, коли остаточно прийдемо до протиріччя.

Перші доведення, які згодом були опубліковані, знайдені Ейлером між 1742 і 1747 роками. Доведення Лагранжа спирається на наслідок з леми Вільсона: якщо p - просте число, то число $(p-1)! + 1$ ділиться на p.

Наслідок з леми такий: якщо $p = 4n + 1$, де n - натуральне число, то $((2n)!)\ 2 + 1$ ділиться на p.

Приймемо лему і наслідок без доведення.

Тепер доведемо теорему. Розглянемо всі пари цілих чисел (m, s), такі що $0 \le m \le [\sqrt{p}]$, $0 \le s \le [\sqrt{p}]$ (через [ ] позначена ціла частина числа, тобто $[\sqrt{p}]$ - найбільше ціле число, яке не перевищує $\sqrt{p}$). Число таких пар $([\sqrt{p}]+1)^2 > p$. Значить, щонайменше для двох різних пар (m_1,s_1) і (m_2,s_2) залишки від ділення m_1+Ns_1 і m_2+Ns_2 на p однакові, тобто число $a+Nb$, де $a=m_1-m_2$, $b=s_1-s_2$, ділитиметься на p. При цьому $|a| \le [\sqrt{p}]$, $|b| \le [\sqrt{p}]$. Але тоді число $a^2-N^2b^2=(a+Nb)(a-Nb)$ ділиться на p, а оскільки $N^2 \equiv -1 \pmod{p}$, то a^2+b^2

ділиться на p, тобто $a^2+b^2=rp$, де r – натуральне число(r не дорівнює 0, інакше пари (m_1,s_1)и (m_2,s_2) були б однакові). З іншого боку,

$$a^2+b^2\leq 2[\sqrt{p}]^2<2p,$$

тому r=1, і значить, $a^2+b^2=p$. Теорема доведена.

Питання про подання чисел у вигляді суми двох квадратів вирішується так. Натуральне число представимо у вигляді суми двох квадратів цілих чисел тоді і тільки тоді, коли всі прості множники виду 4k + 3 входять в розклад цього числа на прості множники з парними показниками (див. [1, с. 45]).

Література

[1] - Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. – М.: Мир, 1974. – 187 с.

УДК 51(09)

Майстрюк І. С. (студ., 5 курс)
Науковий керівник – доц. Сіра І. Т.
Харківський національний педагогічний університет ім. Г. С. Сковороди (Харків, Україна)

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ТА РОЗВИТКУ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ

Алгебра виникла в зв’язку з рішенням різноманітних задач за допомогою рівнянь і нерівностей. Зазвичай в задачах потрібно знайти одну або кілька невідомих, знаючи при цьому результати деяких дій, вироблених над шуканими і даними величинами. Такі завдання зводяться до вирішення одного або системи кількох рівнянь, до знаходження шуканих за допомогою алгебраїчних дій над даними величинами. В алгебрі вивчаються загальні властивості дій над величинами. Деякі алгебраїчні прийоми рішення лінійних рівнянь були відомі ще 4000 років тому в Стародавньому Вавилоні.

Якщо рівняння або нерівність, крім невідомих, входять числа, позначені буквами, то вони називаються параметрами, а рівняння або нерівність - параметричних.

Параметр – це змінна величина, яка в процесі розв'язання рівняння (нерівність) вважають фіксованою і щодо якої проводиться аналіз отриманого рішення.

Розв'язати рівняння з параметром - це значить для кожного значення параметра знайти значення невідомої змінної, яке задовольняє цьому рівнянню.

Розв'язати нерівність з параметром - це значить для кожного значення параметра знайти проміжки невідомої змінної, які задовольняють даній нерівності.

Рівняння та нерівності з параметрами є актуальними під час вивчення шкільного курсу математики. Завдання з параметрами мають діагностичну та прогностичну цінність. З їх допомогою можна перевірити знання основних розділів елементарної математики, рівень логічного мислення, первинні навички дослідницької роботи.

Метою статті є: дослідження історії виникнення та розвиток рівнянь і нерівностей з параметрами.

Завдання на рівняння та нерівності з параметрами зустрічалися вже в астрономічному трактаті «Аріабхаттіам», складеному в 499 році індійським математиком і астрономом Аріабхаттой. Інший індійський учений, Брахмагупта (VII ст.), виклав загальне правило рішення квадратних рівнянь, приведених до єдиної канонічної формі: у рівнянні коефіцієнти, крім параметра а, можуть бути і від'ємними.

В алгебраїчному трактаті Аль-Хорезмі надається класифікація лінійних і квадратних рівнянь з параметром а. Автор налічує 6 видів рівнянь, висловлюючи їх наступним чином:

1) «Квадрати рівні коріння»

2) «Квадрати рівні числу»

3) «Коріння рівні числу»

4) «Квадрати і числа рівні коріння»

5) «Квадрати і коріння рівні числу»

6) «Коріння і числа рівні квадратах»

Формули розв'язання квадратних рівнянь по Аль-Хорезмі в Європі були вперше викладені в «Книзі абака», написаної 1202 р італійським математиком Леонардо Фібоначчі [2, с. 98].

Доведення формули розв'язання квадратного рівняння з параметром в загальному вигляді є у Вієта, однак Вієта визнавав тільки позитивні корені.
Ця теорема була сформульована наступним чином: «Якщо B + D, помножене на A мінус A, так само BD, то A дорівнює B і дорівнює D» .

Висловлюючи залежність між коефіцієнтами рівнянь загальними формулами, записаними за допомогою символів, Віет встановив однаковість в прийомах рішення рівнянь. Однак символіка Вієта ще далека від сучасного вигляду. Він не визнавав негативних чисел і тому при вирішенні рівнянь розглядав лише випадки, коли все коріння позитивні.

Італійські математики Тарталья, Кардано, Бомбеллі серед перших в XII ст. враховують, крім позитивних, і негативні коріння. Лише в XVII ст. завдяки працям Жирара, Декарта, Ньютона та інших вчених спосіб вирішення квадратних рівнянь прийняв сучасний вид. Графічний спосіб визначення числа коренів рівняння в залежності від вхідного в нього параметра є більш зручним, ніж аналітичний.

Завдання з параметрами можна розділити на два типи:

1) В умові сказано: розв'язати рівняння - це значить, для всіх значень параметра знайти всі розв'язки. Якщо хоча б один випадок залишився недослідженим, визнати таке рішення задовільним не можна.

2) Потрібно вказати можливі значення параметра, при яких рівняння має певні властивості. Наприклад, має один розв'язок, не має розв'язків, має розв'язки, що належать проміжку і т. Д. У таких завданнях необхідно чітко вказати, при якому значенні параметра необхідну умова виконується [1, с.50].

Параметр, є невідомим фіксованим числом, має як би особливу подвійність. В першу чергу, необхідно враховувати, що передбачувана популярність говорить про те, що параметр необхідно сприймати як число. У другу чергу, свобода поводження з параметром обмежується його невідомістю.

Так, наприклад, операції ділення на вираз, в якому присутній параметр або вилучення кореня парного степеня з подібного вираження вимагають попередніх досліджень. Тому необхідна акуратність у поводженні з параметром.

Таким чином, рівняння та нерівності з параметрами почали досліджувати 4000 років тому, а перші згадки про них почали з'являтися у 499 році індійським математиком і астрономом Аріабхаттой. Також досліджували Тарталья, Кардано, Бомбеллі, Жирар, Декарт, Ньютон та інші. Рівняння та нерівності з параметрами є актуальними, бо вони мають діагностичну та прогностичну цінність, відбувається перевірка знань основних розділів елементарної математики, рівень логічного мислення, первинні навички дослідницької роботи. Підвищується інтерес до предмету, орієнтація на підготовку продовження освіти з обраного предмету. А в повсякденному житті кожен з нас щодня і постійно вирішує завдання з декількома параметрами, і від уміння швидко і логічно вірно прораховувати ходи, вирішувати життєві завдання.

Анотація. *У статті розглядається історія виникнення та розвиток рівнянь і нерівностей з параметрами. Обґрунтовано роль завдань з параметрами у шкільному курсі математики. Проаналізовано наукові дослідження, що присвячені рівнянням і нерівностям з параметрами* .

Ключові слова: *рівняння з параметром, нерівність з параметром, параметр, історія виникнення рівнянь і нерівностей з параметрами, розвиток рівнянь і нерівностей з параметрами, типи завдань з параметрами.*

Література

[1] - Горнштейн П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б.Полонский, М. С. Якир. – М.: Илекса; Харьков: Гимназия, 2002. – 328 с.

[2] - Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами / Г. А. Ястребинецкий. - М.: Просвещение, 1986. – 187 с.

Мельник Олена (студ., 1курс),
Мельник Ольга (студ., 1курс)
Науковий керівник – ст. викл. Мороз І. І.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕОРІЇ ЕПІДЕМІЙ

Для вивчення будь-якого природного явища або роботи машини спочатку вивчають все можливі зв'язки між величинами. Потім ці зв'язки описують математично у вигляді рівнянь або системи рівнянь. Розв'язуючі ці рівняння або системи рівнянь, роблять висновки як надалі буде розвиватися це явище або у якому стані буде машина під час роботи, що треба зробити, щоб отримати необхідні результати. Ці рівняння або системи рівнянь можуть бути як алгебраїчними так і диференціальними. Диференціальні рівняння називають диференціальною моделлю вивчаємого явища або процесу. Диференціальні рівняння – це потужний засіб математичного моделювання.

Розглянемо одну з диференціальних моделей, які зустрічаються в теорії епідемій. Припустимо, що деяка популяція, яка складається з N особин, розбивається на три групи. До першої групи відносять особини, які вразливі до деякої конкретної хвороби, але здорові. Число таких особин в момент часу t позначимо $S(t)$.

В другу групу об'єднують особин, які є інфікованими – вони самі є хворими і розповсюджують хворобу. Число таких особин в популяції в момент часу t позначимо $I(t)$.

Третя група – це особини, які здорові і мають імунітет до даної хвороби. Їхню кількість в момент часу t позначимо $R(t)$.

Таким чином,

$$S(t)+I(t)+R(t)=N. \tag{1}$$

Далі припустимо, що у випадку, коли число інфікованих особин перевищує деяке фіксоване число I^*, тобто $I(t) > I^*$, тоді швидкість зміни числа вразливих до хвороби особин буде пропорційна числу самих вразливих до хвороби. В той же час швидкість зміни числа інфікованих, але одужуючих особин, будемо вважати пропорційній числу інфікованих.

Ці припущення спрощують реальну ситуацію, але в деяких випадках вони відтворюють сутність проблеми.

З першого припущення $I(t) > I^*$, тоб-то коли кількість інфікованих перевищую деяке фіксоване число I^*(поріг захворюваності), випливає, що вони здатні заражати вразливих до хвороби особин. Це означає, що приймається до уваги ізоляція (до певного моменту часу) інфікованих особин (карантин або обсервація).

В результаті приходимо до диференціального рівняння

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, \text{ якщо } I(t) > I^* \\ 0, \text{ якщо } I(t) \le I^*. \end{cases} \tag{2}$$

Оскільки кожна вразлива до хвороби особина нарешті теж захворіє, то вона сама стає джерелом інфекції, тоді швидкість, за якою зміцнюється число інфікованих осіб є різницею за одиницю часу між щойно захворівшими і тими, які вже одужують

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, \text{ якщо } I(t) > I^* \\ -\beta I, \text{ якщо } I(t) \le I^*. \end{cases}, \tag{3}$$

де α – коефіцієнт захворюваності,

β – коефіцієнт одужування.

Швидкість зміни числа особин, які вже одужують і мають імунітет, задається рівняння

$$\frac{dR}{dt} = \beta I.$$

Для того, щоб розв'язоки цих рівнянь визначалися однозначно, задаємо початкові умови:

1) Спочатку припустимо, що в момент часу t=0 в популяції нема особин з імунітетом до хвороби. Це означає, що $R(0) = 0$.

2) Початкова кількість інфікованих особин дорівнює $I(0)$: $I(0) = 0$.

3) Будемо вважати, що коефіцієнти захворюваності і одужування однакові,

$$\alpha = \beta.$$

Розглянемо випадок, коли число $I(0) \leq I^*$. Тоді зі збільшенням часу особини в популяції не будуть наражатися на зараження хворобою, оскільки за рівнянням (2)

$$\frac{dS}{dt} = 0.$$

Враховуючи рівняння (1) і умову $R(0) = 0$, для всіх значень t буде мати місце рівність

$$S(t) = S(0) = N - I(0).$$

Цей випадок відповідає ситуації, коли значна кількість вразливих до хвороби особин знаходиться в ізоляції. Тоді з рівняння (3) будемо мати таке диференціальне рівняння

$$\frac{dI}{dt} = -\alpha I, \;\; I(0) = 0,$$

$$\int \frac{dI}{dt} = -\int \alpha dt,$$

$$\ln|I| = -\alpha t + \ln|c|,$$

$$I = ce^{-\alpha t}.$$

Враховуючи початкові умови, будемо мати

$$I(t) = I(0)e^{-\alpha t}, \tag{4}$$

Тоді кількість особин з імунітетом до цієї хвороби з рівнянь (1) і (4) дорівнює

$$R(t) = N - S(t) - I(t) = N - (N - I(0)) - I(0)e^{-\alpha t} =$$
$$= I(0)(1 - e^{-\alpha t}).$$

Покажемо графічно зміну числа особин в кожній групі з ростом t (рис. 1).

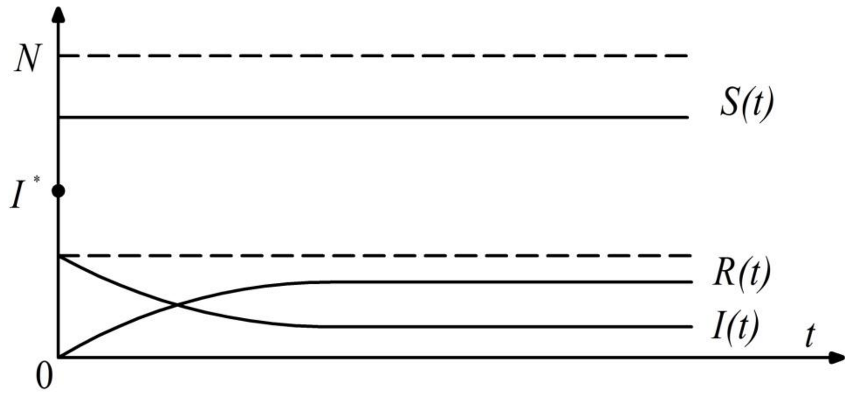


Рис. 1. Зміна числа інфікованих особин в кожній групі

Висновок. Аналізуючи графік бачимо, що коли кількість інфікованих особин не перевищує порога захворюваності і їх значна кількість знаходиться в ізоляції, тоді кількість здорових, але вразливих до хвороби особин не змінюється, кількість людей з імунітетом зростає, а число хворих зменшується.

Література

[1] - Амелькин В. В. Математические модели и дифференциальные уравнения / В. В. Амелькин,А. П. Садовский. – Минск: Вышейшая школа, 1982. – 272 с.

[2] - Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

УДК 373.31:51 (091)

Пляшник А. С. (студ., 1 курс),
Чернобай М. С. (студ., 3 курс)
Науковий керівник – доц. Овсієнко Ю. І.
Полтавська державна аграрна академія (Полтава, Україна)

ПРО ДОСЯГНЕННЯ ВИДАТНИХ УЧЕНИХ-МАТЕМАТИКІВ ПОЛТАВЩИНИ

«Всі гадають, ніби математика – наука суха, що полягає вона тільки в умінні рахувати. Це безглуздя. Цифри в математиці відіграють наймізернішу, найостаннішу роль. Це – найвища філософська наука, наука найбільших поетів…»
Остроградський Михайло Васильович

Полтавщина подарувала світові величезну кількість талановитих людей. Серед них: видатні вчені, винахідники, Нобелівські лауреати, письменники, музиканти, обдаровані лікарі та спортсмени. Складемо біографічну хронологію учених-математиків, чий невтомний пошук став фундаментом діяльності дослідників-учених, методистів-педагогів, інженерів-конструкторів.

Ващенко-Захарченко Михайло Єгорович (1825-1912 рр.) народився у селі Маліївка Золотоніського повіту колишньої Полтавської губернії в сім’ї нащадка запорізького козака. Відомий як автор підручників із аналітичної і проективної геометрії, алгебри, варіаційного числення. Він вперше систематично виклав операційне числення і застосував його до розв’язування диференціальних рівнянь. Переклав «Елементи» Евкліда з редакцією тексту на основі принципів елементарної геометрії останніх відкриттів XIX ст. Це не лише вчений, а й викладач, який вважав, що: «Не в знанні великої кількості теорем, не в швидкому розв’язуванні геометричних задач, а в розумінні строго логічної послідовності найнеобхідніших теорем полягає вся вага педагогічного значення геометрії в загальній освіті юнацтва» [2].

Вороний Георгій Феодосійович (1868-1908 рр.) народився в селі Журавка колишньої Полтавської губернії у родині педагогів. Він є видатним українським математиком. Феномен Георгія Вороного полягає у застосуванні всіх результатів його наукової діяльності в сучасних дослідженнях.

Побудовані вченим математичні об'єкти – діаграми Вороного, широко використовуються в багатьох актуальних напрямках науки, зокрема, в комп'ютерній графіці, геометричному моделюванні, створенні штучного інтелекту, розпізнаванні образів, конструюванні роботів, у медицині, радіаційній фізиці, астрофізиці, кристалографії, археології тощо. Вчений настільки був захоплений науковою діяльністю, що про неї говорив: «Сама лише математика, наче яскрава зірка, сяє переді мною, на неї всі мої сподівання» [2].

Пфейффер Георгій Васильович (1872-1946 рр.) – видатний математик народився у селі Сокиринці колишньої Полтавської губернії у родині садівника. Він створив загальний спосіб формального інтегрування нелінійних рівнянь і їх повних систем із частинними похідними першого порядку; досліджував загальні проблеми інтегрування рівнянь із частинними похідними. Науковий доробок вченого складає понад 300 робіт, значна кількість із яких була надрукована в наукових виданнях Французької, Німецької, Швейцарської академій наук та у звітах міжнародних конгресів [3].

Лоповок Лев Михайлович (1916-1992 рр.) народився у місті Полтава у родині робочих. Видатний педагог-математик, один із творців проблемного навчання та розвиваючої системи вправ із математики, автор шкільних підручників, збірників задач, методичних вказівок для вчителів і учнів, книг для позакласного читання з математики. Його праці видавалися російською, українською, болгарською, німецькою, угорською, чеською, польською, сербською, румунською та ін. іноземними мовами. Вважав, що без творчості у викладанні неможливо плідно й результативно працювати [4].

Митропольський Юрій Олексійович (1917-2008 рр.) народився в селі Чернишівка Шишацького району Полтавської області. Видатний вчений сучасності в галузі математичної фізики, теорії нелінійних коливань та диференціальних рівнянь. Він отримав фундаментальні результати в галузі асимптотичних методів нелінійної механіки, якісних методів теорії диференціальних рівнянь, у дослідженні динаміки коливних процесів у нелінійних системах [1, 2].

Ляшко Іван Іванович (1922-2008 рр.) народився у селі Мацківцях на Полтавщині в родині селянина. Був першим деканом факультету кібернетики у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, де заснував наукову школу з математичної теорії фільтрації, розв'язав ряд нових задач математичної фізики, теорії функцій комплексної змінної й узагальнених аналітичних функцій, розробив ефективні методи розв'язування деяких некоректних задач теорії керування [2].

Шкіль Микола Іванович (1932-2015 рр.) народився в селі Бурбино Семенівського району Полтавщини у селянській родині. Наукові інтереси вченого були спрямовані на розробку асимптотичних методів інтегрування диференціальних рівнянь та їх систем. Він уперше всебічно дослідив досить складні випадки внутрішніх і зовнішніх резонансів, що досить часто зустрічаються в теорії і на практиці. Одержані математичні результати пов'язані з розробкою алгоритмів побудови наближених розв'язків систем диференціальних рівнянь із параметрами та їх математичним обґрунтуванням [2].

Можна продовжувати біографічний список далі і до нього увійдуть вчені-винахідники, які внеси свій вклад у розвиток науки і техніки завдяки фундаментальній математичній базі знань. Серед них: Засядько Олександр Дмитрович (1779-1837 рр.) – конструктор кількох типів бойових запалювальних і гранатних ракет; Піроцький Федір Аполлонович (1845-1898 рр.) – український електротехнік і винахідник електромоторного вагона трамвая; Кондратюк Юрій Васильович (1897-1942 рр.) український вчений-винахідник, один із винахідників ракетної техніки й теорії космічних польотів, автор так званої «траси Кондратюка», якою подорожували на Місяць космічні кораблі «Аполлон»; Духов Микола Леонідович (1904-1964 рр.) – розробник важких танків КВ та ІС, головний конструктор першої радянської атомної бомби; Івахненко Олексій Григорович (1913-2007 рр.) –

автор першої наукової статті про термоелементи [1]; Когновицький Олег Станіславович (1938 р.) – учений-електротехнік, зробив великий внесок у галузь обробки рекурентних (зворотних) послідовностей над полем GF(pk) на основі двоїстого базису поля; Бобрищев Олександр Васильович (1942-2002 рр.) – вчений-математик, довів теорему Ферма [2]; Сергієнко Іван Васильович (1936 р.) – український вчений у галузі інформатики, обчислювальної математики, системного аналізу та математичного моделювання, доктор наук, професор, академік НАН України та багато інших талановитих діячів науки і техніки [2].

Кожна людина найбільше любить той край де живе. Кожен пишається своєю рідною землею і завжди говорить про неї тільки найкраще. Математика – це не тільки формули і теореми, це ще і ті люди, які нею займаються, які всю душу вкладають в її розвиток. І ніяк не можна, кажучи про математику, не згадати про тих, хто їй присвятив все життя і доніс її до нас. Їх імена не можна забувати. Ці люди віддали своє життя науці. Наш обов'язок, як нащадків, – пам'ятати їх внесок і продовжувати справу.

Анотація. *У статті представлено біографічну хронологію учених-математиків Полтавщини, чий невтомний пошук став фундаментом діяльності дослідників-учених, методистів-педагогів, інженерів-конструкторів.*

Ключові слова: *вчений, математика, дослідник, винахід.*

Література

[1] – Видатні математики Полтавщини [Електронний ресурс] // Математична освіта: веб-сайт. – Режим доступу : http://reshetylivka-osvita.edu.poltava.ua/vidatni_matematiki_poltavschini/ (дата звернення : 2.03.20). – Назва з екрану.

[2] – Володарі і теорем, і аксіом... [Електронний ресурс] // Полтавська обласна бібліотека для юнацтва : веб-сайт. – Режим доступу : http://libgonchar.org/index.php?option=com_content&view=article&id=87%3Aq (дата звернення: 2.03.20). – Назва з екрану.

[3] – Інститут математики НАН України [Електронний ресурс] // Національна академія наук України : https://www.imath.kiev.ua/institute (дата звернення : 2.03.20). – Назва з екрану.

[4] – Видатні математики Полтавщини [Електронний ресурс] // Всеосвіта: веб-сайт. – Режим доступу : https://vseosvita.ua/library/vidatni-matematiki-poltavsini-22000.html (дата звернення : 2.03.20). – Назва з екрану.

Потапова Т. В. (студ., 3 курс)
Науковий керівник – доц. Сіра І. Т.
Харківський національний педагогічний університет ім. Г. С. Сковороди (Харків, Україна)

П'ЯТЬ ВІДОМИХ ЗАДАЧ ДАВНИНИ

Математичні задачі, що виникають у житті та в практичній діяльності людей, в техніці й в науці, в тому числі й в математиці, досить чисельні та різноманітні. Вміння правильно ставити ці задачі, якісно і швидко розв'язувати їх дуже цінувалось на всіх ступенях культурного розвитку людей, особливо в епоху науково-технічної революції, коли математика починає проникати в усі науки та всі сфери діяльності людей. Розв'язанню задач відводиться багато часу при вивченні математики у школах та вищих освітніх закладах [1, с. 3].

Серед математичних задач деякі користуються особливою популярністю; їм з часом привласнюють епітети: «ті що не піддаються», «підступні», «перлини математики», «величні», «неприступні фортеці», «знамениті» тощо. Особливо великої уваги привертали до себе протягом багатьох століть задачі, які з давніх часів відомі як «відомі задачі давнини» Під цією назвою зазвичай фігурували три відомі задачі: 1) квадратура кола, 2) трисекція кута, 3) подвоєння куба. Деякі автори з повною підставою зараховують до них ще дві задачі давнини: 1) розподіл кола на рівні частини, 2) квадратура серпків [1, с. 3].

Задача про квадратуру кола, тобто про побудову квадрата, рівновеликого даному колу, в Стародавній Греції була, мабуть, дуже популярна. Тобто, якщо позначити радіус круга через r, то мова буде йти про побудову квадрата, площа якого дорівнює πr^2, а сторона дорівнює $r\sqrt{\pi}$ [2, с. 189]. Плутарх повідомляє, що філософ Анаксагор (бл. 500-428 рр. до н. е.) у в'язниці займався цією задачею. Про неї говориться і в комедії Арістофана «Птахи» (414 р. до н. е.): «Приклавши сюди лінійку, коло описую циркулем, і верх і низ ... Потім лінійкою відношу пряму. Коло тепер подібне до чотирикутника». Ця згадка в комедії означає, що задача про квадратуру кола була загальновідома.

Дивним чином задача про квадратуру кола і зворотна їй задача «кругатури квадрата», тобто побудови кола, рівновеликого даному квадрату, була відома також і в Стародавній Індії. Індійські вівтарі були різноманітних форм, але всі вони повинні були мати одну і ту саму площу. У зв'язку з цим виникали задачі перетворення кола у рівновеликий йому квадрат і квадрата у рівновелике йому коло. Розв'язання цих задач наведені в давньоіндійської книзі «Сульвасутра», присвяченій побудові вівтарів.

Найбільш ранні давньогрецькі розв'язки задачі про квадратуру кола, дійшли до нас, на перший погляд здаються просто безглуздими. Афінянин Антифонт вписував в коло многокутник (трикутник або квадрат), потім ділив дуги навпіл і будував вписаний многокутник з подвоєним числом сторін і т. д. Він вважав, що в решті решт вийде многокутник, який, завдяки крайній малості своїх сторін, співпаде з колом. Брізон брав квадрат, вписаний в коло, і квадрат, описаний біля кола, а потім брав квадрат, що лежить між ними. Він стверджував, що площа останнього квадрата дорівнює площі кола. Але давні древньогрецькі коментатори до розв'язань Антифонта і Бризона відносились зневажливо та взагалі їх не обговорювали. Але діяльність Антифонта і Бризона не треба недооцінювати. Для розв'язання задачі про квадратуру кола необхідно було зрозуміти, що таке площа круга, а для цього треба було мати уяву про границю. У Давній Індії обійшли ці труднощі, прийнявши на віру неточний розв'язок цієї задачі. Антифонт і Бризон на дотик шукали поняття границі. В їх міркуваннях неправильного багато, але є дещо дуже важливе; створений в подальшому метод вичерпання багато у них перейняв [3, с. 49].

Квадратурою круга займався також найвідоміший геометр V ст. до н. е. – Гіппократ Хіоський. У багатьох, хто займався цією задачею виникли сумніви, а чи можливо взагалі побудувати прямолінійну фігуру, рівновелику криволінійній. Ця можливість була доведена Гіппократом, який побудував місяцеподібні фігури (рис 1), відомі під назвою «гіппократові серпки». Так з'явилася друга знаменита задача про квадратуру серпків. Тобто у півколо з діаметром $|BC|$ вписано рівнобедрений прямокутний трикутник $BAC\,(|BA|=|AC|)$. На $|AB|$ і $|AC|$, як на діаметрах описуються півкола. Фігури-меніски $ALBM$ та $ADCE$, обмежені круговими дугами, і називаються серпками.

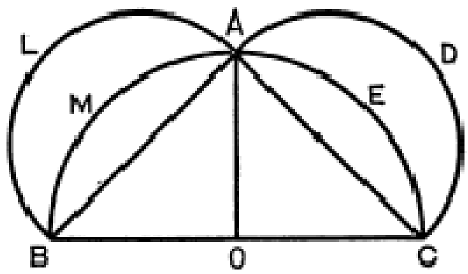


Рис. 1.

За теоремою Піфагора маємо:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = 2|AC|^2 \qquad (1)$$

Відношення $\dfrac{S_1}{S_2}$ площ кругів або півкругів $BMAEC$ та $AECD$ дорівнює, як вперше довів сам Гіппократ, відношенню квадратів відповідних діаметрів $\dfrac{|BC|^2}{|AC|^2}$, яке в силу (1) дорівнює 2. Отже, площа сектора OAC дорівнює площі півкруга, побудованого на діаметрі $|AC|$. Якщо від обох цих рівних площ відняти спільну площу сегменту ACE, то і отримаємо, що площа трикутника AOC дорівнює площі серпка $ADCE$, або сума площ обох серпків дорівнює площі рівнобедреного трикутника BCA. Гіппократ знайшов й інші серпки, що припускають квадратуру, та продовжив свої пошуки з надією дійти до квадратури круга, що йому, звичайно, не вдалося [2, с. 190].

Усі інші, хто продовжував протягом тисячоліть спроби знайти квадратуру круга незмінно закінчувались невдачею. Лише у 80-х роках XIX ст. було строго доведено, що квадратура круга за допомогою циркуля та лінійки неможлива.

Задача про квадратуру круга розв’язується, якщо застосувати, окрім циркуля та лінійки, ще інші засоби побудови. Так, ще у IV ст. до н. е. грецькі математики Діностpат та Менехм користувалися для розв’язку задачі однієї кривої, яка була знайдена ще у V ст. до н. е. Гіппієм Елідським. Однак вчених Давньої Греції та їх послідовників такі розв’язки, що знаходилися за границями застосування циркуля та лінійки, не задовольняли. Будучи спочатку суто геометричною задачею, квадратура круга перетворилася протягом століть у виключно важливу задачу арифметико-алгебраїчного характеру, яка пов’язана з числом π, та сприяла розвитку нових понять та ідей у математиці [2, с. 191].

Подвоєння куба – так називається третя класична задача древньогрецької математики. Ця задача поряд з іншими трьома зіграла велику роль у розвитку математичних методів [2, с. 194]. Задача полягає у побудові куба, що має об’єм, вдвічі більший від об’єму даного куба. Якщо позначити через a ребро даного куба, то довжина ребра x шуканого куба повинна задовольняти рівнянню $x^3 = 2a^3$, або $x = a\sqrt[3]{2}$.

Задача є істотним узагальненням аналогічної задачі про подвоєння квадрата, яка розв’язується просто: стороною квадрату, площа якого дорівнює $2a^2$, служить відрізок довжиною $a\sqrt{2}$, тобто діагональ даного квадрату зі стороною a. Навпаки, подвоєння куба – задача не проста, оскільки ребро куба, об’єм якого дорівнює $2a^3$, тобто відрізок x, що дорівнює $a\sqrt[3]{2}$, не може бути побудований за допомогою циркуля та лінійки. Однак це було доведено лише у першій половині XIX ст.

Для практичних цілей точний розв’язок задачі про подвоєння куба був не потрібен, але математиків вона зацікавила. Гіппократ Хіоський переформулював задачу приблизно так: «За відрізками a і $2a$ побудувати такі відрізки x і y, що $a : x = x : y = y : 2a$». Насправді, тоді $\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \bullet \frac{x}{y} \bullet \frac{y}{2a} = \frac{1}{2}$, тобто $x^3 = 2a^3$. Це переформулювання було істотним.

Алгебра виникла значно пізніше, і древньогрецькі математики добуток двох відрізків уявляли як прямокутник. Добуток трьох відрізків доводилось розглядати вже як паралелепіпед. Перетворювати паралелепіпеди було б дуже складно, а зауваження Гіппократа дозволяло працювати з відношеннями відрізками. У подальшому всі розв'язували задачу саме у формулюванні Гіппократа, причому, як правило, в загальному вигляді: відрізок $2a$ заміняли на довільний відрізок b та будували такі відрізки x та y, що $a:x=x:y=y:b$. В цьому випадку $\left(\frac{a}{x}\right)^3=\frac{a}{x}\bullet\frac{x}{y}\bullet\frac{y}{b}=\frac{a}{b}=\left(\frac{y}{b}\right)^3$, тобто $x=\sqrt[3]{a^2b}$ та $y=\sqrt[3]{ab^2}$ [3, с. 8]. Розв'язок цієї задачі дозволяв також для прямокутного паралелепіпеда будувати ребро куба, об'єм якого дорівнює об'єму паралелепіпеда. Так можна пояснити, як за ребрами p, q та r прямокутного паралелепіпеда можна побудувати ребро потрібного куба. За даними сторонами p і q прямокутника будувати сторону a квадрата, площа якого дорівнює площі прямокутника, вміли вже на ранніх етапах розвитку древньогрецької математики. Зрозуміло також, що якщо $a=\sqrt{pq}$ та $b=r$, то $\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[3]{pqr}$ [3, с. 9].

Не менш відомими є задачі про трисекцію кута та розподіл кола на рівні частини. Ці дві задачі тісно пов'язані між собою. Їх виникнення також пов'язано з практичною діяльністю, зокрема вміти розділити коло на рівні частини треба було при виготовленні колеса зі спицями, а поділ кута або дуги кола на декілька рівних частин використовувався в архітектурі, у створенні орнаментів, у будівній техніці та в астрономії. Відомо, що ще давні вавілоняни вміли ділити коло або кут $360°$ на 6 рівних частин [1, с. 45]. Так, ділення прямого кута на рівні частини вміли робити ще піфагорійці, ґрунтуючись на тому, що у рівносторонньому трикутнику кожен кут дорівнює $60°$. Нехай треба розділити на три рівні частини прямий кут MAN (рис 2).

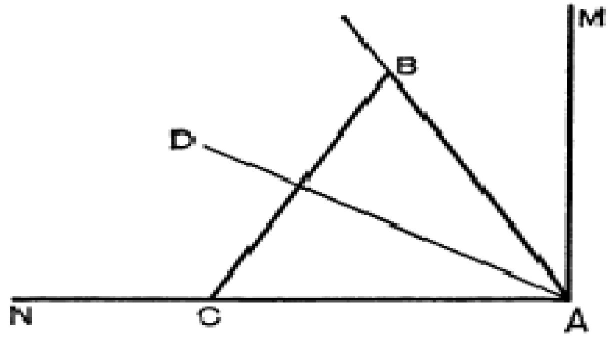


Рис. 2.

Відкладаємо на півпрямій $|AN|$ довільний відрізок $|AC|$, на якому будуємо рівносторонній трикутник ACB. Оскільки кут CAB дорівнює 60°, то $\angle BAM = 30°$. Побудуємо бісектрису $|AD|$ кута CAB, отримаємо шуканий поділ прямого кута MAN на три рівні кути: $\angle NAD, \angle DAB, \angle BAM$.

Задача про трисекцію кута розв'язується і при деяких інших частинних значеннях кута, однак не в загальному випадку, тобто будь-який кут неможливо розділити на три рівні частини лише за допомогою циркуля та лінійки. Це було доведено лише в першій половині XIX ст.

Задача про трисекцію кута розв'язується і у загальному вигляді, якщо не обмежуватися у геометричних побудовах тільки класичними інструментами, циркулем та лінійкою. Так, наприклад олександрійський математик Нікомед (ІІ ст. до н. е.) розв'язав задачу про трисекцію кута за допомогою однієї кривої, що називається конхоїдою Нікомеда, і дав опис прибору для креслення цієї кривої [2, с. 193]. Гіппій же у V ст. до н. е. побудував квадратрису та використав її для поділу будь-якого кута на скільки завгодно рівних частин [1, с. 47].

Таким є довгий та складний шлях розвитку п'яти відомих задач с найдавніших часів і до сьогодення. Як видно, вже багато зроблено для створення наукової історії цих задач, також є великим внесок у сучасну їх теорію. Однак багато питань історії та сучасної теорії п'яти великих та відомих задач давнини очікують ще своїх розв'язків.

Анотація. *У статті розглянуто історію розвитку п'яти відомих задач давнини впродовж століть, наведено спроби розв'язувань задач великими математиками.*

Ключові слова: *трисекцію кута, подвоєння куба, «гіппократові серпки», квадратура кола, задачі давнини.*

Література

[1] – Белозеров С. Е. Пять знаменитых задач древности (История и современная теория) / С. Е. Белозеров. – Ростов: РГУ, 1975. – 320 с.

[2] - Глейзер Г. И. История математики в школе 7-8 классы / Г. И. Глейзер. – Москва: Просвещение, 1982. – 240 с.

[3] - Прасолов В. В. Три классические задачи на построение: удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга / В. В. Прасолов. – Москва: Наука, 1992. – 80 с.

Твердий І. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – ст. викл. Мороз І. І.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ

Мова чисел, як і звичайна мова, має свій алфавіт, Мова чисел, якою зараз користуються практично у всьому світі, є десять цифр від 0 до 9. Ця мова називається десятковою системою числення. В наш час поряд з десятковою системою числення користуються двійковою і трійковою системами числення. Система числення - це символічний метод запису чисел, подання чисел за допомогою письмових знаків

В десятковій системі числення кожне ціле додатне число надається у вигляді суми одиниць, десятків, сотень і т.п., тобто у вигляді суми ступенів числа 10 з коефіцієнтами, які приймають значення від 0 до 9 включно. Наприклад, число 2548 можна записати у вигляді:

$$2548 = 2\cdot10^3 + 5\cdot10^2 + 4\cdot10^1 + 8\cdot10^0 .$$

Причина, за якою десяткова система числення стала загальновизнаною, не має математичного характеру. Десять пальців рук – це первинний апарат для підрахунку, яким людина користувалася ще в давнину. Проте, десяткова система числення не відразу отримала широке поширення. У різні історичні періоди багато народів користувалися іншими системами числення. Наприклад, велике поширення мала дванадцятерічна система числення. Її походження пов’язане також з підрахунком на пальцях - по числу фаланг на чотирьох пальцях руки.

У древньому Вавілоні існувала дуже складна шістдесятерічная система. У ряді африканських племен була поширена п’ятіркова система числення. У народів Америки (ацтеків і майя) – була прийнята двадцятерічна система. Численні сліди цих систем числення збереглися до наших днів і в мовах багатьох народів, і в прийнятих грошових системах і в системах мір. Проте для запису чисел і для виконання обчислень користуються десятковою системою. Залежно від принципу побудови розглядають позиційні і непозиційні системи. Позиційні системи будуються за принципом: вибирається число за основу системи числення, тоді кожне число подається у вигляді комбінації ступенів з коефіцієнтами, що набувають значень від 0 до $p-1$:

$$N = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_1 p + a_0 p^0 .$$

Така форма запису числа називається розгорнутою формою. У скороченому вигляді:

$$(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_p ,$$

де p – основа системи.

Наприклад: 11001_2 – число в двійковій системі числення

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ a_4 = 1,$$

31_8 – число у вісімко вій системі числення $a_0 = 1,\ a_1 = 3$.

Для позначення цифр, більших за 9, зазвичай використовують латинські букви: $A(10),\ B(11),\ C(12),\ldots$ Так, в шістнадцятковій системі, часто вживаній в інформатиці, використовуються цифри і букви 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F.

Перехід у десятеричну систему числення здійснюється прямим обчисленням по розгорнутій формі запису числа, наприклад:

$$101100_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 \cdot 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 8 + 4 + 0 = 44_{10}.$$

Щоб зменшити кількість операцій при перекладі числа користуються схемою Горнера для систем числення:

$$(...((a_{n-1}p + a_{n-2})p + a_{n-3})p + a_0.$$

Переклад в довільну систему числення здійснюється по наступному алгоритму: $N = (a_n \cdot a_{n-1},...a_0)_p$ число ділять на число p із залишком. В результаті отримують неповну частку

$$a_n p^{n-1} + ... + a_2 p^1 + a_1 p^0$$

і залишок a_0, оскільки усі члени суми поділяться на без залишку, а останній член в результаті поділу дає 0 і a_0 в залишку.

Таким чином, ми отримують найправильнішу цифру a_0, як залишок від поділення, і число $(a_n a_{n-1}...a_1)$, як результат поділу числа N на. Продовжуючи поділ за таким же принципом, отримують усі інші цифри справа наліво: $a_1 a_2 ... a_n$, тобто, $N = a_0 a_1 a_2 ... a_n$.

Наприклад, представимо число 25 в трійковій системі числення:

25/3=8, залишок 1,

8/3=2, залишок 2,

2/3 = 0, залишок 2,

отримуємо 221_3.

У непозиційній системі числення є деякий набір основних символів і кожне число представляється як комбінація цих символів. Приклад такої системи - римські цифри.

Найбільш простою і такою, що отримала поширення в обчислювальній техніці являється двійкова система. У двійковій системі беруть участь тільки дві цифри 0 і 1, а число 2 представляє вже одиницю наступного розряду. Недоліком двійкової системи є те, що оскільки основа системи мала, для запису навіть не дуже великих чисел доводиться використати багато знаків. Наприклад, число 1000 записується в двійковій системі у вигляді:1111101000, тобто за допомогою десяти цифр. Проте цій її недолік часто окупається рядом переваг, які і служать причиною широкого поширення в різних областях техніки і електроніки.

Хоча внутрішня мова деяких комп'ютерів першого покоління була побудована на десятковій системі числення, починаючи з 50-х років практично в усіх цифрових обчислювальних машинах застосовувалася вже двійкова система. Наявність всього двох символів значно спрощувала і здешевлювала схеми, побудовані на основі цієї системи.

Мікроскопічні електронні перемикачі в центральному процесорі сучасного комп'ютера приймають тільки два стани – вони або проводять струм, або ні, представляючи, тим самим, значення 0 і 1. Для схем, побудованих на десятковій системі, знадобилося б 10 різних станів. Двійкова система відповідає також системі алгебри логіки, розробленої в XIX столітті Джорджем Булем. У рамках цієї системи висловлювання може бути або істинним, або неправдивим, подібно до того як перемикач може бути або відкритим або закритим, а двійковий розряд - рівний 1 або 0.

Двосимвольне подання інформації лягло в основу мови ЕОМ. Слова, сказані людиною, яка вперше ступила на Місяць, були закодовані за допомогою нулів і одиниць.

Література:

[1] - Фомин С. В. Системы счисления / С. В. Фомин. - М.: Наука, 1981. – 60 с.

[2] - Курочкин В. М. Компьютер / В. М. Курочкин. - М.: Мир, 1989. – 239 с.

Чорний Є. Є. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – доц. Вишневецький О. Л.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ЕЙЛЕР І ЙОГО ФОРМУЛА $e^{\pi i}=-1$

Число Ейлера $e \approx 2{,}718281828....$ (як і число π) зустрічаються у різних розділах математики. Обидва не є раціональними. Але якщо числу π можна дати означення в межах елементарної математики (як відношення довжини кола до його діаметра) і воно було відоме ще з часів древньої Греції, то число e не має елементарного означення і «з’явилося» в середні сторіччя.

Як відомо, в курсі математики середньої школи та в першому семестрі ВНЗ число Ейлера означається за допомогою границі

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \tag{1}$$

або границі

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

З цих означень ніяк не зрозуміла «велич» числа Ейлера. Існує багато границь, які є ірраціональними числами, але не грають у математиці таку ж велику роль, як e. Більш суттєвим є те, що функція $y = e^{x}$ дорівнює своїй похідній, тобто є розв’язанням диференціального рівняння $y' = y$. Але число e потрібно знати іще до означення диференціального рівняння, тому в усіх підручниках означають число e за допомогою вище вказаних границь…

Основною темою даної роботи є доведення формули Ейлера

$$e^{\pi i} = -1 \tag{2}$$

Знаменитий академік, математик і кораблебудівник Олексій Миколайович Крилов, бачив в цій формулі символ єдності всієї математики, бо в ній "-1 представляє арифметику, і - алгебру, π - геометрію і е-аналіз».

Можна дуже багато сказати про творця цієї формули Леонарді Ейлера (1707-1783) - геніального математики, фізики, механіки і астронома, швейцарця за походженням, прожив значну частину свого життя в Росії.

Леонард Ейлер - один з найбільших трудівників в історії науки. Йому належить 865 досліджень з найрізноманітніших проблем. У 1909 році швейцарське природниче товариство приступило до видання повного зібрання творів Ейлера. З тих пір пройшов термін, більший, ніж все життя Ейлера, видано близько сімдесяти томів його творів, а видання ще не закінчено. Переписка Ейлера займає понад 3000 листів. Вже одне це - свідчення незвичайного морального обличчя вченого: поганим людям листів не пишуть. Всі вчені, сучасники Ейлера, ділилися з ним плодами своїх роздумів, просили висловити свою думку з потрібних проблем і завжди знаходили відгук і підтримку.

Незвичайні щедрість і благородство Ейлера відбилися в відомому жарті, що стосується самого визначення: кого слід називати математиком. Визначення математика (згідно цьому жарту) індуктивно. Підставу індукції становить твердження: Ейлер - математик. І далі: математиком називається людина, якого математик називає математиком (при такому визначенні можна бути впевненим, що людина, яка зробила в математиці щось змістовне, буде математиком в сенсі цього визначення. Але якщо в якості підстави брати інших вчених, то не можна виключити випадки , коли список математиків складався б тільки з однієї особи ...)

Душевна краса Ейлера відбилася в багатьох його вчинках. Коли молодий Лагранж присвятив Ейлера в свої дослідження в області варіаційного числення, Ейлер направив йому лист (від 2 грудня 1759 року, Лагранжу було тоді 23 роки), що містив такі благородні слова:

«Твоє аналітичне рішення ізопериметричної проблеми містить, наскільки я бачу, все, що тільки можна бажати в цій області, і я надзвичайно радий, що ця теорія, якою після моїх перших спроб я займався чи не один, доведена до найбільшої досконалості. Важливість питання спонукала мене до того, що я за допомогою твого освітлення сам вивів аналітичне рішення; я, проте, вирішив приховувати це, поки ти не опублікуєш свої результати, так як я жодним чином не хочу забирати частину заслуженої тобою слави».

Перейдемо до основної теми роботи: доведемо формулу (2) коротко та з мінімальним застосування вищої математики.

При доведенні ми будемо використовувати наступну формулу (біном Ньютона):

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_2^{n} a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-2}a^2b^{n-2} + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n \qquad (3)$$

де n – натуральне число, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Застосуємо формулу бінома (3) до правої частини формули (1):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\times\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\times\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times\frac{1}{n^3} + \ldots$$

Перейдемо в обох частинах рівності до границі при n → ∞. Оскільки у чисельниках та знаменниках кожного доданку в правій части степені n однакові, отримаємо наступний розклад в ряд:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Міркуючи аналогічно, можна отримати розклад

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad (4)$$

Функція e^x має багато цікавих властивостей. Зокрема, всі її похідні в точці 0 рівні 1.

Скористаємося формулою Тейлора з центром в точці 0:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \qquad (5)$$

щоб розкласти в ряд функції $\sin x$ і $\cos x$. Оскільки $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, то $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$, $(\sin x)^{(4)} = \sin x$, тому можна знайти похідні будь-якого порядку від $sin x$ і $cos x$. А оскільки $sin 0 = 0,\ cos 0 = 1$, то з формули (5) одержуємо

$$sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,\quad cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots..$$

Підставимо в формулу (4) замість x комплексне число πi (де і – уявна одиниця, тобто $i^2 = -1$). Будемо мати:

$$e^{\pi i} = 1 + \pi i + \frac{\pi i^{\ 2}}{2!} + \frac{\pi i^{\ 3}}{3!} + \frac{\pi i^{\ 4}}{4!} + \frac{\pi i^{\ 5}}{5!} \dots = 1 + \pi i - \frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^3}{3!} i + \frac{\pi^4}{4!} + \frac{\pi^5}{5!} i - \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\pi + - \frac{\pi}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \dots\right) = cos\,\pi + i\,sin\,\pi = -1$$

Формула (2) доведена.

Література

[1] - Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии / Ф. Клейн. - М.: Наука, 1989. – 456 с.

Юнік Д. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Бобрицька Г. С.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ХРОНОЛОГІЯ СТАНОВЛЕННЯ ТА РОЗВИТКУ ЕЛЕКТРОНІКИ В УКРАЇНІ В XIX-XX СТ.

Електронні пристрої є невід'ємною складовою життя сучасної людини. Ми маємо можливість обирати серед продуктів провідних світових компаній. І мало хто замислюється над тим, що Україна не стояла осторонь науково-технічного прогресу, і має свою історію розвитку обчислювальної техніки, якою може пишатися.

У 1914 р. Щукарьов Олександр Миколайович професор Харківського.політехнічного інституту висловив ідею механізації логічних дій та побудував "Машину логічного мислення", здатну механічно робити прості логічні висновки на основі вихідних смислових посилок. У 1941 р. українським фізиком Вадимом Лашкарьовим експериментально відкритий р-n перехід, використаний пізніше американськими вченими при створенні транзистора. У 1948 р. Сергієм Лебедєвим обгрунтовано принципи побудови і структуру універсальної цифрової електронної обчислювальної машини з програмою, що зберігається в пам’яті (незалежно від американських і англійських вчених). Розроблена в 1948-1950 р. і прийнята в експлуатацію Державною комісією в грудні 1951 р.. перша в СРСР та континентальній Європі цифрова електронна обчислювальна машина - Мала електронна лічильна машина «МЭСМ»). Машина була створена в лабораторії обчислювальної техніки Інституту електротехніки АН УРСР. Машина займала кімнату площею 60 м^2 і працювала з небувалою на ті часи швидкістю - 3 тисячі операцій за хвилину (для порівняння, сучасні комп’ютери виконують мільйони операцій за секунду) і могла виконувати операції віднімання, додавання, множення, ділення, зсуву, порівняння з урахуванням знака, порівняння за абсолютною величиною, передачі керування, передачі чисел з магнітного барабану, складання команд. У машині були використані електронні лампи загальною потужністю споживання в 25 кВт. Перший запуск «МЭСМ» запам’ятався саме «ламповою проблемою»: при включенні машини 6000 ламп, що запрацювали одночасно, перетворили приміщення в тропіки. Технікам довелося терміново розбирати стелю, щоб відвести з кімнати хоча б частину тепла.

У 1956 р. під керівництвом Зіновія Рабіновича створена перша в Україні спеціалізована електронна лічильна машина "СЭСМ" для розв’язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У 1961 р. створена перша в СРСР напівпровідникова керуюча машина широкого призначення "Дніпро". Комп’ютер КМ "Дніпро" використовувалася в багатьох перших піонерських керуючих системах промислового та спеціального призначення, у наукових дослідженнях та ін.

У 1964 р. розроблено принципи побудови, структура та архітектура, сконструйовані і випущені перші в СРСР машини для інженерних розрахунків "Промінь" та сімейства "МИР". Пізніше запропоновано ідею схемної реалізації мов високого рівня. Реалізовано проект ЕОМ "Україна".

У 1970 р. розроблено структуру та архітектуру першого в Радянському Союзі та Європі мікрокалькулятора на 4-х великих інтегральних схемах МОП-ВІС. З 1971 по 1989 р. розроблено та організовано випуск 12 типів бортових ЕОМ (у тому числі радіаційно стійких) для ракетно-космічних комплексів стратегічного призначення. У 1972 р. розроблено та розпочато серійний випуск спеціалізованих супернадійних ЕОМ "Карат" для систем озброєння і керування на надводних та підводних, у тому числі атомних суднах Військово-Морського флоту СРСР, а також для розв'язання задач навігації на суднах торгового флоту та атомних криголамів (понад 60 типів систем) Підготовлено та опубліковано першу в світі "Енциклопедію кібернетики" українською та російською мовами. У 1974 р. вперше у світі запропоновано принципи побудови рекурсивної (не неймановської) ЕОМ.

У 1986 р. ЕОМ "Дельта" - спеціалізований обчислювальний комплекс для збору й обробки телеметричної інформації і керування аерокосмічними експериментами. Використовувався для обробки даних, знятих з комети Галлея, а також для обробки даних про розповзання радіонуклідів після аварії на АЕС у Чорнобилі.

У 2005-2012 рр. в Україні розроблено кластерний суперкомп'ютер СКІТ. Він складається з чотирьох обчислювальних кластерів, найновішим серед них є СКІТ-4, який удвічі потужніший за СКІТ-3, при цьому менший за розмірами та має значно менше енергоспоживання – 15 кВт проти 60 кВт для СКІТ-3. У 2013 році, завдяки модернізації його продуктивність було збільшено з 10 до 18 ТФлопс. Цей обчислювальний комплекс було створено під керівництвом видатного українського кібернетика – Івана Васильовича Сергієнка, науковим керівником якого був Віктор Глушков.

Наразі в Україні випускаються електронні книги Pocketbook, IPTV-приставки, їх розробкою займаються, компанії «Инфомир», TeleTec та FlexTronics..

На відміну від програмної розробки, українська електронна промисловість (в аспекті мікроелектроніки, в тому числі і широкого спектру побутової продукції) не зможе відродитися самостійно. Держава має приділяти більшу увагу розвитку цієї галузі. В той же час, збережені НВО мають перспективи для подальшого розвитку.

Отже, Україна зробила великий внесок у розвиток світової електроніки, відігравала одну з провідних ролей у цій галузі в СРСР, та попри економічні труднощі займає свої позиції на ринку систем керування. Українська мікроелектроніка потребує підтримки держави. Нам є ким і чим пишатися.

Література

[1] - Інформаційні технології в Україні: історії та особистості. Електронний доступ: http://ua.uacomputing.com

[2] - Юрасов С. У пошуках української електроніки. // Економічна правда, 20 липня 2015 року. Електронний доступ: https://www.epravda.com.ua/publications/2015/07/20

УДК 004.932.2:004.93’1

Алєксєйчук Д. І. (студ., 3 курс),
Медведєв Д. А. (студ., 3 курс)
Науковий керівник – доц. Гадецька С. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет (Харків, Україна)

ЗАСТОСУВАННЯ ФОРМУЛИ БАЄСА ПРИ ВИРІШЕННІ ЗАДАЧ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ

Теорія розпізнавання образів є розділом прикладної математики, який розвиває теоретичні основи і методи класифікації і ідентифікації об’єктів, які характеризуються певним набором деяких ознак. Такі задачі вирішуються досить часто, наприклад, при переході або проїзді вулиці за сигналами світлофора. Розпізнавання кольору лампи світлофора, що засвітилася, і знання правил дорожнього руху дозволяють прийняти правильне рішення щодо можливості проїзду по дорозі або переходу на її протилежний бік в певний момент часу. Іншим прикладом може бути проблема розпізнавання водієм дорожніх знаків, вирішення якої дає можливість багатьом автовиробникам здійснювати встановлення в серійні автомобілі систем технічного зору. Отже, з точки зору наведених прикладів актуальність задачі розпізнавання візуальних образів зумовлена, зокрема, питаннями безпеки дорожнього руху.

Забезпечення результативності та багатофункціональності сучасних систем комп’ютерного зору вимагає створення різноманіття ефективних методів інтелектуального оброблення візуальної інформації. Розвиток систем структурного розпізнавання безпосередньо пов’язаний як із побудовою нових ефективних методів, так і з необхідністю створення механізму оцінювання результативності таких методів для конкретних прикладних зразків візуальних даних. Одним із засобів, що базуються на статистичних характеристиках структурних даних, є апарат баєсовської теорії прийняття рішень. Обчислення апостеріорних ймовірностей віднесення опису візуального об’єкта до множини еталонів дає можливість як безпосередньо здійснювати розпізнавання на їх підставі, так і попередньо оцінити результативність процедур порівняння чи обчислення релевантності описів стосовно конкретної прикладної бази зображень. Особливу увагу приділяють вивченню структури множини дескрипторів зображень, що безпосередньо впливає на показники функціонування систем розпізнавання.

Під розпізнаванням розуміємо відображення множини описів об’єктів $\{O\}$ в скінченну множину номерів еталонів $\{1,...,J\}$, що здійснюється шляхом віднесення опису $O=\{o_l\}$ невідомого візуального об’єкта до одного з елементів еталонної множини $Z=\{Z^j\}_{j=1}^J$ (рис. 1).

Рис. 1. Схема структурного розпізнавання

Процес розпізнавання будемо здійснювати з застосуванням баєсовського класифікатора [1]. Виходячи з початкових кластерних описів еталонів $Z=\{Z^J\}_{j=1}^J$ і об’єкта $O=\{o_l\}$, обчислимо за формулою Баєса апостеріорні ймовірності $P\left(Z_j / O\right)$ віднесення об’єкта послідовно до кожного з описів $h[Z^j]$, $j\in\{1,...,J\}$ [2]:

$$P\left(Z_j / O\right)=\frac{P\left(O / Z^j\right)\cdot P\left(Z^j\right)}{\sum_{j=1}^{J} P\left(O / Z^j\right)\cdot P\left(Z^j\right)}, \qquad (1)$$

де $P\left(O/Z^j\right)$ – апріорна ймовірність належності об'єкта до еталону Z^j, $P\left(Z^j\right)$ – ймовірність появи еталону Z^j. Появу еталонів для спрощення вважаємо рівноймовірною.

Дискретний характер проблеми віднесення об'єкта $O=(h_1,h_2,...,h_k)^o$ до еталону Z^j в кластерному поданні призводить до обчислення набору ймовірностей узагальненого гіпергеометричного розподілу [3]:

$$P\left(O/Z^j\right)=\prod_{i=1}^{k} C_{h_i^j}^{h_i} / C_{s_j}^{s}. \tag{2}$$

Зауважимо, що формула (2) має сенс лише для невід'ємних цілих значень параметрів, які задовольняють умовам:

$$h_i \le h_i^j,\ s_j \le s,\ i=1,...,k,\ j=1,...,J. \tag{3}$$

При застосуванні формули (3) можливе виникнення складнощів при невеликих значеннях h_i^j. Це може означати надмірно дрібне розбиття на кластери, якого можна запобігти шляхом їх укрупнення. Об'єкт O відносимо до класу $d \in \{1,...,J\}$ за правилом: $d=\arg\max\limits_{j} P\left(Z_j/O\right)$.

Як бачимо, обраний метод обчислює ступінь релевантності на підставі визначення значень ймовірності віднесення опису до відповідного класу. Оцінювання результативності процедур структурного розпізнавання в межах конкретної прикладної бази зображень здійснимо на підставі порівняння відповідних числових результатів – ймовірностей віднесення еталону до класу у обраному методі.

Адекватність розрахунків можна також підтвердити значенням сукупного критерію близькості кожного з векторних описів у аналізованій базі еталонів [4]:

$$\gamma_d=\sum_{\substack{j=1\\ j\ne d}}^{J}\sum_{i=1}^{k}\left|h_i^j-h_i^d\right|. \tag{4}$$

Чим менше значення γ_d, тим ближче цей еталон до сукупності решти еталонів. Відповідно, і класифікується він гірше.

Із проведених розрахунків для змодельованих та реальних описів візуальних об'єктів можна зробити узагальнюючий висновок про універсальні властивості запропонованого методу щодо прийняття рішення про клас об'єктів на підставі їх структурного опису, трансформованого до кластерного вигляду. Ключовим критерієм, який можна застосувати для верифікації розрахунків, є значення (4).

Дискретна природа постановки проблеми і, відповідно, обчислення набору ймовірностей узагальненого геометричного розподілу в процесі застосування формули Баєса у розробленому методі призводить до накладення певних обмежень щодо значень параметрів образу, задоволення яких може потребувати додаткового коригування вхідних даних – як на етапі формування кластерної структури еталонів і аналізованого об'єкту, так і на етапі роботи із сформованими структурними описами.

Запропонований у роботі простий в аспекті обчислювальних витрат статистичний підхід на підставі баєсовських оцінок може застосовуватися для попередніх розрахунків ефективності розпізнавання без проведення затратних експериментів з програмного моделювання.

Анотація. *В роботі аналізуються можливості застосування формули Баєса при вирішенні проблем розпізнавання візуальних образів, пов'язані, зокрема, з питаннями безпеки дорожнього руху*.

Ключові слова: *формула Баєса, комп'ютерний зір, база еталонів*.

Список літератури

[1] - Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений/ Р. Гонсалес, Р. Вудс; [пер. с англ.]. – М.: Техносфера, 2005. – 1070 с.

[2] - Duda R. O. Pattern classification / Duda R. O., Hart P. E., Stork D. G. – 2ed., Wiley, 2000.–738p.

[3] - Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1 / В. Феллер; [пер. с англ.]. – М.: Мир, 1984.– 528 с.

[4] - Гороховатский В. А. Структурный анализ и интеллектуальная обработка данных в компьютерном зрении / В. А. Гороховатский. – Х.: Компания СМИТ, 2014. – 316 с.

УДК 517.977

Асанова А. С. (студ, 1 курс),
Научный руководитель – к.ф.-м.н. Смирнова Е. В.
Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова (Воронеж, Россия)

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОЙ СХЕМЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О СБЛИЖЕНИИ С РАЗЛИЧНЫМИ ВЕСОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Исследуем модель оптимального функционирования двух управляемых динамических процессов, которым в фиксированные моменты t_j временного промежутка $[0,T]$ предписано сближение по траекториям.

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u,v) = \frac{1}{2}(\langle x^0 - y(0), F_0(x^0 - y(0))\rangle + \langle x(T) - y^T, F_{N+1}(x(T) - y^T)\rangle +$$
$$+\sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \langle x(t_j) - y(t_j), F_j(x(t_j) - y(t_j))\rangle + \int_0^T (\langle u(t), R(t)u(t)\rangle + \langle v(t), P(t)v(t)\rangle dt) \to \min_{u,v}$$
(1)

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ x(0) = x^0,$$
(2)

$$\frac{dy(t)}{dt} = C(t)y(t) + D(t)v(t),\ y(T) = y^T.$$
(3)

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, симметрические операторы $F_j \geq 0,\ j = 0,\ldots,N+1$, $R,P > 0$. Квадратичные формы отклонения траекторий в промежуточных точках входят в функционал с различными весовыми коэффициентами ε^j. (В работе [1] весовые коэффициенты были одинаковыми.)

Во многих задачах оптимального управления с малым параметром применялся метод прямой схемы (см. обзор [2]). Этот метод состоит в расщеплении исходной задачи на подзадачи, последовательное решение которых дает возможность найти коэффициенты асимптотики. Применение такого подхода позволяет проследить вклад каждого члена асимптотического разложения в функционал, в нашем случае – выполнение следующего по рангу сближения в определенный момент времени.

Будем искать решение в виде

$$z=(x,y,u,v)^{*}, \qquad z=\sum_{j\ge 0}\varepsilon^{j} z_{j}. \tag{4}$$

Подставляя разложения (4) в (1), представим функционал в форме следующего ряда

$$J_{\varepsilon}=\sum_{j\ge 0}\varepsilon^{j} J_{j}. \tag{5}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, из (2)−(3) получим уравнения для членов разложений (4).

Решением вырожденной задачи P_0 (см. (1)−(3) при $\varepsilon=0$) будет нулевое приближение решения. Рассмотрим вспомогательные подзадачи:

$$P_k:\tilde{J}_k(u_k,v_k)=\frac{1}{2}(\langle y_k(0),F_0 y_k(0)\rangle+\langle x_k(T),F_{N+1}x_k(T)\rangle+$$

$$+2\sum_{j=1}^{m}\langle x_k(t_j)-y_k(t_j),F_j(x_{k-j}(t_j)-y_{k-j}(t_j))\rangle+\int_0^T(\langle u_k,Ru_k\rangle+\langle v_k,Pv_k\rangle)dt)\to\min_{u_k,v_k},$$

$$\dot{x}_k(t)=Ax_k(t)+Bu_k(t),\ \ x_k(0)=0,\ \dot{y}_k(t)=Cy_k(t)+Dv_k(t),\ \ y_k(T)=0.$$

$$m=j\ (j=\overline{1,N-1})\ \text{или}\ m=N\ (j\ge N)$$

Из условия оптимальности управления [1] получаем $u_k(t)=R^{-1}(t)B^{*}(t)\psi_k(t)$, $v_k(t)=P^{-1}(t)D^{*}(t)\varphi_k(t)$, где $\psi_k(t)$, $\varphi_k(t)$ − решения задач

$$\frac{d\psi_k(t)}{dt}=-A^{*}(t)\psi_k(t),\quad t\ne t_j,$$

$$\psi_k(t_j-0)-\psi_k(t_j+0)=-(x_{k-1}(t_j)-y_{k-1}(t_j)),\quad \psi_k(T)=-x_k(T),$$

$$\frac{d\varphi_k(t)}{dt} = -C^*(t)\varphi_k(t), \quad t \neq t_j,$$

$$\varphi_k(t_j - 0) - \varphi_k(t_j + 0) = x_{k-j}(t_j) - y_{k-j}(t_j)), \quad \varphi_k(0) = y_k(0).$$

Структура коэффициентов в разложении (5) такова, что коэффициенты с нечетными номерами $2m-1$ становятся известными после решения подзадач P_i $(i = \overline{0, m-1}, \quad m \geq 1)$, из которых находятся i-тые члены асимптотик; коэффициенты с четными номерами, после преобразований и отбрасывания членов, известных после решения подзадач P_i, совпадает с критерием качества $\tilde{J}_m(u_m, v_m)$ в подзадаче P_m.

Получены оценки близости приближенного решения к точному решению задачи.

Для иллюстрации прямой схемы рассмотрим задачу, заключающуюся в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u,v) = \frac{1}{2}((x(0) - y(0))^2 + \varepsilon \sum_{j=1}^{2}(x(j) - y(j))^2 + (x(3) - y(3))^2 + \int_0^3 (u^2 + v^2)dt)$$

на траекториях систем

$$x' = 2.5x + 3u, \ \ x(0) = 1; \ \ y' = y + 4v, \ \ y(3) = 2.$$

Следуя описанной программе действий, найдены точное решение задачи, нулевое и первое приближения решения задачи.

На рисунках 1, 2 приведены графики оптимальных траекторий – $x(t)$, $y(t)$ соответственно, их нулевые и первые приближения. На рисунках 3, 4 приведены графики оптимальных управлений – $u(t)$, $v(t)$ соответственно, их нулевые и первые приближения.

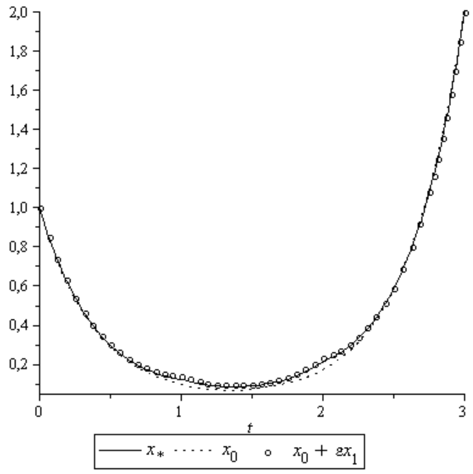


Рис. 1. График траектории $x(t)$

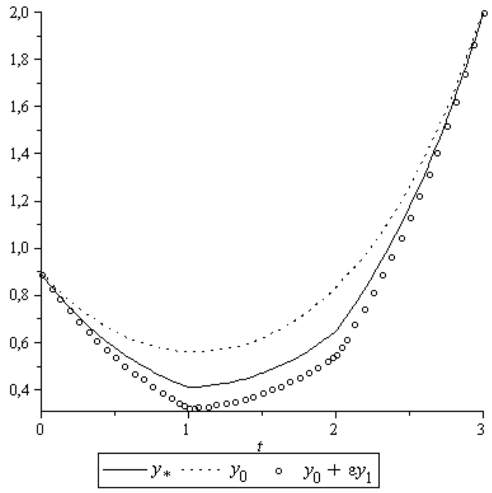


Рис. 2. График траектории $y(t)$

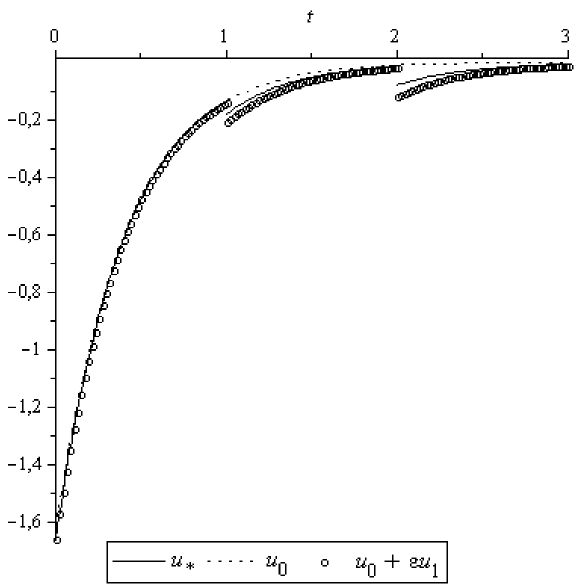


Рис. 3. График управления $u(t)$

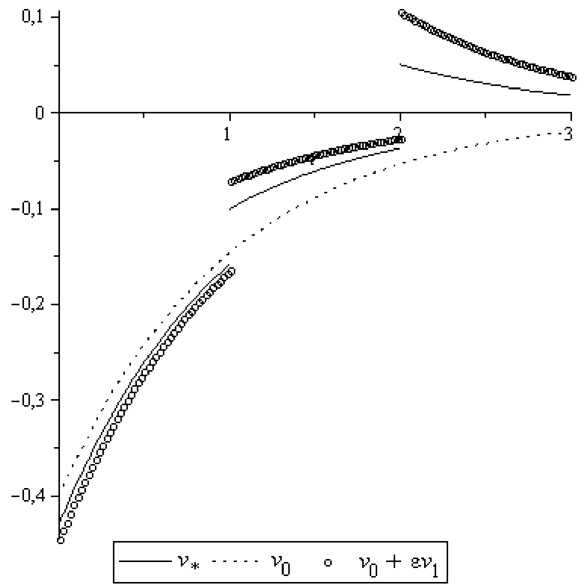


Рис. 4. График управления $v(t)$

Значения функционала приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения функционала при $\varepsilon = 0.05$.

$J_\varepsilon(u_0, v_0)$	$J_\varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1, v_0 + \varepsilon v_1)$	$J_\varepsilon(u_*, v_*)$
0.3385573882	0.3345563840	0.3328343718

Аннотация. *В работе применен метод прямой схемы для построения асимптотики решения задачи о сближении с различными весовыми коэффициентами, получены оценки близости, приведен иллюстрирующий пример.*

Литература

[1] - Смирнова, Е. В. Асимптотика решения возмущенной задачи о сближении / Е. В. Смирнова // Современные проблемы анализа динамических систем. Теория и практика: материалы международной открытой конференции 21-23 мая 2019 года / М-во науки и высшего образования РФ, ФГБОУ ВО «ВГЛТУ». – Воронеж, 2019. - С. 458 -461

[2] - Дмитриев, М. Г. Сингулярные возмущения в задачах управления / М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина// Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 3–51.

УДК 371.321.3

Бабак О. М. (студ., 2 курс),
Сусліченко К. С. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – доц.І. Г. Яловега
Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди (Харків, Україна)

РОЗРОБКА НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО КОМПЛЕКСУ «ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ»

На сьогоднішній час модернізація освіти є неперервним процесом, без якого неможливо уявити ефективного розвитку країни. Реформування навчального процесу згідно запитам сучасного світу стає обов'язковою умовою підготовки школярів до майбутнього професійного життя. Математична компетентність є однією з десяти ключових, зазначених у концепції «Нової української школи», формування яких потрібно для успішної самореалізації в суспільстві. Відповідно цьому оновлення навчально-методичних матеріалів з математики є важливим етапом модернізації шкільної освіти.

Формування ймовірнісно-статистичного мислення в учнів є вкрай важливою задачею шкільної освіти. Соціально-економічні зміни вимагають від людини навиків і вмінь щодо ймовірнісних оцінювань, статистичних досліджень, здатності до висовування та перевірки гіпотез. Комбінаторні знання стали необхідними для всіх. З обранням об'єктів та їх розподілом в той чи іншій послідовності стикаються в різних областях людської діяльності – будь-то розподіл сільськогосподарських культур при засіванні полів, кодування програмних продуктів, дослідження ланцюжків ДНК тощо. Вивчення ймовірнісно-статистичної змістовної лінії в закладах загальної середньої освіти починається з елементів комбінаторики, і саме цей розділ часто залишає багато питань в учнів (Бабак, 2019).

Не зважаючи на те, що елементи комбінаторики були включені в програму шкільної математики ще на початку XX ст., через те, що освітні реформи протягом 100 років постійно зачіпали саме цей розділ – його то включали, то виключали, строга методична система вивчення елементів комбінаторики, нажаль, і досі не розроблена. У сучасних підручниках є певний набір задач, але наявною проблемою є те, що кількість комбінаторних задач обмежена, і використовуються завдання тільки деяких типів, які часто неструктуровані. Це стає причиною складності, навіть, розуміння формулювання умов задачі учнями, не говорячи вже про визначення методів її розв'язання. Також слід зазначити, що часто задачі є, так би мовити, «застарілими», нецікавими для учнів, і це є значним недоліком при вивченні комбінаторики. Визначення структури навчально-методичного комплексу навчання школярів елементам комбінаторики, аналіз можливого доповнення традиційного матеріалу стало проблемою дослідження роботи (Бабак, 2019; Сусліченко, Єременко, 2019).

Програмою з математики для 5-11 класів закладів загальної середньої освіти елементи комбінаторики передбачено вивчати упродовж 8 годин в 11 класі. Метою вивчення теми «Елементи комбінаторики» є ввести поняття множини та її елементів, ознайомити учнів з видами множини й операціями над ними; навчити виконувати зазначені операції; ввести означення впорядкованої множини, перестановки, розміщення та комбінації; довести формули для обчислення кількості кожного виду сполук; навчити розрізняти види сполук і розв’язувати комбінаторні задачі (Сусліченко, Єременко, 2019).

На основі проведеного логіко-математичного аналізу було визначено основні складові навчально-методичного комплексу «Елементи комбінаторики». Окрім обов’язкових складових, які відповідають навчальній програмі загальноосвітньої школи з алгебри на тему «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики», було запропоновано додаткові навчальні елементи. Для наочності було розроблено граф структури матеріалу навчально-методичного комплексу «Елементи комбінаторики» з відповідними етапами його розробки (Бабак, 2019; Бабак, Бікір, 2019; Сусліченко, Єременко, 2019; Сусліченко, 2019;). (рис. 1).

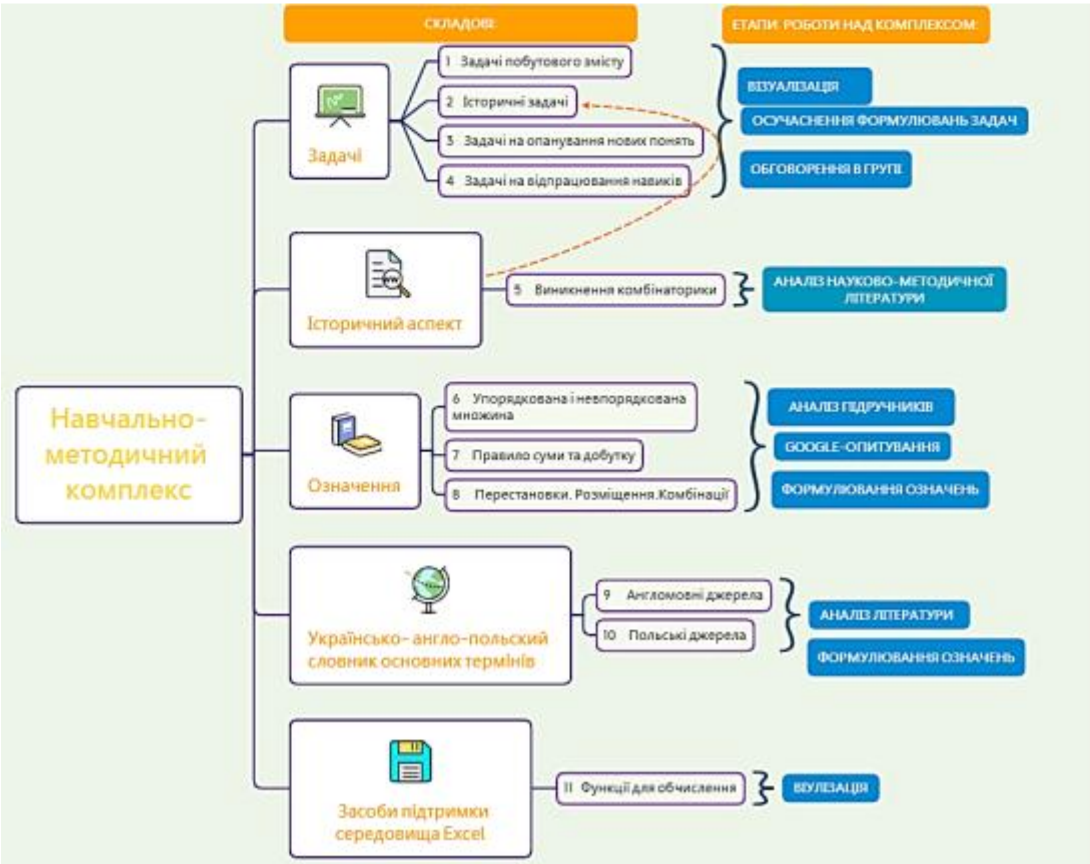


Рис. 1. Граф структури матеріалу навчально-методичного комплексу «Елементи комбінаторики»

Пропонується доповнити звичний навчальний матеріал динамічними візуалізаціями задач, уточненнями формулювань означень, словниками основних термінів англійською та польською мовами, засобами підтримки в середовищі Excel. Запропоновані додаткові навчальні елементи комплексу мають полегшити опанування школярами теми «Елементи комбінаторики» та зробити процес навчання відповідним запитам сучасного світу.

Анотація. *У статті представлено розробку графа структури матеріалу навчально-методичного комплексу «Елементи комбінаторики» з додатковими навчальними елементами.*

Ключові слова: *навчально-методичний комплекс, граф структури матеріалу, елементи комбінаторики.*

Література

[1] - Бабак О. М. Використання динамічної презентації при візуалізації комбінаторних задач. *Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі :* тези доп. наук.-практ. конф. молодих учених, м. Харків, 15-16 травня 2019 р. Харків, 2019. С. 168-171.

[2] - Бабак О. М., Бікір Г. О. Означення комбінаторних понять в шкільному курсі математики. *Наумовські читання :* матеріали сімнадцятої наук. конф. студ. та молодих учених, м. Харків, 4-15 листопада 2019 р. Харків, 2019. С. 40-42.

[3] - Сусліченко К. С. Цінність комбінаторних знань для повсякденного життя. *Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі :* тези доп. наук.-практ. конф. молодих учених, м. Харків, 15-16 травня 2019 р. Харків, 2019. С. 258-260.

[4] - Сусліченко К. С., Єременко А. С. Візуалізація комбінаторних задач в шкільному курсі математики. *Наумовські читання:* матеріали сімнадцятої наук. конф. студ. та молодих учених, м. Харків, 14-15 листопада 2019 р. Харків, 2019. С. 59-62.

Безрідна О. В. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – доц. Вишневецький О. Л.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

М-ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХ КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ

Розглянемо періодичні послідовності з «0» та «1», що мають період n. Число n часто називають довжиною такої послідовності. З символами «0» та «1» можна виконувати дії множення, як із цілими числами, та додавання за правилами 0+1=1+0=1, 1+1=0 (дії за модулем два).

Будемо розглядати многочлени від змінної х з коефіцієнтами «0» та «1». З ними можна звичайним чином виконувати дії додавання (віднімання співпадає з додаванням), множення та ділення. Степінь таких многочленів визначається звичайним чином.

Якщо остача від ділення многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ дорівнює нулю, то будемо казати, що $g(x)$ ділить $f(x)$, або що $g(x)$ є дільником (для) $f(x)$. Незважаючи на зовнішню схожість наведених означень з такими ж для «звичайних» (тобто з дійсними чи комплексними коефіцієнтами) многочленів, їх теорії суттєво різні. Наприклад, тут

$$(x+1)^2 = x^2 + 1 \tag{6}$$

на відміну від випадку многочленів з дійсними коефіцієнтами.

Кожний многочлен $f(x)$ ділиться на себе та на 1. Якщо інших множників у $f(x)$ немає, він називається *незвідним* (у протилежному випадку він називається звідним). Згідно (6), многочлен x^2+1 є звідним і має корінь 1.

Нехай $f(x)$ - незвідний многочлен, степінь якого дорівнює k (позначення: Ст($f(x)$) = k) і $n = 2^k - 1$.

Теорема 1 [1]. Якщо α – корінь $f(x)$, то 1) $\alpha^n = 1$, 2) якщо e – найменше натуральне число таке, що $\alpha^e = 1$, то n ділиться на e.

Наслідок. Многочлен $x^n + 1$ ділиться на $f(x)$.

Доведення. $\alpha^n = (\alpha^e)^{\frac{n}{e}} = (1)^{\frac{n}{e}} = 1$, тому $\alpha^n = 1$, а тому $\alpha^n + 1 = 0$, тобто α – корінь многочлена $x^n + 1$. Значить, будь-який корінь $f(x)$ є коренем і для $x^n + 1$, тому $x^n + 1$ ділиться на $f(x)$.

Означення. Незвідний многочлен $f(x)$ називається примітивним [1], якщо умова $\alpha^m \neq 1$ виконується для будь-якого кореня α цього многочлена при $0 < m < n = 2^k - 1$.

Неважко перевірити, що многочлени x^2+x+1 та x^3+x+1 є примітивними.

За наслідком частка $g(x)=\dfrac{x^n+1}{f(x)}$ є многочленом. Співставимо йому n–елементний вектор g (або, іншими словами, послідовність довжини n) його коефіцієнтів, окрім старшого, включаючи нульові коефіцієнти. Надалі кожну таку послідовність з n символів (нулів та одиниць) будемо називати словом довжини n.

Наприклад, якщо $f(x)=x^3+x+1$, то $k=3$, $n=2^k-1=7$ і $g(x)=\dfrac{x^7+1}{x^3+x+1}=x^4+x^2+x+1$, то послідовність (слово) $g=0010111$.

Означення. *М-послідовністю* називається слово g та усі слова, одержані з g шляхом його циклічних зсувів.

При кожному такому зсуві усі символи слова зсуваються (наприклад) вліво, а перший символ переходить на останнє місце.

Наприклад, для $g=0010111$ циклічними зсувами будуть 7 слів: 0101110, 1011100, 0111001 і так далі.

Ясно, що число таких циклічних зсувів дорівнює $n=2^k-1$, а $n+1$-й зсув співпадає з вихідним словом g.

Укажемо спосіб одержання М-послідовностей.

Нехай α – корінь примітивного многочлена

$$f(x)=x^k+b_{k-1}x^{k-1}+...+b_1x+b_0$$

тоді найменше натуральне число d таке, що $\alpha^d=1$, дорівнює $n=2^k-1$.

Розглянемо двійкову (тобто з елементами «0» та «1») послідовність $y(m)$ $(m=0,1,2...)$, у якої перші k членів $y(0),y(1),...,y(k-1)$ задані, а інші члени задовольняють рівність

$$y(k+m)+b_{k-1}y(k+m-1)+...+b_1y(m+1)+b_0y(m)=0 \qquad (7)$$

Це лінійне різницеве однорідне рівняння k-го порядку, причому $f(x)$ є його характеристичним рівнянням. При вивченні лінійних різницевих рівнянь було доведено, що розв'язок рівняння (7) має вид $y(m)=\sum_{i=1}^{k} d_i\alpha_i^{\,m}$, де $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ – різні корені многочлена $f(x)$, d_i – довільні сталі.

Теорема. Послідовність $y(m)$ має період $n=2^k-1$.

Доведення. Оскільки $\alpha_i^{\,n}=1$ для кожного i, де $n=2^k-1$, то

$$y(m+n)=\sum_{i=1}^{k} d_i\alpha_i^{\,m+n}=\sum_{i=1}^{k} d_i\alpha_i^{\,m}\cdot\alpha^n{}_i=\sum_{i=1}^{k} d_i\alpha_i^{\,m}=y(m).$$

Записуючи (7) у вигляді

$$y(k+m)=b_{k-1}y(k+m-1)+\ldots+b_1y(m+1)+b_0y(m) \qquad (8)$$

(нагадаємо, що тут переніс доданку у іншу частину рівності не змінює його знак), одержуємо зручний спосіб побудови М-послідовності. А саме, з (8) при $m=0$ маємо $y(k)=b_{k-1}y(k-1)+\ldots+b_1y(1)+b_0y(0)$, тобто по заданих $y(0),y(1),\ldots,y(k-1)$ знаходимо $y(k)$. Потім з (8) при $m=1$ маємо

$$y(k+1)=b_{k-1}y(k)+\ldots+b_1y(2)+b_0y(1),$$

тому по $y(1),\ldots,y(k-1),y(k)$ знаходимо $y(k+1)$. Потім з (8) при $m=2$ знаходимо $y(k+2)$ і так далі.

Цей спосіб побудови М-послідовності просто реалізувати технічно. Нескладний пристрій, що це робить, називається регістром зсуву із зворотним зв'язком. Він складається з елементів затримки (їх іще називають комірками пам'яті), суматорів та з'єднань. Якщо в початковий момент $k=0$ у комірках пам'яті знаходяться $y(0),y(1),\ldots,y(k-1)$, то на виході буде $y(k)$, в наступний момент $k=1$ на виході буде $y(k+1)$, і т.д. Чим менше відмінних від 0 коефіцієнтів характеристичного многочлена, тим простіша схема регістра зсуву.

Перейдемо до означення періодичної кореляційної функції. Нехай a – слово довжини n з «0» та «1», a_i – його n- кратний зсув (наприклад, вправо), s_i – число символів слів a та a_i, які збігаються (однакові), t_i – число символів слів a та a_i, які різні. Число t_i іще називають відстанню Хемінга слів a та a_i. Очевидно, $s_i + t_i = n$. Зрозуміло, що послідовність a_i є періодичною з періодом n. Тому це ж вірно для послідовностей s_i та t_i.

Приклад. Для слова $a = 10110$ довжини $n = 5$ маємо $a_1 = 01101$, $s_1 = 1$, $t_1 = 4$ (одне співпадіння одиниць на третьому місці, інші чотири символи слів a та a_1 різні).

Означення. Періодичною кореляційною функцією слова a називається функція

$$K_a(i) = \frac{s_i - t_i}{n}$$

Аргументом цієї функції є ціле число i.

Неважко перевірити такі властивості кореляційної функції:

1) $K_a(i) = K_a(i+n)$, тобто $K_a(i)$ є періодичною функцією від i з періодом n. Це випливає з того, що $a_{i+n} = a_i$ для будь-якого цілого числа i.

2) $K_a(0) = 1$, оскільки $a = a_0$.

3) $\frac{-1}{n} \le K_a(i) \le \frac{1}{n}$. Це випливає з того, що $0 \le s_i \le n$ та $0 \le t_i \le n$

Можна довести [1], що для М-послідовності

$$K_a(i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i \text{ ділиться на } n \\ -\dfrac{1}{n}, & \text{якщо } i \text{ не ділиться на } n \end{cases}.$$

Тому різниця значень кореляційної функції М-послідовності при i, що діляться на n, та усіх інших значень i, є максимально можливою.

Розглянемо застосування кореляційної функції до радіолокації. Як відомо, радіолокаційна станція (РЛС) випромінює короткий сигнал (зондуючий), і відстань до цілі знаходиться по проміжку часу від моменту випромінювання до моменту приходу відлуння сигналу, відбитого від цілі (відлуння). Потім РЛС випромінює наступний короткий сигнал. Потужність відлуння у мільярди разів менша потужності зондуючого сигналу, тому відлуння можна «переплутати» з випадковими сигналами (перешкодами). Оскільки потужність зондуючого сигналу з технічних причин обмежена, доводиться випромінювати не один сигнал, а послідовність сигналів з великим періодом n. Саме за допомогою кореляційної функції і обирають той «відрізок» довжини n, який найімовірніше є сигналом для одержаного відлуння. Справа в тім, що різниця кореляційної функції самої М-послідовності та її зсуву є максимально можливою.

Література

[1] - Мак-Вильямс Ф., Слоэн Н. Теория кодов, исправляющих ошибки / Ф. Мак-Вильямс, Р. Слоэн. – М.: Связь, 1979. – 576 с.

Биценко Д. П. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – доц. Ємельянова Т. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(м. Харків, Україна)

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ З ТЕМИ «ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ. ЗАКОНИ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ»

В силу об’єктивних причин математична підготовка сучасних абітурієнтів, які вступають до технічних університетів, виявляється досить слабкою, але класичні математичні дисципліни, як базові математичні дисципліни, вимагають певного рівня сформованості шкільної математичної компетентності. Одним із напрямів подолання труднощів формування та розвитку математичних компетентностей студентів перших курсів є інтеграція математичних знань та компетентностей майбутніх професій. Основу такого підходу становить використання в навчальному процесі, як на лекціях, так і на практичних заняттях, професійно-орієнтованих математичних задач.

Прикладом можливостей математичної підготовки у формування та розвитку математико-прикладної компетентності може бути використання професійно орієнтованих задач у розділі «Випадкові процеси» курсу «Теорії ймовірностей та випадкові процеси». Важко переоцінити ступінь складності математичного апарату, що дозволяє вирішувати багато технічних проблем.

Дисципліна «Теорія ймовірностей і випадкові процеси» вивчається майбутніми фахівцями, які навчаються за спеціальністю Автоматизація і приладобудування. Розділ" випадкові процеси " цієї дисципліни дає широкий простір для введення в курс актуальних завдань професійної галузі, які враховують технічні можливості та наукові досягнення в цій галузі. Завдання професійної спрямованості наповнюються теоретичною інформацією, яку вони можуть застосувати в подальшому.

У статті наведено деякі приклади професійно-прикладних завдань за розділом «Закони та характеристики випадкових процесів» з банку професійно-орієнтованих завдань до теми «Випадкові величини», який був підібрано студентами.

Приклад 1. Вібрації дорожнього полотна, джерелами яких є важкий автотранспорт, поширюючись по ґрунту, впливають на фундаменти прилеглих будівель та можуть призвести до серйозних пошкоджень. Відбуваються випадкові зміщення (вібрації) фундаменту вздовж ординати профілю фундаменту у вигляді гармонійних коливань $X(t)=A\cos\omega t, t\in[0,\frac{\pi}{2})$, де частота ω – невипадкова величина, амплітуда A - випадкова величина, яка розподілено за нормальним законом $N(0,\sigma^2)$. Знайти: 1) щільність ймовірностей процесу $X(t)$; 2) одновимірну функцію розподілу процесу $X(t)$; 3) $P\{X(t_0=0{,}2)\in[0{,}1;0{,}3]\}$ - ймовірність того, що в момент t=0,2 *сек* зсув фундаменту буде у границях [0,1; 0,3]*см*, якщо ω=4 *сек*$^{-1}$, $\sigma=4\cdot10^{-1}см^2$.

Розв'язання. В момент часу $t=t_0$ випадковій функції $X(t)$ відповідає випадкова величина $X(t_0) = A\cos\omega t_0$, яка розподілено за нормальним законом з параметрами $M[X(t_0)]$ і $D[X(t_0)]$,

$$M[X(t_0)]=M[A\cos\omega t_0]=M[A]\cos\omega t_0=0\cos\omega t_0=0,$$

$$D[X(t_0)]=D[A\cos\omega t_0]=D[A]\cos^2\omega t_0=\sigma^2\cos^2\omega t_0=\left(\sigma\cos\omega t_0\right)^2,$$

де $\sigma(t_0)=\sigma\left|\cos\omega t_0\right|, t_0 \in [0,\frac{\pi}{2})$.

Закон розподілу випадкової величини $X(t_0)$

$$f_1(x_0;t_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(x_0)}}e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2(x_0)}},$$

де $x(t_0)=x_0$ –значення випадкової величини $X(t_0)$ в момент t_0.

Одновимірна щільність ймовірностей випадкового процесу $X(t)$

$$f_1(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(x)}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(x)}}$$

Ймовірність того, що в момент $t=0,2$ *сек* зсув фундаменту буде у границях $[0,1; 0,3]$*см*, якщо $\omega=4$ *сек*$^{-1}$, $\sigma = 4\cdot 10^{-1} см^2$,

$$P\{X(t_0 = 0,2) \in [0,1;0,3]\} = \Phi\left(\frac{0,3}{0,4\cos(4\cdot 0,2)}\right)-\Phi\left(\frac{0,1}{0,4\cos(4\cdot 0,2)}\right)\approx$$
$$\approx \Phi(1,87)-\Phi(0,62) \approx 0,4693-0,4475=0,0218$$

Приклад 2. Перепади температури у вигляді **в**ипадкових збуджень призводять до випадкових коливань $X(t)$ напруги у вимірювальному пристрої. Нехай $X(t)=V(\sin t+2)$ має вигляд, де V – випадкова величина, яка розподілено: а) за рівномірним законом на [0; 1], б) за показниковим законом з $\lambda=2$, в) за нормальним законом $N(2;1)$. Знайти:

- математичне сподівання процесу;

- дисперсію процесу;

- одномірну щільність випадкового процесу;

- який закон розподілу дає найбільшу ймовірність знаходження напруги X(1) у границях [0; 1].

Розв'язання.

а) Математичне сподівання випадкової величини V, розподіленої на відрізку [0; 1], дорівнює

$$M[V]=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Математичне сподівання випадкового процесу $X(t)=V(\sin t+2)$

$$M[X(t)]=M[V(\sin t+2)]=M[V](\sin t+2)=\frac{1}{2}(\sin t+2)$$

Дисперсія випадкової величини V, розподіленої за рівномірним законом на відрізку [0; 1],

$$D[V]=\frac{(1-0)^2}{12}=\frac{1}{12}.$$

Дисперсія випадкового процесу

$$D[X(t)]=D[V(\sin t+2)]=D[V](\sin t+2)^2=\frac{1}{12}(\sin t+2)^2.$$

В момент $t=t_0$ випадкова функція $X(t)$ перетворюється в випадкову величину $X(t_0)=V\cdot(\sin t_0+2)$. Оскільки випадкова величина V рівномірно розподілено на відрізку [0; 1], то і величина $X(t_0)$ теж рівномірно розподілено на відрізку $[0;\ 1\cdot(\sin t_0+2)]$.

Закон розподілу величини $X(t_0)$

$$f_1(x_0;t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin t_0+2}, x_0\in[0;\sin t_0+2],\\ 0, x_0\notin(0;\sin t_0+2).\end{cases}$$

Закон розподілу $f(x_0;t_0)$ визначає одновимірну (миттєву) щільність ймовірності випадкового процесу

$$f_1(x;t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin t+2}, x\in[0;\sin t+2],\\ 0, x\notin(0;\sin t+2).\end{cases}$$

В момент $t_0 = 1$ випадкова величина $X(t_0)=X(1)$ розподілено за законом

$$f_1(x;1)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin 1+2}, x\in[0;\sin 1+2],\\ 0, x\notin[0;\sin 1+2].\end{cases}$$

$$P\{X(1)\in[0;1]\}=\int_0^1 f(x;1)dx=\int_0^1\frac{1}{\sin 1+2}dx=\frac{1}{\sin 1+2}\approx 0{,}352\,.$$

б) Математичне сподівання випадкової величини V, розподіленої за показниковим законом з параметром $\lambda=2$, $M[V]=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2}$, визначає математичне сподівання функції $X(t)$

$$M[X(t)]=M[V(\sin t+2)]=M[V](\sin t+2)=\frac{1}{2}(\sin t+2)=\frac{1}{\lambda(t)},$$

$$\lambda(t)=\frac{2}{\sin t+2}.$$

Дисперсія випадкової величини V і випадкової функції $X(t)$

$$D[V]=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{4},$$

$$D[X(t)]=\frac{1}{\lambda^2(t)}=\frac{(\sin t+2)^2}{4}$$

В момент $t=t_0$ випадкова функція X(t) задає випадкову величину $X(t_0)=V\cdot(\sin t_0+2)$, розподілену за показниковим законом з $\lambda(t_0)=2/(\sin t_0+2)$.

Закон розподілу величини $X(t_0)$

$$f_1(x_0;t_0)=\begin{cases}\lambda(t_0)e^{-\lambda(t_0)x_0}, x_0\in[0;+\infty],\\ 0, x_0\notin(-\infty;0).\end{cases}$$

Закон розподілу $f_1(x;t)$ визначає одномірну (миттєву) щільність ймовірності випадкового процесу

$$f_1(x;t)=\begin{cases}\lambda(t)e^{-\lambda(t)x}, x\in[0;+\infty],\\ 0, x\notin(-\infty;0).\end{cases}$$

4. В момент $t_0 = 1$ випадкова величина $X(t_0)=X(1)$ розподілено за показниковим законом з $\lambda(1)=\dfrac{2}{\sin 1+2}$

$$f_1(x;t=1)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sin 1+2}e^{-\frac{2}{\sin 1+2}x}, x\in[0;+\infty],\\ 0, x\in(-\infty;0).\end{cases}$$

$$P\{X(1)\in[0;1]\}=$$

$$P\{X(1)\in[0;1]\}=\int_0^1 f(x;1)dx=\int_0^1\frac{2}{\sin 1+2}e^{-\frac{2}{\sin 1+2}x}dx=\left|\frac{2}{\sin 1+2}\approx 0{,}704\right|\approx$$

$$\approx 0{,}704\frac{1}{-0{,}704}e^{-0{,}704x}\Big|_0^1\approx e^0-e^{-0{,}704}\approx 0{,}502$$

в)

Випадкова величина V розподілено за нормальним законом $N(2;1^2)$ з $M[V]=2$, $D[V]=1$.

Математичне сподівання

$$M[X(t)]=M[V(\sin t+2)]=M[V](\sin t+2)=2(\sin t+2).$$

Дисперсія

$$D[X(t)]=D[V(\sin t+2)]=D[V](\sin t+2)^2=1(\sin t+2)^2=(\sin t+2)^2.$$

В момент $t=t_0$ випадкова функція X(t) задає випадкову величину $X(t_0)=V\cdot(\sin t_0+2)$, яка розподілено за нормальним законом $N[2(\sin t_0+2); (\sin t_0+2)^2]$.

$$f(x_0,t_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sin t_0+2)}e^{-\frac{[x_0-2(\sin t_0+2)]^2}{2(\sin t_0+2)^2}}.$$

Закон розподілу $f(x_0;t_0)$ визначає одномірну (миттєву) щільність ймовірності випадкового процесу

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sin t+2)}e^{-\frac{[x-2(\sin t+2)]^2}{2(\sin t+2)^2}}.$$

В момент $t_0 = 1$ випадкова величина $X(t_0)=X(1)$ розподілено за нормальним законом N(5,68; 8,07)

$$f(x,t_0=1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}2{,}84}e^{-\frac{(x-5{,}68)^2}{2\cdot 8{,}07}}.$$

$$P\{X(1)\in[0;1]\}=\Phi(\frac{1-5{,}68}{2{,}84})-\Phi(\frac{0-5{,}68}{2{,}84})\cong\Phi(-1{,}65)-\Phi(-2)\cong$$
$$\cong 0{,}4772-0{,}4505\approx 0{,}0267.$$

Порівняння отриманих значень ймовірності знаходження випадкових збуджень напруги X(t) у границі [0; 1] з різними законами розподілу показує, що ймовірність збудження напруги у цих границях при нормальному законі розподілу є найменша, а при показниковому розподілу – найбільша.

Література

[1] - Крупин В. Г. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы. Сборник задач с решениями: учебное пособие / В. Г. Крупин, А. Л. Павлов, Л. Г. Попов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2013. – 368 с.

[2] - Тактаров Н. Г. Теория вероятностей и математическая статистика: Краткий курс с примерами и решениями / Н. Т. Тактаров. – М.: Комкнига, 2010. – 240 с.

[3] – Ємельянова Т. В. Випадкові процеси: навчально-методичний посібник / Т. В. Ємельянова, О. Д. Пташний. – Харків: ХНАДУ, 2019. – 64 с.

УДК 629.113

Боярин А.С. (магістрант, 5 курс)
Наукові керівники – проф. Боровик Л.В., доц. Рудик О.Ю.
Національна академія Державної прикордонної служби України
Хмельницький національний університет
(Хмельницький, Україна)

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАМІНИ МАТЕРІАЛІВ ДЕТАЛЕЙ АВТОМОБІЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

Сьогодні однією з розповсюджених моделей чисельного аналізу конструкцій є дискретна модель методу скінчених елементів (МСЕ). Цей варіаційний метод, добре пристосований для реалізації на електронних обчислювальних машинах (ЕОМ), має універсальність, що дозволяє розв’язувати чисельно найрізноманітніші задачі [1].

Метод добре обґрунтований теоретично, накопичено великий досвід алгоритмізації. Його розглядають як загальний метод розв’язку диференціальних рівнянь, застосування якого до задач розрахунку конструкцій задовольняє багатьом вимогам, які ставляться до алгоритму в автоматизованих системах проектування.

У фізичному сенсі в основу методу покладена ідея дискретизації, у математичному – пошук розв’язку крайової задачі шляхом мінімізації відповідного функціонала.

У МСЕ дискретизація полягає у віртуальній заміні суцільного середовища системою елементів скінчених розмірів. Ідея ця висловлювалуся ще Пуассоном на початку XVIII століття, але не реалізувалася у зв’язку з громіздкістю ручного розрахунку, проте виявилася дуже зручною при розрахунку на ЕОМ.

У випадку моделей конструкцій поставимо у відповідність дійсній системі дискретну модель, яка складається зі скінченного числа елементів. Вони зв’язані між собою у скінченному числі точок (вузлах). Елементи, отримані після членування розглянутої області, залишаються неперервними, суцільними, але форма деформації окремого елемента приймається досить простою. У вузлах прикладені узагальнені сили або переміщення, які підлягають визначенню і називаються у МСЕ ступенями свободи.

Для кожного типового скінченного елементу нескладно отримати класичними методами чисельного аналізу розв'язок задачі про напружено-деформований стан. А з розв'язків для окремих елементів складається розв'язок для всієї конструкції в цілому. Така інтерпретація дозволяє описати задану конструкцію системою спільних алгебраїчних рівнянь, добре пристосованої для розв'язку на ЕОМ.

Об'єктом даного дослідження є можливість заміни матеріалу вала муфти зчеплення трактора ДТ-75М, матеріалом якої є сталь 30ХН3А ГОСТ 4543-71, на нелеговану (тому дешевшу) сталь 20 ГОСТ 535-88.

У SolidWorks [2] була створена твердотільна модель вала, статичний розрахунок якої здійснили у SolidWorks Simulation [1]: вибрано матеріал вала – спочатку сталь 30ХН3А [3], а потім сталь 20; проведено розділення моделі вала на скінченні елементи; побудовано матрицю жорсткості; здійснено синтез скінченно-елементної моделі з урахуванням умов закріплення вала у вузлових точках; розв'язано одержану систему алгебраїчних рівнянь; визначено компоненти напружено-деформованого стану (рис. 1, табл. 1).

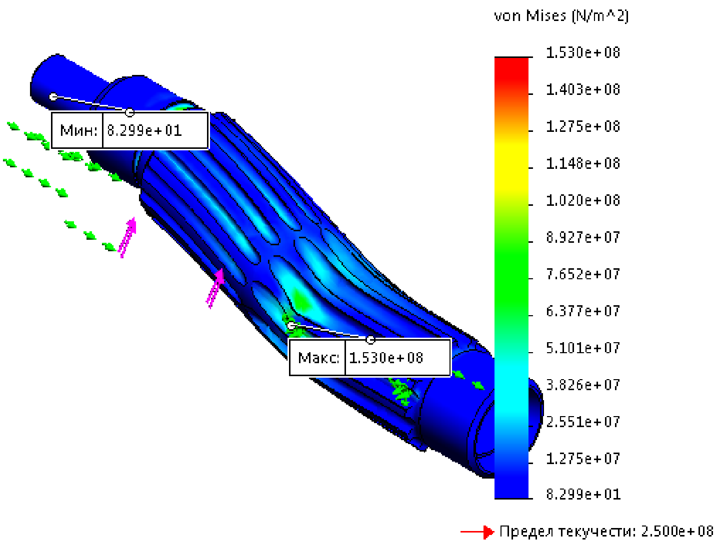


Рис. 1. Епюра розподілу сумарних напружень вала von Mises

Таблиця 1

Результати дослідження вала муфти зчеплення

Сталь	Напруження (максимальне), σ, МПа	Переміщення (максимальне), h, мм	Деформація (максимальна), δ, мм	Запас міцності (мінімальний), k
30ХН3А	154.482	0.0440724	0.000490123	5.08151
20	153,000	0,04627	0,0005146	1,634

Так як мінімальний коефіцієнт запасу міцності для вала зі сталі 20 становить k = 1,634, то у випадку заміни сталі 30ХН3А на сталь 20 для його виготовлення запас міцності достатній, так як допустимий коефіцієнт запасу міцності [k] = 1,5. Але, враховуючи умови роботи цієї деталі, для підвищення її зносостійкості рекомендується хіміко-термічна обробка.

Таким чином, отримані результати підтверджують актуальність проведеного дослідження з використання методу скінченних елементів.

***Анотація**. За допомогою SolidWorks досліджена можливість заміни матеріалу валу муфти зчеплення трактора.*

***Ключові слова**: SolidWorks, зчеплення, муфта, вал, заміна матеріалу.*

Література

[1] – Rudyk O. Yu. The impact of the SolidWorks Simulation network quality on the accuracy of the calculations / O. Yu. Rudyk, V. A. Gonchar // Eurasian scientific congress. Abstracts of the 1st International scientific and practical conference. Barca Academy Publishing. Barcelona, Spain. 2020. – Pp. 185-188. URL: http://sci-conf.com.ua/i-mezhdunarodnaya-nauchno-prakticheskaya-konferencziya-eurasian-scientific-congress-27-28-yanvarya-2020-goda-barselona-ispaniya-arhiv/

[2] – Рудик О. Ю. SolidWorks – CAD/CAE-система технічних вузів / О. Ю. Рудик, П. В. Каплун // Science, society, education: topical issues and development prospects. Abstracts of the 2nd International scientific and practical conference. SPC "Sci-conf.com.ua". – Kharkiv, Ukraine, 2020. – Pp. 249-253. URL: http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/8631

[3] – Рудик О. Ю. Розрахунок вала муфти зчеплення трактора ДТ-75М у SolidWorks Simulation [Електронний ресурс] / О. Ю. Рудик, Є. В. Франківський. – Режим доступу: http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/8358

UDK 37.091.322

Volovnyk M.O. (student 2 year)
Scientific adviser - associate prof. Zhelezniakova E.U.
Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics
(Kharkiv, Ukraine)

REMOTE STUDYING AS AN ELEMENT OF MODERN STUDENTS EDUCATION

Global processes that occur in the modern world are a catalyst for the transformation of traditional education systems. The activities of most educational institutions are carried out in accordance with the development and use of information technology in the dissemination of knowledge. This is one of the main tasks of improving the quality of education in the 21st century. As a result, there is a unity of the educational space and the world market of educational services.

For several decades now, European countries have taken consistent steps towards rapprochement. The first meeting of European ministers in charge of higher education in Bologna in 1999. During this meeting, joint declarations were adopted, which defined the main tasks and principles of creating zones of higher European education [1]. Now in the Bologna process adopted 48 countries. The economic, political and social changes that are taking place in Ukraine predetermine the need to accelerate the reform of the education system. Providing access to educated and vocational training for all who have the necessary abilities and adequate training. Introducing the latest pedagogical technologies and scientific and methodological achievements into the educational process, creating a new educational information support system, and entering the international computer information system.

In this regard, there is a need to search for information, constantly master new knowledge. To implement these requirements, new approaches to the organization of educational activities and the creation of the necessary conditions are needed. And this is important, the learning process is transparent and allows the student to get all the information about vocational training. Availability of educational markets of any countries.

Many domestic and foreign scientists are engaged in the problematic development of modern education. At the moment, researchers are asking questions to increase the effectiveness of training using information technology (V. Bykov, R. Gurevich, M. Kademia, D. Openshaw, M. Zhaldak, Yu. Zhuk). Conceptual pedagogical provisions regarding distance learning Andreev, V. Oleinik, P. Stefanenko, A. Khutorskoy. Pedagogical approaches to the computerization of the educational process in the works of B. Gershunsky, E. Mashbits, I. Pidlasia. The practical aspect of the frozen information and communication technologies and information technologies in the field of culture and business. He widely puts forward scientific problems in the regional psychological, pedagogical, social and philosophical aspects of the international process (A.O. Verbitsky, B.S. Gershunsky, O. I. Potunsky, A.V. Khutorsky) technological (A.M. Antsimov, V. N. Kuharenko, N. V. Morse, E. S. Polat, S. O. Sisoyva, N. V. Tikhomirova), integration essays and distance formal formations (A. V. Andreev, A. M. Goldin, V. N. Kukharenko, E. D. Patarakin, S. S. Polat, A. V. Khutorsky), body for self-improvement of robotics, student, higher education institutions in the conditions of application of information and communication technologies (N. I. Boyko, N.V. Mikhaylov, M. A. Umrik).

Domestic and foreign experience in distance learning, reveals the essence and features of this system, based on the use of specific educational technologies, modern teaching methods, technical means and methods of transmitting information, information and telecommunication technologies, allows us to comprehend them at the level of theoretical concept. The basis for creating any concept is the definition of its basic concepts.

Today, distance learning is quite common and widespread in many European Union countries. Distance learning is actively developing as a form of learning. At the present stage, it can be implemented by means of Internet technologies that provide interactivity, and is seen as the interaction of the teacher and students at a distance, reflecting all components of the educational process. The basic principles of distance learning - is the establishment of interactive communication between the student and the teacher without providing their immediate and independent development of a certain array of knowledge and skills in the chosen course of using certain information technologies [2]. The introduction of distance learning allows students, regardless of location and employment, to receive theoretical information, timely and qualitative advice, perform practical tasks individually or in collaboration, to fully take into account the personal and physiological characteristics of the individual. The most widely used today is the e-learning system LMS Moodle. The Moodle system has become widespread in the world. According to information on the World Wide Web, Moodle is a modular object-oriented dynamic learning environment, also known in the world as the Open Source Course Management System (CMS), Learning Management System (LMS), or Virtual Learning Environment (VLE) [3].

The Moodle toolkit is full of interactive elements. To personally evaluate the holistic picture of students' educational activity in the Moodle system it is possible to store their valuable data - the results of completed course tasks, course evaluations.

Many higher education institutions in Kharkiv are working on the implementation of elements of the distance learning system, based on the Moodle system.

So, since October 2007, a site www.ikt.ksue.edu.ua was created at the Semen Kuznets Kharkiv National Economic University for organizing students' education, control and testing. The site has all the courses, according to their title and semester of study, which greatly simplifies the search. Each teacher independently creates and corrects materials of a course which he teaches. He has been granted the rights to: create various Moodle resources and course elements; limitation of time for students to access educational information; making adjustments to student records; grading and reviewing the work performed; organizing a forum and online consultations. Each teacher has the opportunity to publish on their site their own methodical developments and manuals, as well as to provide information on the site in the form of files and links with direct access to the Internet, which greatly activates the learning process. The site works in both open and closed modes of access. The ability to communicate directly with students through the system provided provides a systematic monitoring of the learning process, based on an analysis of students' activity throughout the term of study.

It should be noted that distance education opens students access to non-traditional sources of information, increases the efficiency of independent work, gives completely new opportunities for creativity, finding and consolidation of different professional skills, and allows teachers to implement fundamentally new forms and teaching methods using conceptual modeling of phenomena and processes. The development of distance learning in the Ukrainian education system will continue and improve with the development of Internet technologies and improvement of methods of distance learning.

Abstract. *The article highlights the main problems of implementation and the advantages of using distance education in the educational process. The development trends of higher education in modern conditions are considered. The current state of distance education in Ukraine and World experience are analyzed. The prospects of the introduction of distance education in universities of Ukraine are investigated. The main priorities for the development of modern education in Ukraine and its promising areas are identified.*

Key words: *distance learning, distance education, globalization, principles of training, promising areas, advantages.*

LITERATURE

[1] - Болонський процес: тенденції, проблеми, перспективи (2004) // Укл. В. П. Бех, Ю. Л. Маліновський: за ред. академіка В.П. Андрущенка. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – 221 с.

[2] - Бисага Ю. М. (2011). Роль і місце дистанційного навчання серед іннова-ційних моделей організації навчального процесу / Ю. М. Бисага, О. Пічкар // Х. : Нац. юрид. акад. - 2011. – С. 83–85.

[3] - Кузняк, Н. Б., Гаген, Е. Ю. (2017). Современное дистанционное обучение. Преимущества и недостатки. Молодой ученый, 11, С.466-469.

УДК 004.942:[373

Денисенко К. (студ., 4 курс)
Науковий керівник – доц. Гриб'юк О. О.
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова
(Київ, Україна)

ОСВІТНЯ РОБОТОТЕХНІКА ЯК УНІВЕРСАЛЬНИЙ ІНСТРУМЕНТ ДЛЯ РОЗВИТКУ І ВИХОВАННЯ МАЙБУТНЬОГО ІНЖЕНЕРА

Одним з інструментів підготовки фахівців майбутнього, здатних креативно мислити та створювати інновації, є STEM-освіта, яку в розвинутих країнах світу підтримують на найвищому державному рівні. Освіта в галузі STEM є основою для підготовки фахівців у галузі високих технологій.

STEM-освіта (від англ. – Science, Technology, Engineering, Mathematics – наука, технологія, інженерія (технічна творчість), математика) – це напрям в освіті, в умовах використання якого в навчальних програмах посилюється природничо-науковий компонент із застосуванням інноваційних технологій. Ключову педагогічну проблему під час розроблення STEM орієнтованих навчальних програм містить технологія інтеграції компонентів, що, з одного боку, є близькими дисциплінами, а з іншого – самостійними усталеними онтологіями: наука (Science) як спосіб пізнання, який допомагає зрозуміти навколишній світ; технології (Technology) як спосіб покращення світу, що має чутливість до соціальних змін; інженерія (Engineering) як спосіб створення та покращення пристроїв для вирішення реальних проблем; математика (Mathematics) як спосіб опису світу «аналіз світу і реальних проблем за допомогою числа» [1].

Відбувається поєднання наукового методу, технології, проектування й математики в основі розроблення освітньої STEM-програми. Важливо, що результатом інтеграції може бути впровадження окремого навчального предмету STEM/Science або ж певні зміни у навчальному плані кожного зі STEM-предметів на основі впровадження інновацій, посилення практичної компоненти у вирішенні реальних проблем.

STEM-освіта базується на використанні засобів та обладнання, пов’язаних з технічним моделюванням, енергетикою, електротехнікою, інформатикою, інформаційно-комунікаційними технологіями (ІКТ), науковими дослідженнями в галузі енергозберігаючих технологій, автоматикою, робототехнікою, інтелектуальними системами, радіотехнікою, радіоелектронікою, авіацією, космонавтикою, аерокосмічними технологіями тощо [2].

До основних складових STEM-освіти (навчання природничих наук, математики, технологій) важливо також залучати і сучасні галузі, що нині швидко розвиваються. Одним з таких напрямів є робототехніка. Адже робототехніка – це універсальний інструмент для освіти, який підходить для будь-якого віку – від учнів початкових класів до студентів університетів і науковців. Важливою постає проблема підготовки фахівців у галузі робототехніки, а особливо, підготовки майбутніх учителів робототехніки [3].

Робототе́хніка – прикладна наука щодо проектування, розробки, будівництва, експлуатації та використанням роботів, а також комп’ютерних систем для їх контролю, сенсорного (на основі вихідних сигналів) зворотного зв’язку та опрацювання даних автоматизованих технічних систем (роботів).

Робототехніка орієнтована на створення роботів і робототехнічних систем, призначених для автоматизації складних технологічних процесів і операцій, у тому числі таких, що виконуються в недетермінованих умовах, для заміни людини під час виконання важких, утомливих і небезпечних робіт [4]. На теперішній час робототехніка є однією з галузей науки і техніки в світі, що інтенсивно розвивається. У зв’язку з цим виникає нагальна потреба в підготовці відповідних фахівців у цій галузі. В Україні питанням розвитку робототехніки в рамках освітнього процесу приділяється недостатньої уваги. Її навчання відбувається епізодично: у процесі навчання інформатики, ІКТ технологій, в позашкільній освіті, але на цей час системний підхід відсутній. Це пов’язано з тим, що за державним стандартом освіти на сьогодні не існує окремої освітньої галузі «Робототехніка» [2]. Саме тому цей напрям є одним з найпопулярніших у закладах позашкільної освіти, як державних, так і комерційних.

Освітня робототехніка (educational robotics) – міжпредметний напрям навчання учнів, у процесі якого інтегруються знання зі STEM-предметів (фізики, технологій, математики), кібернетики, мехатроніки та інформатики. Навчання освітньої робототехніки відповідає ідеям випереджального навчання (навчання технологій, які будуть потрібні в майбутньому) і дозволяє залучити учнів різного віку до процесу інноваційної та наукового-технічної творчості [3].

Враховуючи результати досліджень [3], [4] та власний досвід, зазначимо основну мету та завдання впровадження освітньої робототехніки у навчальний процес закладів освіти, а саме:

– формування та розвиток в учнів інтересу до природничих і точних наук, науковотехнічної творчості, що відповідає ідеям STEM-освіти;

– формувгсання в учнів навичок роботи з технічними пристроями та умінь практичного вирішення актуальних інженерно-технічних проблем;

– формування якостей особистості, яка здатна самостійно ставити цілі, проектувати шляхи їх реалізації, контролювати й оцінювати свої досягнення;

– формування в учнів умінь працювати з різними джерелами інформації, оцінювати їх і на цій основі формулювати власну думку, судження, оцінку, ініціювати та створювати власні розробки;

– реалізація метапредметних зв’язків між інформатикою, математикою, фізикою та технологіями;

– формування в учнів наукового світогляду як невід’ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві;

– формування та розвиток в учнів стійкої мотивації до навчання;

– інтелектуальний розвиток особистості, зокрема розвиток в учнів логічного, алгоритмічного та креативного мислення при розв’язування прикладних задач, інформаційної культури, пам’яті, уваги, наукової інтуїції.

Освітня робототехніка є ефективним інструментом для навчання через проектну діяльність, в якій STEM, програмування, технічна творчість інтегруються в один проект. Навчання робототехніки надає учням та студентам можливості за допомогою моделювання та конструювання досліджувати, як технології працюють в реальному житті [2].

В Україні розвиток освітньої робототехніки в рамках освітнього процесу відбувається епізодично на предметному рівні, у навчанні інформатики та ІКТ, в позашкільній освіті, але на цей час відсутній системний підхід. Тому впровадження робототехніки в освітній процес середніх і вищих навчальних закладів як одного з напрямків STEM-освіти, розробка відповідних навчальних програм для учнів, майбутніх учителів і для системи підвищення кваліфікації вчителів має важливе значення [6].

Метою програми вивчення робототехніки [3] є засвоєння учнями цілісної системи теоретичних знань із робототехніки та супутніх їй галузей знань як науки про методи та засоби автоматизації технічних систем, а також пізнання ними основних принципів наукової роботи та стимулювання самостійної практичної наукової діяльності.

Основні завдання полягають у формуванні в учнів таких компетентностей:

- *пізнавальної*: засвоєння початкових технічних і технологічних знань, елементарних уявлень і понять, ознайомлення зі світом техніки, найпростішими технологічними процесами, елементарною електротехнікою, технічним моделюванням, конструюванням і дизайном;

- *практичної*: формування графічної грамотності, вмінь і навичок роботи з різноманітними матеріалами та інструментами, виготовлення моделей машин і механізмів та їх вузлів, вміння застосовувати отримані знання на практиці;

- *творчої*: набуття досвіду власної творчої діяльності; розвиток конструкторських здібностей, просторового й логічного мислення, уяви, 4 фантазії, здатності проявляти творчу ініціативу, вирішувати творчі завдання; формування стійкого інтересу до технічної творчості, потреби у творчій самореалізації та духовному самовдосконаленні;

- *соціальної*: виховання поваги до праці та людей праці, дбайливого ставлення до навколишнього середовища, культури праці, формування позитивних якостей емоційно-вольової сфери (самостійність, наполегливість, працелюбство та ін.), доброзичливості й товариськості, уміння працювати в колективі [5].

Анотація. *STEM-освіта є одним з інструментів підготовки фахівців майбутнього, здатних креативно мислити та створювати інновації. У статті розглядається освітня робототехніка як основний інструмент для розвитку та виховання майбутнього інженера.*

Ключові слова: *STEAM-освіта, дослідницьке навчання, варіативні моделі, освітня робототехніка.*

Література

[1] - Гриб'юк О. О. Комп'ютерне моделювання та робототехніка в навчально-виховному процесі сучасного навчального закладу. / Гриб'юк О. О. // Сьома міжнародна науково-практична конференція FOSS Lviv-2017: Збірник наукових праць, 27-30 квітня 2017 року, м. Львів.: 38-43. ISBN 978-966-2598-86-5.

[2] - Hrybiuk O. Improvement of the Educational Process by the Creation of Centers for Intellectual Development and Scientific and Technical Creativity. In: Hamrol A., Kujawińska A., Barraza M. (eds) Advances in Manufacturing II. MANUFACTURING 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2019.: 370-382. Springer, Cham Online.

[3] - Гриб'юк О. О. Дослідницьке навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з використанням комп'ютерно орієнтованих методичних систем / О. О. Гриб'юк. Монографія. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019. – 858 с.: іл.

[4] - Гриб'юк О. О. Перспективи впровадження варіативних моделей комп'ютерно орієнтованого середовища навчання предметів природничо-математичного циклу у загальноосвітніх навчальних закладах України / Гриб'юк О. О. // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна / [редкол.: П.С. Атаманчук (голова, наук. ред.) та ін.] – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. – Випуск 22: Дидактичні механізми дієвого формування компетентнісних якостей майбутніх фахівців фізико-технологічних спеціальностей. – С. 184-190.

[5] - Hrybiuk O. Mathematical modeling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry // Proceedings of the First

International conference on Eurasian scientific development. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH. Vienna. 2014. P. 46-53.
[6] - Hrybiuk O. Problems of expert evaluation in terms of the use of variative models of a computer-oriented learning environment of mathematical and natural science disciplines in schools, [w:] Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Seria: Organizacja i Zarządzanie, Zeszyt Nr 79, Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej (WPP), 2019.: 101-119. ISSN 0239-9415.

УДК 37+004.5+004.9

Викладач Дущенко О. С.
Ізмаїльський державний гуманітарний університет
(Ізмаїл, Україна)

ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНОЛОГІЙ ВІРТУАЛЬНОЇ РЕАЛЬНОСТІ МАЙБУТНІМИ ВЧИТЕЛЯМИ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Технології віртуальної реальності активно застосовуються в комп'ютерних іграх, кінематографі, медицині, транспорті тощо, відповідно й в сфері освіти ці технології не можуть не знайти своє застосування. Так, використання технологій віртуальної реальності розширює традиційний освітній процес, роблячи можливим неможливе, зокрема проведення різноманітних експериментів, які в звичайних умовах можуть бути небезпечними.

Питання використання технологій віртуальної реальності в різних аспектах професійної діяльності досліджується багатьма вченими, зокрема такими вченими, як: Н. Р. Балик, Ф. П. Власенко, Н. М. Задерей, Н. М. Краус, О. С. Криворучко, І. Ю. Мельник, Г. Д. Нефьодова, В.Ф. Несвіт, Л. О. Рідченко, Л. О. Храменок та ін. Учені підкреслюють, що використання технологій віртуальної реальності при вивченні математичних дисциплін розвиває просторове уявлення навчаючих, тому метою статті є опис можливостей існуючих технологій віртуальної реальності при вивченні дисциплін математичного циклу майбутніми вчителями.

Вивчення побудови графіків функцій та геометричних фігур зазвичай зводиться до побудови на дошці та демонстрації макетів геометричних фігур.

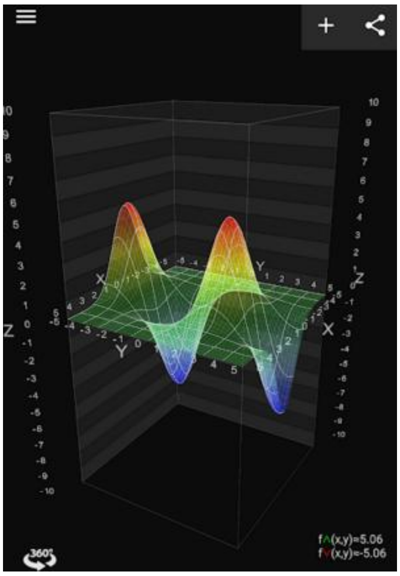
Такий підхід не дає можливість сприйняти всі аспекти нового навчального матеріалу. У таких ситуаціях на допомогу приходять технології віртуальної реальності. Завдяки технологіям віртуальної реальності стає можливим миттєве графічне представлення функцій, їх обертання навколо вісей, внесення змін у функцію та миттєве змінення графіку функції, створення об'єктів та їх обертання, обчислення об'єктів, перегляд об'єктів наче з всередині.

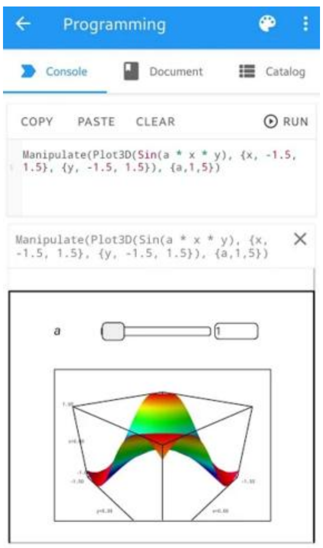
Пропонуємо розглянути добірку додатків з віртуальною реальністю, які можна застосовувати при вивченні математичних дисциплін:

1. Visual Math 4D Lite – графічний калькулятор, який забезпечує розв'язування різних рівнянь (сферичних, параметричних, полярних, декартових, неявних), їх побудову в 2D та 3D, виконання операцій із комплексним числами, векторами, матрицями, тригонометричними, гіперболічними, логарифмічними функціями, інтегралами тощо (рис. 1) [7].

2. Calculator N+ – Math Solver – CAS calculator – додаток для розв'язування задач з алгебри, аналітики, тригонометрії, статистики тощо (рис. 2) [2].

3. 3D Графіка GeoGebra – додаток, який забезпечує побудову графіків, створення фігур, поверхонь, 3D об'єктів тощо (рис. 3) [1].





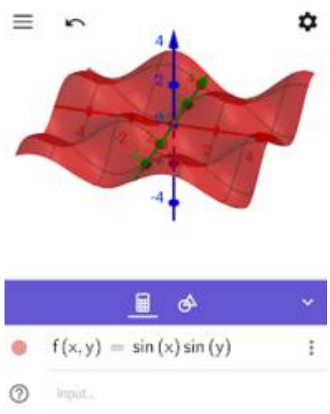
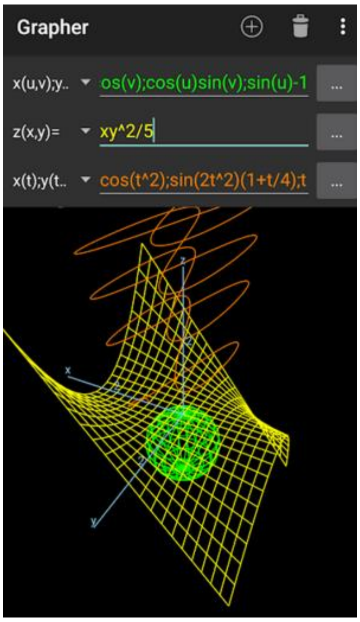


Рис. 1. Visual Math 4D Lite   Рис. 2. Calculator N+   Рис. 3. 3D Графіка GeoGebra

4. Grapher – Equation Plotter & Solver – додаток створення графіків функцій, розв'язування рівнянь, обчислення виразів тощо (рис. 4) [4].

5. Math VR – додаток побудови об'ємних фігур та об'єктів (рис. 5) [5].



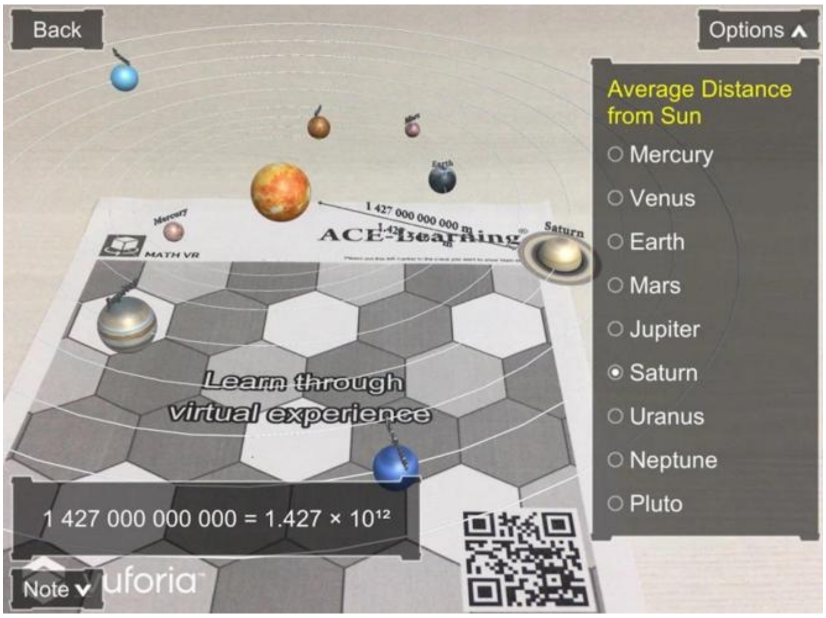
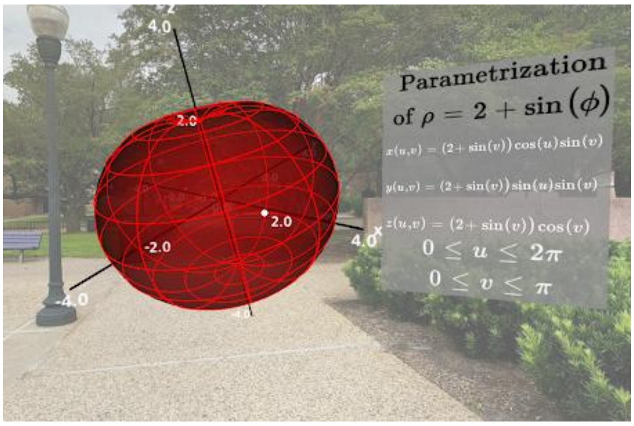


Рис. 4. Grapher

Рис. 5. Math VR

6. Calculus in Virtual Reality – додаток візуалізації обчислень у віртуальній реальності, використовуючи Google Cardboard (рис. 6) [3].

7. Shapes 3D Geometry Learning – додаток створення тривимірних фігур (рис. 7) [6].



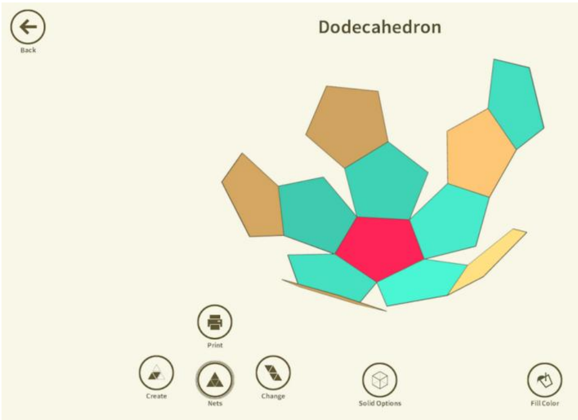


Рис. 6. Calculus in VR

Рис. 7. Shapes 3D Geometry Learning

Отже, запропоновані додатки віртуальної реальності забезпечують керування об'єктами як у реальності, виконання математичних обчислень, побудову графіків функцій, геометричних фігур, розв'язування рівнянь тощо.

Ці додатки можна використовувати при вивченні навчальних дисциплін «Математичний аналіз», «Вища математика», «Алгебра та теорія чисел», «Комп'ютерна алгебра та геометрія» тощо.

Перспективи подальших розробок убачаємо в продовженні вивчення сучасних технологій віртуальної реальності та розробці методичних рекомендацій до їх використання в освітньому процесі.

Анотація. *У статті описано можливості технологій віртуальної реальності; запропоновано перелік додатків віртуальної реальності, які доцільно використовувати при вивченні дисциплін математичного циклу майбутніми вчителями.*

Ключові слова. *«Технології віртуальної реальності», «додатки віртуальної реальності», «дисципліни математичного циклу», «підготовка майбутніх учителів».*

Література

[1] - 3D Графіка GeoGebra [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android.g3d.

[2] - Calculator N+ - Math Solver – CAS calculator [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.duy.calculator.free.

[3] - Calculus in Virtual Reality [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.sfasu.cardboard.calculus.

[4] - Grapher – Equation Plotter & Solver [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://play.google.com/store/apps/details?id=be.grapher.

[5] - Math VR [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.acelearning.mathvr.

[6] - Shapes 3D Geometry Learning [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://play.google.com/store/apps/details?id=pl.setapp.shapes.

[7] - Visual Math 4D Lite [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.RonnyCSHARP.VisualMATH4DLite.

УДК 378

Ст. вил. Дяденчук А. Ф. ,
асистент Халанчук Л. В.
Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного (Мелітополь,Україна)

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ПРИ ПІДГОТОВЦІ СТУДЕНТІВ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Відповідно до вимог стандартів вищої освіти України з метою формування цілісної професійної підготовки інженерів у ЗВО ставиться задача формування певних компетентностей, серед яких особливе місце займає здатність розв’язувати спеціалізовані задачі та вирішувати практичні проблеми й задачі під час професійної діяльності із залученням методів математики та фізики. Важлива роль при формуванні у студентів навичок побудови математичних моделей найпростіших фізичних явищ і процесів належить питанням, що розглядаються при вивченні тем диференціального числення, що мають надзвичайно широке прикладне значення в найрізноманітніших галузях науки і практичної діяльності людини.

Метою представленого дослідження є розробка методичного підходу розв’язання фізичних задач студентами технічних вузів із основами диференціального числення шляхом моделювання в програмі MathCad.

Розглянемо прикладну спрямованість в диференціальному численні шляхом розв’язання кількох задач із загального курсу фізики, а саме з розділів «Молекулярна фізика та термодинаміка» та «Електрика і магнетизм».

Задача 1. В електронагрівну плитку з температурою $T_{сер}$=1000°С помістили заготовку з температурою T_0=200°С. Через дві години температура заготовки підвищилась до T_1=500°С. Знайти залежність температури від часу, побудувати її графік. Знайти температуру заготовки через 6 годин, якщо відомо, що швидкість зміни температури заготовки пропорційна різниці температури середовища і температури заготовки [1].

Розв’язання. Позначаємо через $T(t)$ – температуру заготовки, тоді швидкість зміни температури заготовки від часу дорівнює похідній $\frac{dT}{dt}$.

Маємо диференціальне рівняння тіла, що нагрівається:

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T_{cep} - T\right)$$

або

$$\frac{dT}{dt} = k(1000 - T)$$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв’язавши це рівняння, враховуючи умову задачі Коші, знаходимо залежність температури від часу:

$$T(t) = 1000 - 800\left(\sqrt{0{,}625}\right)^t$$

Використовуючи пакет програм MathCad, отримуємо графік залежності температури від часу (рис. 1) та знаходимо значення температури в момент часу 6 год:

$$T(6) = 804{,}688°C.$$

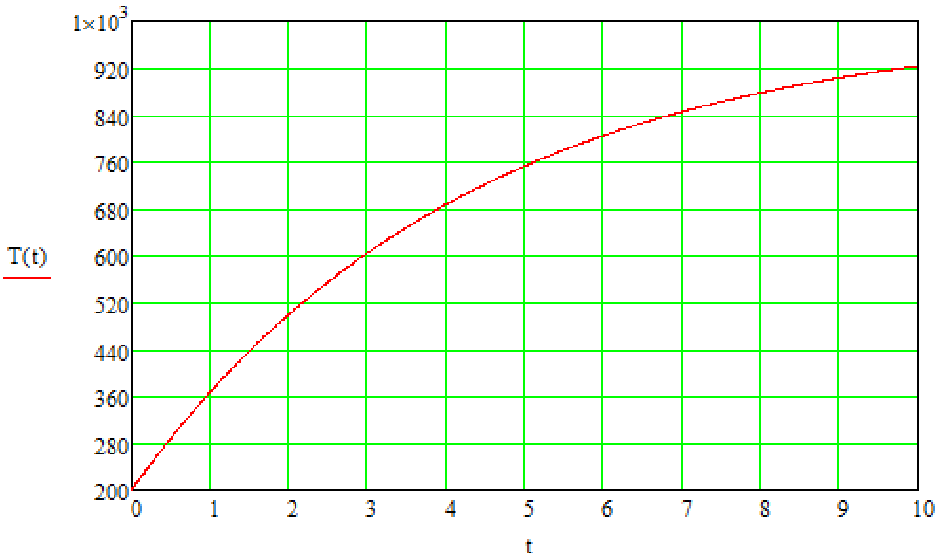


Рис. 1. Графік залежності температури від часу

Задача 2. Електродвигун ввімкнено в коло з напругою $E = 300\ В$, загальний опір $R = 150\ Ом$. Коефіцієнт самоіндукції $L = 30\ Гн$. Знайти залежність сили струму від часу, побудувати графік, знайти силу струму через 0,5 с після замикання кола [1].

Розв'язання. Використовуємо диференціальне рівняння для визначення сили струму в колі для будь-якого моменту часу t:

$$IR + L\frac{dI}{dt} = E.$$

$$30I' + 150I = 300$$

або

$$I' + 5I = 10.$$

Отримали лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Враховуючи умову, що при $t = 0$ сила струму дорівнює нулю отримаємо розв'язок:

$$I(t) = 2 - 2e^{-5t}$$

Використовуючи пакет програм MathCad, отримуємо графік залежності сили струму від часу (рис. 2) та знаходимо значення сили струму в момент часу 0,5 с:

$$I(0{,}5) = 1{,}836\ A.$$

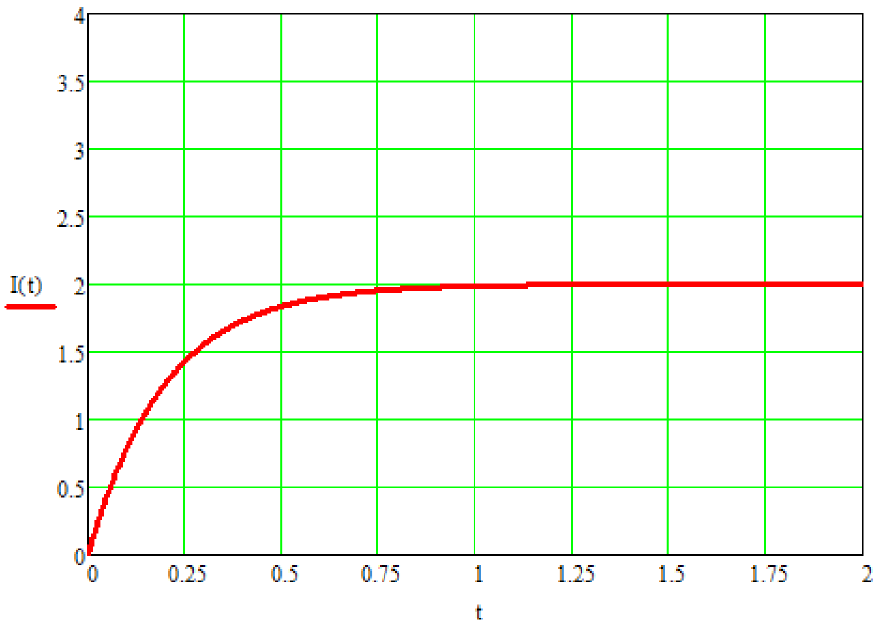


Рис. 2. Графік залежності сили струму від часу

Наведена вище методика може застосовуватися при дослідженні більш складних об'єктів або одночасно, або в деякій комбінації.

У результаті запропонованого підходу студенти не лише вчаться розв'язувати фізичні задачі, а й легше сприймають сенс диференціалу і можливості його застосування для вирішення розрахункових завдань та побудови найпростіших математичних моделей фізичних процесів.

Анотація. *У роботі представлено основи методичного підходу розв'язання фізичних задач студентами технічних вузів із основами диференціального числення шляхом моделювання в програмі MathCad. Запропонований підхід дозволить спростити розв'язання розрахункових завдань та побудови найпростіших математичних моделей фізичних процесів.*

Ключові слова: *диференціальне числення, математична модель, фізичні процеси.*

Література

[1] - Прикладные задачи математического анализа: методические указания к самостоятельной работе для студентов технических и экономических специальностей всех форм обучения / сост.: О. Г. Ровенская, Н. В. Белых. – Краматорск: ДГМА, 2011. – 152 с.

Єль Маімуні Омар (студ., 2 курс),
Абделлатиф Ламдаіні (студ.,2 курс)
Науковий керівник – ст. викл. Мороз І. І.
Харквський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

РОЗРОБКА МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКУ ДИНАМІКИ ОБ'ЄМНОГО ГІДРОПРИВОДА РУЛЬОВОГО КЕРУВАННЯ КОЛІСНОГО ТРАКТОРА

Широке застосування об'ємних гідроприводів (ОГП) для рульового керування та технологічного обладнання сучасних колісних тракторів потребує одночасно вирішувати питання підвищення довговічності окремих гідропристроїв, зокрема шестеренних насосів, які є найбільш «вузьким» джерелом відказів. Аналіз роботи ОГП на режимах динамічного навантаження рульового керування є досить актуальним, так як до теперішнього часу на тракторах ХТЗ не проводився. Результати проведеної роботи можуть бути корисними для фахівців Харькіського тракторного заводу. На основі даних статичного розрахунку ОГП рульового керування колісного трактора виконаний аналіз його динамічного навантаження та розроблені рекомендації по зниженню коливань тиску та підвищенню довговічності насосів.

В основі будування математичної моделі лежать статичний та динамічний розрахунків тиску та швидкості гідроциліндрів повороту трактора від часу дії керування та значень модуля пружності робочої рідини на основі закону Паскаля, рівняння нерозривності, законів механіки Ньютона та використанням пакету прикладних програм VisSim для розв’язання деференціальних нелінійних рівнянь при визначенні параметрів тиску та швидкості.

На рисунку 1 зображена розрахункова схема динаміки ОГП рульового керування трактора ХТЗ-17021 [1;2] з насосом-озатором НД на вході в гідроциліндри Ц1 і Ц2. На штока гідроциліндрів, сполучених з колесами трактора, діють сили опору. Сумарне зусилля двох гідроциліндрів складає $F_\Sigma = F_1 + F_2 = 55$кН ($F_1 = 40$ кН; $F_2 = 15$ кН). В гідроциліндрах діють сили тиску РР, напівсухого $F_{\text{тр}}$ і рідинного $F_{\text{ж.тр}}$ тертя.

Насос Н з приводом від коробки передач КП та ДВЗ нагнітає РР до клапана приоритету ПК за шляхом $p \to p(CF)$, який забезпечує приоритетно витрату насоса до насоса-дозатора НД рульового керування РК.

При цьому витрата РР поступає до гідроциліндрів Ц1 і Ц2, а при нейтральному стані колеса $(\gamma = 0)$ переключає автоматично витрату насоса Н до гідророзподільника Р технологічного обладнання трактора за лінією $p \to p(EF)$.

Для заднього навісного пристрою (скорочено ЗНУ чи ЗНП) використовується золотниковий гідророзподільник Р1-зну, а для наісних агрегатів трактора гідророзподільникі Р2…Р4 з швидкороз'ємними з'єднаннями БРС. На гідроциліндри ЗНУ діє сумарне зусилля F_{C}, а швидкість переміщення поршнів позначена V. До складу гідророзподільника Р входять також основний запобіжний клапан КП1 да допоміжний (пілотний) КП2.

Для кондіциювання РР ОГП використовуються гідробак Б, оливаохолоджувач АТ та зливний фільтр Ф.

За допомогою системи LS здійснюється енергозбереження в ОГП шляхом автоматичної мінимізації тиску в лінії нагнітання насосу Н. [13].

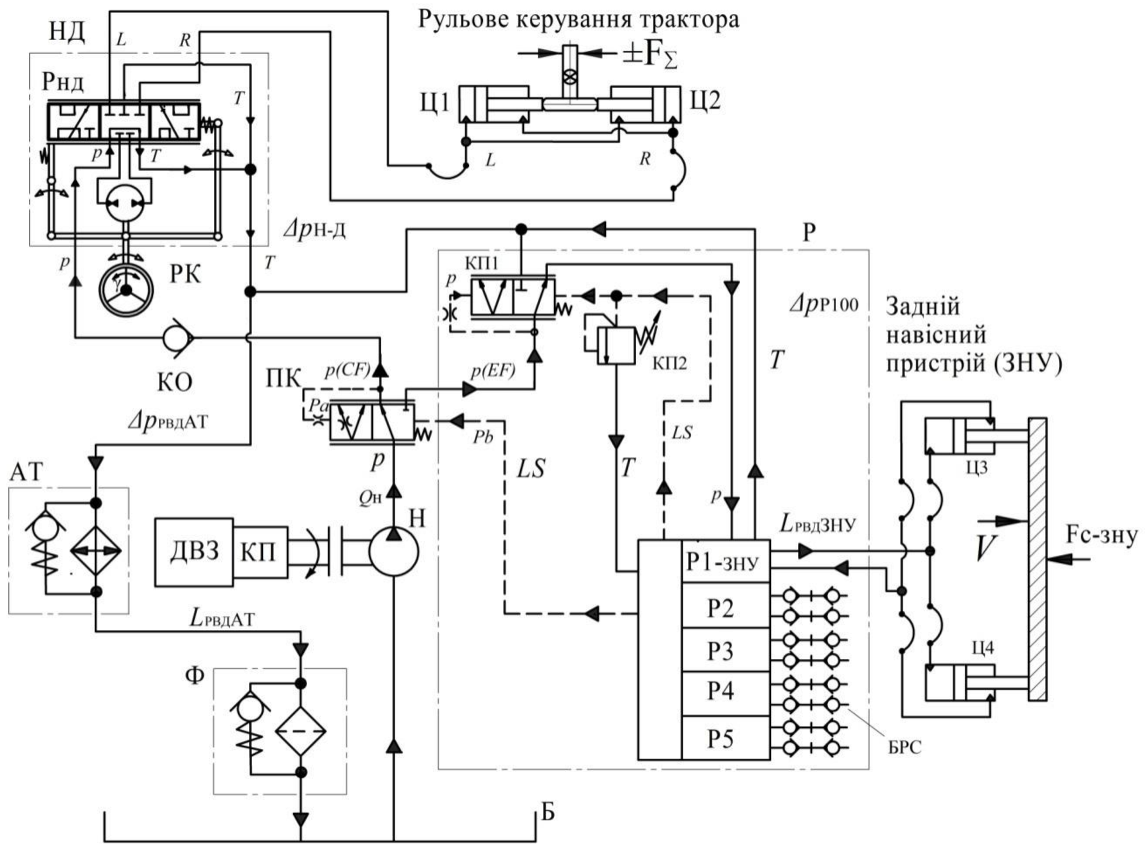


Рис. 1. Розрахункова схема динаміки ОГП рульового керування

При побудові математичної моделі ОГП рульового керування приймаємо наступні допущення [3;4]: щільність РР (ρ) приймаємо постійною; нехтуємо витоками крізь поршневі та штокові ущільнення в гідроциліндрах; не враховуємо хвилеві процеси в трубопроводах з причини їх невеликої довжини і великого діаметру; тиск на виході шестеренного насоса $p_н$ при включенні насоса-дозатора приймаємо постійним; сила опору $F_{\sum}$ є наростаючою.

Метою динамічного аналізу ОГП рульового керування є моделювання роботи гідросистеми в напірній магістралі в режимі повороту трактора і визначення тиску РР та частоти власних коливань ОГП.

Математична модель ОГП з урахуванням прийнятих допущень може бути представлена в наступному вигляді. Так сумарна витрата РР ($Q_{\sum}$) в поршневій порожнині гідроциліндра Ц1 та штоковій Ц2 (умовно розглядаємо поворот коліс вправо) на основі рівняння нерозривності має таку форму запису

$$\begin{aligned} Q_{\sum} &= Q_{1п} + Q_{2шт} = S_{1п} \cdot \nu + \frac{V_{01} + S_{1п} \cdot y}{E} \cdot \frac{dp}{dt} + S_{2шт} \cdot \nu + \\ &+ \frac{V_{02} + S_{2шт} \cdot y}{E} \cdot \frac{dp}{dt} = \nu(S_{1п} + S_{2шт}) + \frac{V_{01} + V_{02} + y(S_{1п} + S_{2шт})}{E} \cdot \frac{dp}{dt}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $Q_{1п}$ і $Q_{2шт}$ – витрати РР на вході в поршневу порожнину гідроциліндра Ц1 та штокову порожнину гідроциліндра Ц2;

$S_{1п} = \frac{\pi \cdot D_п^2}{4}$ і $S_{2шт} = \frac{\pi}{4}(D_п^2 - d^2)$ – площі поршня діаметром $D_п$ та штокової порожнини гідроциліндрів при діаметрі штоку d, відповідно;

ν – швидкість перемішення y штоків гідроциліндрів;

p – тиск в поршневій та штоковій порожнинах гідроциліндрів Ц1 і Ц2, відповідно (приймаємо однаковою згідно закону Паскаля для РР);

V_{01} і V_{02} – початкові об’єми в поршневій (для Ц1) та штоковій (для Ц2) порожнинах, відповідно (надалі приймаємо $V_{\sum} = V_{01} + V_{02}$);

E – модуль стислості РР.

Відносно похідної dp/dt одержимо після інтегрування значення тиску від часу в гідроциліндрах ОГП рульового керування

$$\frac{dp}{dt} = E\frac{Q_{\sum} - \nu\frac{\pi}{4}(2D_{\text{п}}^2 - d^2)}{V_{\sum} + y\frac{\pi}{4}(2D_{\text{п}}^2 - d^2)}, \quad p = \int_0^t E\frac{Q_{\sum} - \nu\frac{\pi}{4}(2D_{\text{п}}^2 - d^2)}{V_{\sum} + y\frac{\pi}{4}(2D_{\text{п}}^2 - d^2)}dt, \tag{2}$$

Рівняння руху штоків навантажених гідроциліндрів Ц1 і Ц2 має вигляд

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = \frac{1}{m}\left[\begin{matrix}(S_{1\text{п}} + S_{2\text{п}} - S_{2\text{шт}})p - F_1 - F_2 - F_{1\text{ж.тр}} - F_{2\text{ж.тр}} - \\ -F_{1\text{тр}} - F_{2\text{тр}}\end{matrix}\right], \tag{4}$$

де m – маса, що підлягає повороту;

$F_{1\text{ж.тр}}$ і $F_{2\text{ж.тр}}$ – рідинне тертя гідроциліндрів Ц1 і Ц2, відповідно;

$F_{1\text{тр}}$ і $F_{2\text{тр}}$ – напівсухе тертя поршнів та штоків гідроциліндрів Ц1 і Ц2, відповідно.

Зробимо допущення про постійність сил тертя в обох гідроциліндрах Ц1 і Ц2

$$F_{\text{ж.тр}} = F_{1\text{ж.тр}} + F_{2\text{ж.тр}}; \; F_{\text{тр}} = F_{1\text{тр}} + F_{1\text{тр}}, \tag{3}$$

та з урахуванням $S_{1\text{п}} = S_{2\text{п}}$ і $F_1 + F_2 = F_{\sum}$ – сумарне зовнішне зусилля двох гідроциліндрів отримаємо таку форму запису рівняння (4)

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = \frac{1}{m}\left[(2S_{1\text{п}} - S_{2\text{шт}})p - F_{\sum} - F_{\text{ж.тр}} - F_{\text{тр}}\right]. \tag{4}$$

Після двох послідовних інтегрувань маємо вирази для швидкості ν та переміщення y штоків гідроциліндрів при повороті трактора

$$\begin{aligned}\nu &= \int_0^t \frac{1}{m}\left[(2S_{1\text{п}} - S_{2\text{шт}})p - F_{\sum} - F_{\text{ж.тр}} - F_{\text{тр}}\right]dt = \\ &= \int_0^t \frac{1}{m}\left[\frac{\pi}{4}(2D_{\text{п}}^2 - d^2)p - F_{\sum} - F_{\text{ж.тр}} - F_{\text{тр}}\right]dt, \qquad y = \int_0^t \nu dt.\end{aligned} \tag{5}$$

Для проведення розрахунків приймаємо такі залежності для навантажень рідинного та напівсухого тертя

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}0} \cdot \operatorname{sign} v; \qquad F_{\text{ж.тр}} = \beta \cdot v, \tag{6}$$

де $F_{\text{тр}0}$ – модуль тертя;

β – коефіцієнт рідинного тертя.

Приймаємо лінійні закони змінювання сили $F_{\sum}$ та витрати $Q_{\sum}$ з обмеженнями

$$F_{\sum} = \begin{cases} k_1 \cdot t & \text{при} \quad 0 \le t \le t_0, \\ F_{\text{с}} & \text{при} \quad t \ge t_0, \end{cases} \quad Q_{\sum} = \begin{cases} k_2 \cdot t & \text{при} \quad 0 \le t \le t_0, \\ Q_{\sum} & \text{при} \quad t \ge t_0, \end{cases} \tag{7}$$

де $k_1 = F_{\sum} / t_0$ та $k_2 = Q_{\sum} / t_0$ – швидкість наростання $F_{\sum}$ і $Q_{\sum}$ на лінійній ділянці за час наростання навантаження t_0, відповідно

Динамічне моделювання ОГП рульового керування з двома гідроциліндрами ведемо при розгоні і виході на режим, що встановився. Для отримання цих характеристик скористаємося методом інтеграції Рунге-Кутта 4-го порядку з дискретністю $\Delta = 0,001$ с в діапазоні до $t_к = 0,025$ с.

При виконанні розрахунків викристаний ОГП з героторним насосом-дозатором рульового керування, сумарним тяговим зусиллям двох тандем-гідроциліндрів з перехресним з'єднанням порожнин в 90 кН, ходом гідроциліндрів 280 мм та номінальною частотою обертання приводного двигуна (ДВЗ) насоса 1900 хв$^{-1}$.

Результати моделювання часу встановлення максимальних значень навантаження на гідроциліндри та витрати РР в їхніх порожнинах показав, що при скачковому задані змінних параметрів коливання значні і досягають 25 МПа, що вдвічи перевищують тиск на режимі, що встановився. Зменшення інтенсиіності зростанння навантаження та витрати приводить к відсутності коливань в порожнинах гідроциліндрів.

Слід відмітити суттеві коливання тиску в ОГП при недостатньому модулі пружності РР. Для відвертання коливань необхідно дегазувати РР при підготовці к роботі шляхом напрацювання ОГП при холостому ході декілька хвилин, або випускати повітря за допомогою спеціальних гідропристроїв (контрольних точок тиску).

Література

[1] - Трактор ХТЗ-17021. Инструкция по эксплуатации. 170.00.000 ИЭ. – ОАО «Харьковский тракторный завод». – Харьков. – 1999. – 178 с.

[2] - Трактор ХТЗ-17021. Инструкция по эксплуатации. 170.00.000 ИЭ. Дополнение к руководству по эксплуатации. – ПАО «Харьковский тракторный завод». – Харьков. – 2013. – 13 с.

[3] - Расчет, проектирование и эксплуатация объемного гидропривода / З.Л. Финкельштейн, О.М. Яхно, В.Г. Чебан и др. – Киев: НТУУ «КПИ» ВПИ ВПК «Политехника», 2006. – 216 с.

[4] - Лурье З. Я. Динамика двухмерной системы управления мехатронного гидроагрегата навесным оборудованием трактора / З. Я. Лурье, Е. Н. Цента, А. И. Панченко. – Промислова гідравліка і пневматика, 2017. - №3(57). - С. 29–46.

УДК 376 (051)

Заїка Т.С. (студ., 5 курс)

Науковий керівник – доц. Простакова Ю.С .

Харківський національний педагогічний університет імені Г.С. Сковороди (Харків, Україна)

ВИКОРИСТАННЯ СЕРВІСУ КАНООТ ЯК ЗАСОБУ РЕАЛІЗАЦІЇ ІКТ-ТЕХНОЛОГІЙ В ОСВІТНЬОМУ ПРОЦЕСІ

Впровадження компетентнісного підходу в освітній процес призводить до висування нових вимог до професійних умінь і навичок сучасних вчителів, і, відповідно, передбачає зміни в освітній підготовці майбутніх вчителів. До вчителів наразі висуваються вимоги, які передбачають здатність до вільного і активного мислення, самостійної генерації і втілення нових ідей та освоєння ефективних освітніх технологій. Неможливо ігнорувати також інформатизацію суспільства, яка стає все більш динамічною. З урахуванням сучасних вимог, вчителі, для досягнення найкращого ефекту в освітній діяльності, повинні творчо і безперервно розвиватися в сфері використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ).

Важливою складовою професійної підготовки сучасного вчителя математики є його інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ-компетентність). Під ІКТ-компетентністю вчителя розуміють використання й ефективне застосування різноманітних інформаційних інструментів для здійснення педагогічної діяльності

Л. Горбунова, А. Семибратов [1] розглядають інформаційно-комунікаційну компетентність учителя як сукупність знань, умінь і навичок, які формуються в процесі навчання інформаційних технологій, а також готовність і здатність педагога до самостійного і відповідального використання цієї технології у своїй професійній діяльності.

Теоретичні та методичні підходи формування ІКТ-компетентності вчителів математики відображено у працях таких науковців, як О. Пеньковець [2], Н. Морзе [3], О. Петренко [4], Ю. Триус [5], О. Білоус [6], та ін. У вказаних роботах розглянуто підготовку майбутніх учителів математики до використання ІКТ у професійній діяльності, а також проблеми та перспективи впровадження в систему освіти методів і засобів ІКТ.

Але незважаючи на надзвичайну актуальність та важливість набуття ІКТ-компетентності для сучасних вчителів, результати аналізу уроків, відвіданих нами під час проходження педагогічної практики у закладах загальної та спеціалізованої освіти та проведених бесід з вчителями, свідчать про те, що обізнаність вчителів природничо-математичних дисциплін з питань використання ІКТ-засобів для проведення навчальних занять в інтерактивній або дистанційній формі є низькою. Тому в роботі більшості вчителів переважають традиційні методи викладання.

Отже, мета нашої статті – розглянути деякі із сучасних ІКТ-засобів, які можуть бути ефективно впроваджені в роботу вчителів математики та сприяти підвищенню інтересу учнів до навчання.

Одним із цікавих і простих у використанні ІКТ-засобів є мобільний додаток Kahoot. Це безкоштовний сервіс, який дозволяє створювати та проводити онлайн вікторини, тестування й опитування. Учні можуть відповідати на створені вчителем тести з планшетів, ноутбуків, смартфонів, тобто з будь-якого пристрою, що має доступ до Інтернету. Для того, щоб почати використання вчителю та учням потрібно попередньо встановити додаток Kahoot на свій пристрій, та зареєструватися. Для того, щоб розпочати тестування, вчитель повідомляє учням код з 6 цифр до цього тесту, і учні використовують його для входу у своєму додатку та приєднуються до роботи.

Використання сервісу Kahoot було апробовано нами під час роботи в п'ятому класі. При вивченні теми «Додавання натуральних чисел. Властивості додавання» з метою перевірки вмінь і навичок учнів виконувати додавання натуральних чисел, учням було запропоновано за допомогою мобільного додатка Kahoot виконати завдання, розв'язуючи приклади усно.

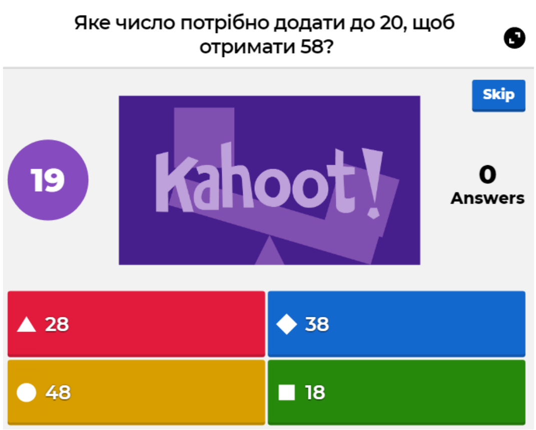


Рис. 1. Приклад питання на обчислення доданку

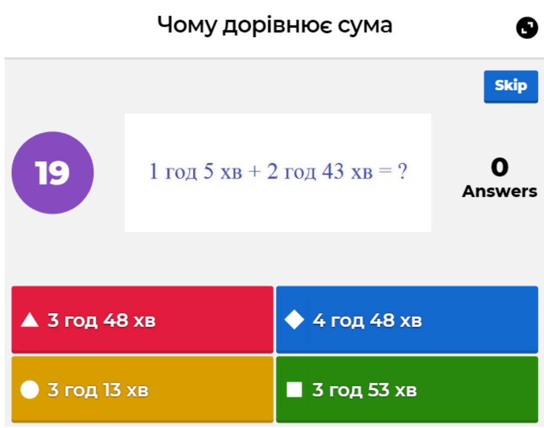


Рис. 2. Приклад питання на обчислення суми часу

Запропонований тест містив 12 прикладів з чотирма варіантами відповіді, одна з яких була вірною (рис. 1-2). На виконання тесту було відведено 7 хвилин. Темп виконання тесту регулювався шляхом введення часової межі для кожного питання.

Під час виконання тесту учитель може виводити бали за відповіді на поставлені питання на проектор: за правильні відповіді та за швидкість.

Діти під час виконання тесту виявили зацікавленість, показали навички гарних користувачів мобільного додатка, а також вміння працювати у команді.

За результатами роботи було виявлено наступні переваги застосування мобільного додатка Kahoot:

1) прагнення дітей відповісти першими дати правильну відповідь;

2) підвищення інтересу до виконання завдань;

3) раціональне використання часу уроку;

4) швидкий зворотній зв'язок.

Крім того, домашнє завдання «Розробити тест з теми для своїх однокласників» було сприйняте учнями великим ентузіазмом.

Висновок. Використання сервісу Kahoot може бути хорошим методом оперативного отримання зворотного зв'язку від учнів з метою виявлення рівня засвоєння теми, а також засобом підвищення мотивації учнів до навчання. А поєднання ігрової форми та здійснення негайного контролю сприяє кращому засвоєнню теми. Отже, сервіс Kahoot може бути вдало використаний в процесі викладання не тільки математики, а й інших дисциплін. Використання сервісу Kahoot у навчанні дозволить учителеві досягати кращих результатів навчання.

Анотація. *Підвищення мотивації учнів до навчання на уроках математики за допомогою використання інформаційно-комунікаційних технологій.*

Ключові слова: *інформаційно-комунікаційні технології у навчанні.*

Література

[1] - Горбунова Л.М., Семибратов А.М. Підвищення кваліфікації педагогів в області інформаційно-комунікаційних технологій як розвивається система / Педагогічна інформатика. - 2004. - № 3. - с. 3.

[2] - Пеньковець О.В. Формування професійної компетентності з інформаційно-комунікаційних технологій у майбутніх учителів природничо- математичного профілю : дис. кандидата пед. наук : 13.00.04 / Олена Василівна Пеньковець. – Харків, 2012. – 202 с.

[3] - Морзе Н.В. Модель стандарту ІКТ-компетентності викладачів університету в контексті підвищення якості освіти / Н.В. Морзе, А.Б. Кочарян // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014. – Том 43, №5. – С. 27–39.

[4] - Петренко С.І. Про модель формування ІКТ-компетентності майбутнього учителя математики / С.І. Петренко // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск 2 (5). – С. 49–57.

[5] - Триус Ю.В. Інноваційні інформаційні технології у навчанні математичних дисциплін / Ю.В. Триус // Інноваційні комп'ютерні технології у вищій школі : матеріали 3-ої Науково-практичної конференції, 8-12 жовтня 2011 року, Львів / Національний університет «Львівська політехніка». – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2011. – С. 61–68.

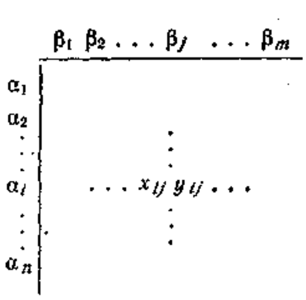
[6] - Основи стандартизації інформаційно-комунікаційних компетентностей в системі освіти України: метод. рекомендації / [В.Ю. Биков, О.В. Білоус, Ю.М. Богачков та ін.] ; за заг. ред. В.Ю. Бикова, О.М. Спіріна, О.В. Овчарук. – К. : Атіка, 2010. – 88 с.

Ківа О. В. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Пташний О. Д.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

КОНФЛІКТ, ЯК ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Сучасні уявлення про дослідження поняття конфлікту базуються на твердженнях, що конфліктні ситуації різної природи можуть бути охарактеризовані із загальної точки зору, що в зовнішньому різноманітті прояву конфлікту відображуються деякі логічні принципи, що конфлікт може бути об’єктом математичного дослідження.

Однією з моделей, що розглядаються у класичній теорії ігор, є, так звана, гра з нульовою сумою, яка задається платіжною матрицею, кожному рядку якої відповідає стратегія першого гравця, а кожній колонці - стратегія другого гравця. У клітці матриці, що знаходиться на перетині i-го рядка і j-го



стовпця, записуються два числа x_{ij} і y_{ij}, відповідні «виграшу» першого гравця і «виграшу» другого гравця: слово «виграш» ми уклали в лапки, так як можливий випадок, коли гравець не отримує, а платить, - тоді його «виграш» негативний. Найбільш вивченими є гри, коли виграш одного гравця в точності дорівнює програшу іншого. Такі ігри називають іграми з нульовою сумою.

В іграх з нульовою сумою в платіжній матриці зазвичай пишуть одне значення. За домовленістю виграші гравця 1 читаються з тим знаком, з яким вони входять в матрицю, а виграші гравця 2 - з протилежним знаком

Якщо в ігровій матриці існує значення виграшу x_{ij}, що є максимальним серед мінімальних по всіх рядках i , та одночасно мінімальним серед максимальних за всіма стовпцями j, то стратегії i та j є найкращими для кожного гравця з точки зору досягнення ними гарантованого результату і подібна матриця має сідлову точку . Це означає, що в розпорядженні гравця 1 немає нічого кращого, ніж α_i, а гравець 2 надійде самим розсудливим чином, якщо вибере β_j. Обрані таким чином стратегії гравців називаються мінімаксними.

	β_1	β_2
α_1	3	1
α_2	2	4

У матриці сідлової точки немає; для гравця 1 найкращою стратегією, точніше найкращою з найгірших, є α_2, для гравця 2 - β_1. Гравець 1 переконаний в тому, що гравець 2 обере відповідно до принципу мінімакса стратегію β_1, так як β_1 - краща відповідь на α_2. Але в цьому випадку гравцеві 1 краще вибирати β_1, ніж α_2.Якщо ж гравець 2 зуміє повторити це міркування, то він, очевидно, вибере β_2, а не β_1. Тоді гравцеві 1 слід вибрати α_2 і обидва гравця будуть рухатися по колу.

Вихід з цієї ситуації полягає в тому, що гравцям доцільно вибирати стратегії випадковим чином. Отримані в результаті стратегії називаються змішаними, вони визначають найкращий результат гри для кожного гравця. В іграх з ненульовою сумою в кожну клітину матриці ми повинні помістити не одне, а два значення платежів: x_{ij} і y_{ij}. якщо гравець 1 вибрав стратегію α_i, а гравець 2 - β_j, то перший отримує виграш x_{ij}, а другий - y_{ij}. Природно інтерпретувати негативні значення виграшів як програші.

Особливий інтерес представляють експериментальні психологічні дослідження конфлікту в автономних групах (виробничі колективи, екіпажі, спортивні команди і т. п.). Внутрішньо-групові зв'язки (операційні, інформаційні, емоційні) перетворюють групу в інтегрований організм.

Розглядаючи таке складне явище, як конфлікт, математик, логік, психолог, дослідник операцій і полководець будуть дивитися на об'єктивну картину конфлікту своїми очима. Вони, природно, будуть виділяти в ньому ті сторони, які їх цікавлять і які піддаються «вилученню» за допомогою тих специфічних методів дослідження, якими вона володіє. При цьому кожен фахівець користується тією сукупністю уявлень про об'єкт (в нашому випадку - про конфлікт), які склалися в тій чи іншій галузі знання. Важливість правильного вибору вихідного уявлення об'єкта, як системи, як цілого, навіть усередині однієї галузі, обумовлюється тим, що це дозволяє застосовувати найбільш ефективний науковий і математичний апарат. Щоб дослідити конфлікт за допомогою апарату теорії ігор, необхідно його схематизувати: виділити гравців і набори стратегій, якими користуються гравці, визначити платежі гравців, віднісши їх до певних стратегій. Підсумком такої схематизації і є платіжна матриця.

Говорячи про матеріальну основу конфлікту і різних моделях конфліктних ситуацій, не можна не сказати про шахи, хоча б тому, що немає нічого легшого, як уявити собі конфлікт на шахівниці. Дослідники прямо зіставляють оперативне мислення людей в ігрових ситуаціях, характерних для функціонування великих автоматизованих систем управління, з мисленням шахіста. У шахах протистоять один одному не білі і чорні фігури, а шахіст А, який грає білими, і шахіст Б, який грає чорними. Роблячи хід «а», гравець змушує противника відповісти ходом «б» (бо всі інші ходи в комбінації або форсованому варіанті відразу програють), але хід «б» дає можливість зробити хід «в», на який противник вимушений відповісти ходом «г» і т. д. до останнього ходу. Противник, розгадавши комбінацію, бачить, що кожен крок наближає його до програшу, але цього кроку він не може не зробити. Шахіст, що ставить пастку партнеру або просто розраховує варіант, відображає на своєму «уявному планшеті» не тільки особливості даної позиції, але і те, як ці особливості відображаються противником на його (противника) планшеті. Тобто конфліктуючі сторони вступають в своєрідну рефлексивну гру, де кожна зі сторін прагне отримати можливість перехитрити один одного. Таке зображення конфлікту, як інтелектуальноЇ взаємодії сторін, є важливим системним поданням конфлікту, який відкриває нові резерви в оптимізації рішень, що приймаються в конфліктній ситуації.

Анотація. *У роботі розглядаються підходи до постановки задачі дослідження конфліктної ситуації. Виділяється модель конфлікту, яка основана на фіксації імітації міркувань одного противника іншим. Учасники конфлікту розглядаються, як гравці, що вступили до рефлексивної гри.*

Ключові слова: *конфлікт, рефлексивна гра, стратегії, платіжна матриця.*

Література

[1] - Смолян Г. Л. Исследование операций – инструмент эффективного управления / Г. Л. Смолян. - М.: Знание, 1967. – 62 с.

[2] - Льюс Р. Д. Игры и решения / Р. Д. Льюс, Х. Райфа. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. - 642 с.

[3] - Костевич Л. С. Исследование операций. Теория игр: Учебное пособие / Л. С. Костевич. - Минск: Вышэйшая школа, 2008. – 368 с.

[4] - Лефевр В. А. Алгебра конфликта / В. А. Лефевр, Г. Л. Смолян. - М.: КомКнига, **2009. – 831** с.

[5] - Шейнов В. Управление конфликтами / В. Шейнов. - М.: Питер, 2014. - 576 с.

[6] - Анцупов, А. Я. Конфликтология: Учебник для вузов / А. Я. Анцупов, А. И. Шипилов. - СПб.: Питер, 2015. – 528 с.

Колтунов М. І. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Пташний О. Д.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

СТРАТЕГІЇ ВИКОРИСТАННЯ РЕФЛЕКСІЇ У ІГРАХ

Теорія ігор - математичний метод вивчення оптимальних стратегій в іграх. Під грою розуміється процес, в якому беруть участь дві або більше сторін, які ведуть боротьбу за реалізацію своїх інтересів. Кожна зі сторін має свою мету і використовує деяку стратегію, яка може вести до виграшу або програшу - залежно від поведінки інших гравців. Теорія ігор допомагає вибрати найкращі стратегії з урахуванням уявлень про інших учасників, їх ресурсах та їх можливих вчинках.

Агент – деяка сутність, фактор, що приймає рішення в теорії ігор. В якості агентів можуть виступати гравці, об’єднання гравців, системи (економічні, соціальні, політичні, кібернетичні тощо).

Розглянемо можливі стратегії агентів, кожна з яких породжує відповідну концепцію рівноваги, тобто визначає, в якому сенсі стійким повинен бути прогнозований результат гри. Паралельно будемо обговорювати ту інформованість, яка необхідна для реалізації рівноваги.

Рівновага в домінантних стратегіях (домінантна стратегія – це стратегія, яка дає агентові більший виграш, ніж будь-яка інша, незалежно від дій опонентів). Якщо для деякого агента множина

$$BR_i(\theta, x_{-i}) = Arg\ \max f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ \ i \in N \quad , \qquad (1)$$

де BR(best response) – найкраща відповідь, $x_{-i} \in X_{-i}$ - обстановка гри, $\theta \in \Omega$ - стан природи, незалежний від обстановки, то вона становить безліч його домінантних стратегій (сукупність домінантних стратегій агентів називається рівновагою в домінантних стратегіях - РДС). Якщо у кожного з агентів існує домінантна стратегія, то вони можуть приймати рішення незалежно, тобто вибирати дії, не маючи ніякої інформації і не роблячи ніяких припущень про обстановку. На жаль, РДС існує далеко не у всіх іграх.

Максимінна рівновага. Відповідно до принципу максимального гарантованого результату (МГР) гарантоване значення цільової функції *i*-го агенту визначаєтьсянаступним чином:

$$x_i^e \in Arg \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{i-1} \in X_{i-1}} \min_{\theta \in \Omega} f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ \ i \in N \qquad (2)$$

Це припущення означає, що агент вважає, що внаслідок гри реалізується найгірша для нього обстановка, і вибором своєї стратегії максимізує гарантоване значення цільової функції $f_i(\theta, x_i, x_{-i})$

Слід зазначити, що використання принципу МГР дає агенту песимістичну оцінку результату гри, що не завжди доцільно.

Рівновага Неша.

Рівновагою Неша при стані природи θ (точніше - параметричною рівновагою Неша) називається точка

$x^*(\theta) \in X'$, яка задовольнить такій умові:

$$x^*(\theta) \in BR(\theta, x^*(\theta)) \tag{3}$$

тобто нікому з агентів не вигідно змінювати свою стратегію, за умови, що інші агенти не змінюють своїх стратегій.

Суб'єктивна рівновага. Розглянуті види рівноваги є окремими випадками суб'єктивної рівноваги, яка визначається як вектор дій агентів, кожна компонента якого є найкращою відповіддю агента на ту обстановку гри, яка може реалізуватися з його суб'єктивної точки зору. Припустимо, що *i*-ий агент розраховує на реалізацію обстановки гри $\overset{\frown}{x}{}^b_{-i}$ (b(beliefs) – припущення) та стан природи $\overset{\frown}{\theta}_i$, тоді він обере

$$x_i^b \in BR_i(\overset{\frown}{\theta}_i,\ \overset{\frown}{x}{}^b_{-i}),\ i \in N \tag{4}$$

Вектор x^b є точковою суб'єктивною рівновагою.

Відзначимо, що при такому визначенні «рівноваги» не потрібно обґрунтованості припущень агентів про дії опонентів, тобто може виявитися, що $\overset{\frown}{x}{}^b_{-i} \neq x^b_{-i}$. Обгрунтована суб'єктивна рівновага, тобто така, что $\overset{\frown}{x}{}^b_{-i} = x^b_{-i}$, є рівновагою Неша (для цього, зокрема, досить, щоб всі параметри гри були загальним знанням, і щоб кожен агент при побудові $\overset{\frown}{x}{}^b_{-i}$ моделював раціональну поведінку опонентів). В окремому випадку, якщо найкраща відповідь кожного агента не залежить від припущень про обстановку, то суб'єктивна рівновага є рівновагою в домінантних стратегіях

Отже, можна зробити висновок про те, що концепція рішення гри тісно пов'язана з поінформованістю агентів. Такі концепції рішення, як РДС і рівновага Неша, є, в певному сенсі, граничними випадками - перша вимагає мінімальної інформованості, друга - нескінченності рангу інформаційної рефлексії всіх агентів. Тому нижче ми опишемо інші («проміжні») випадки інформованості агентів - ієрархії уявлень - і побудуємо відповідні їм рішення гри. Для наочності та простоти опису ми будемо розглядати біматричні ігри.

Біматрична гра - це скінченна гра, в якій беруть участь двоє агентів.

В біматричних іграх, в яких не існує рівноваги Неша, або в яких при існуючій рівновазі Неша агенти вибирають суб'єктивні гарантуючи стратегії, виграш кожного з агентів залежить як від його рангу рефлексії, так і від рангу рефлексії опонента. Крім того необмежене збільшення рангу стратегічної рефлексії не призводить до збільшення виграшу. Перейдемо до формального опису.

Розглянемо біматричну гру, в якій виграш агентів задається матрицею виграшів.

Матриця виграшів – матриця, строками якої є стратегії першого гравця, стовпцями – стратегії другого гравця, а елемент на перетині строки і стовпця – виграші гравців в ситуації, утвореній відповідними стратегіями.

Виграші першого і другого агентів задаються матрицями $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ розмірності $n \times m$ відповідно. Позначимо $I = \{1,2, ..., n\}$ – множина дій першого агента (вибирає рядок), $J = \{1,2, ..., m\}$ - множина дій другого агента (вибирає стовпець).

У розглянутій грі гарантуючі стратегії агентів наступні:

$$i_0 \in Arg \max_{i\in I} \min_{j\in J} \mathrm{a}_{ij} \; ; \qquad j_0 \in Arg \max_{j\in J} \min_{i\in I} \mathrm{b}_{ij} \tag{5}$$

Введемо наступні припущення. Нехай матриці виграшів такі, що кожна дія кожного агента є найкращою відповіддю на деяку дію опонента, і нехай, крім того, найкраща відповідь на кожну дію опонента єдина.

Позначимо

$$a_0 = \max_{i\in I} \min_{j\in J} \mathrm{a}_{ij} \;\; b_0 = \max_{j\in J} \min_{i\in I} \mathrm{b}_{ij} \tag{6}$$

- максимальні гарантовані результати (МГР) першого і другого агентів відповідно.

Визначимо рефлексивну біматричних гру MG_{kl} (matrix game) як біматричних гру з матрицями A і B, в якій перший і другий агенти мають ранги рефлексії, рівні k і l відповідно, $k, l \in N$ - безліч натуральних чисел.

Пояснимо, що буде розумітися під **рангом рефлексії** (точніше - під рангом стратегічної рефлексії) в біматричних іграх. У біматричних (і не тільки біматричних іграх вибір дій агентами може здійснюватися на підставі знання рангів рефлексії опонента. Ранги рефлексії визначаються наступним чином. «Агент має нульовий ранг рефлексії, якщо він знає тільки матрицю платежів. Агент має перший ранг рефлексії, якщо він вважає, що його противники мають нульовий ранг рефлексії, тобто знають тільки матрицю платежів. Взагалі, агент з k-им рангом рефлексії передбачає, що його супротивники мають k-1-й ранг рефлексії. Він проводить за них необхідні міркування щодо вибору стратегії і вибирає свою стратегію на основі знання матриці платежів і екстраполяції дій своїх супротивників. Наведемо ілюстративний приклад.

<u>Приклад 1</u>. Гра в хованки. Перший агент ховається в одній з декількох кімнат різної освітленості, а другий агент повинен вибрати ту кімнату, де буде його шукати. Ступені освітленості відомі обом агентам. Стратегії агентів наступні. Той, хто шукає, за інших рівних умов краще шукатиме там, де світліше (там простіше знайти). Тому, що ховається, зрозуміло, що в більш темній кімнаті шансів знайти його менше, ніж в освітленій. Зростання рангу рефлексіі означає, що агенту стає зрозуміло, що це зрозуміло і його противнику, і т.д. Уявімо ранги рефлексії агентів і відповідні дії по вибору кімнат у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

Ранги рефлексії

Ранг рефлексії агента	0	1	2	3	4
Кімната, у якій агент ховається	Найтем-ніша	Будь-яка, окрім найсвітлішої	Будь-яка, окрім найтемнішої	Найсвітліша	Найтемніша
Кімната, у якій агент шукає	Найсвіт-ліша	Найтемніша	Будь-яка, окрім найсвітлішої	Будь-яка, окрім найтемнішої	Найсвітліша

Можна бачити, що після другого рангу рефлексії вичерпується вся множина допустимих дій, а після третього рангу рефлексії стратегії вибору кімнат починають повторюватися. Цей факт був ілюстрацією того, що в грі двох осіб збільшення рангів рефлексії вище певного об'єктивно не дає нічого нового, хоча суб'єктивне наростання складності може тривати. Невідповідність рангів рефлексії успішності діяльності полягає в наступному. Нехай той, що ховається, має 0-й ранг (ховається в найтемнішій кімнаті). Якщо при цьому той, що шукає, має 1-й ранг, то він завжди виграє. Але якщо той, що шукає, має 3-й ранг (шукає в будь-якій кімнаті, крім найтемнішої), то він завжди програє опоненту з 0-м рангом, оскільки той, як ми пам'ятаємо, не міркує про те, що думає противник, і ховається саме в цій найтемнішій кімнаті, куди агент, що шукає, провівши серію рефлексивних міркувань, ніколи не загляне.

Таким чином, неможливо однозначно стверджувати, що більш високий ранг рефлексії краще нижчого. Перевага того чи іншого рангу визначається його взаємодією з рангом рефлексії противника.

Так як в біматричних іграх передбачається, що кожен агент має якесь переконання про ранг рефлексії опонента, то це дозволяє використовувати поняття суб'єктивної гарантуючої стратегії. Визначимо суб'єктивні гарантуючи стратегії в біматричних грі MG_{kl}:

$$i_k = \arg\max_{i \in I} \ a_{ij_{k-1}} \qquad j_l = \arg\max_{j \in J} \ a_{i_{l-1}j} \quad k,l \in N \tag{7}$$

Такім чином, гра MG_{00} збігається з вихідною грою, а «рівновагою» в грі MGkl є $a_{i_k j_l}; b_{i_k j_l} \ , k,l \in N$ Відзначимо два цікавих факта. По-перше, виграш будь-якого агента в грі MG_{kl} при $k \geq 1$, $l \geq 1$ може виявитися менше максимального гарантованого По-друге, приписування кожним агентом опонентові рангу рефлексії на одиницю менше його власного суперечливо, так як в грі MG_{kl} при $k \geq 1$, $l \geq 1$ це означає, що має одночасно виконуватися $l = k - 1$ і $k = l - 1$, що, очевидно, неможливо. Отже, рівновага в рефлексивній грі є істотно суб'єктивною, і апріорі агенти не знають в яку гру вони грають (ранги рефлексії обох агентів не можуть бути загальним знанням, так як це суперечило б самому визначенню рангу рефлексії). Тому перспективним напрямком майбутніх досліджень є вивчення інформаційної рефлексії щодо рангів рефлексії агентів в біматричних іграх.

Якщо одному агенту (або обом агентам) невідомий ранг рефлексії опонента, то доцільний розгляд гри $MG_{\infty\infty}$, в якій кожен агент обчислює гарантований результат за рангом рефлексії опонента. Введемо гарантуючі стратегії, відповідні повній невизначеності щодо рангу рефлексії опонента:

$$i_\infty = \arg \max_{i \in I} \min_{j \in J_\infty} a_{ij} \quad j_\infty = \arg \max_{j \in J} \min_{I \in I_\infty} b_{ij} \tag{8}$$

Аналогічно можна визначити гарантуючі стратегії в рамках інформації про те, що ранг рефлексії опонента не перевищує відомої величини (тобто перший агент вважає, що ранг рефлексії другого не вище L, а другий - що ранг рефлексії першого не вище K):

$$i^L = \arg \max_{i \in I} \min_{j \in J_L} a_{ij_L} \quad j^K = \arg \max_{j \in J} \min_{I \in I_K} b_{i_K j} \tag{9}$$

Відзначимо, що в (9), на відміну від (7), стратегія кожного з агентів не залежить від його власного рангу рефлексії, а визначається інформацією про ранг рефлексії опонента. Вирази (7) - (9) не вичерпують усього різноманіття можливих ситуацій, так як, наприклад, перший агент може припустити, що другий вибере j_∞, і тоді його найкращою відповіддю буде $\arg \max_{i \in I} a_{ij_\infty}$, і т.д. Крім того, хоча до збільшення рангу рефлексії здатні лише «сильні» агенти, інтуїтивно зрозуміло, що при зростанні цього рангу, тобто при подовженні ланцюжка міркувань «я думаю, що він думає, що я думаю ...» є небезпека «перемудрувати» . Сильний агент з високим рангом рефлексії переоцінює противника, припускаючи, що у нього ранг рефлексії теж високий. Але, якщо ранг суперника насправді низький, це призводить до програшу слабшому противнику - див. Приклад «Гра в хованки». Отже, необхідно систематичне дослідження співвідношення виграшів агентів в залежності від типу гри. Наведемо результати цього дослідження. Істотним для нашого розгляду є наявність або відсутність рівноваги Неша, а так само вибір агентами гарантуючих стратегій або дій, рівноважних по Нешу. Таким чином, можливі наступні чотири ситуації.

Варіант 1 (рівновага Неша в чистих стратегіях існує, і агенти орієнтуються на рівноважні по Нешу дії). Позначимо (i* ; j*) - номера рівноважних Нешу чистих стратегій. Тоді, якщо за аналогією з (7) вважати, що в рефлексивній грі кожен агент вибирає свою найкращу відповідь на вибір опонентом відповідної компоненти рівноваги, то виходить, що $i_k = i^*$, $j_l = j^*$, $k,l \in N$ тобто в рамках варіанту 1 стратегічна рефлексія безглузда.

Варіант 2 (рівновага Неша в чистих стратегіях існує, але агенти вибирають гарантуючи стратегії (7)).

Якщо гарантуючи стратегії утворюють рівновагу Неша (як це має місце в антагоністичних іграх з сідловою точкою), то потрапляємо в умови варіанту 1. Отже, стратегічна рефлексія має сенс, тільки якщо врамках варіанту 2 рівновага Неша не збігається з рівновагою в гарантуючих стратегіях (i_0, j_0).

Варіант 3 (рівноваги Неша в чистих стратегіях не існує, і агенти орієнтуються на рівноважні по Нешу змішані стратегії). Якщо агенти при вирішенні питання щодо його найкращих відповідей по аналогії розраховують на те, що опонент вибере рівноважні по Нешу змішані стратегії, то легко показати, що максимум очікуваного виграшу кожного агента буде досягатися при виборі їм також відповідної рівноважної по Нешу змішаної стратегії. Отже, в рамках варіанту 3 будь-яка рівновагу збігається з рівновагою Неша в змішаних стратегіях, тобто стратегічна рефлексія в цьому випадку не має сенсу.

Варіант 4 (рівноваги Неша в чистих стратегіях не існує, і агенти орієнтуються на гарантуючі стратегії (7)). У четвертому варіанті аналіз рефлексії, очевидно, має сенс. Таким чином, розглянувши всі чотири можливих варіанти поведінки агентів, отримуємо, що обгрунтована справедливість наступного твердження.

<u>Твердження 1</u>. Стратегічна рефлексія в біматричних іграх має сенс, якщо агенти використовують суб'єктивні гарантуючі стратегії (7), які не є рівноважними по Нешу. Позначимо

$$K_{\min} = \min\left\{K \in N \middle| I_K = I_\infty\right\},$$
$$L_{\min} = \min\left\{L \in N \middle| J_L = J_\infty\right\}, \tag{10}$$

де K_{min} і L_{min} - мінімальні ранги рефлексії першого і другого агентів, при яких їх множина суб'єктивних рівноважних дій збігається з максимально можливими в даній грі множинами суб'єктивних гарантуючих стратегій.

Якщо ранг рефлексії першого і другого агентів не перевищує K і L відповідно, то множина суб'єктивних гарантуючих стратегій першого і другого агентів з точки зору опонента рівні I_{L-1} і J_{K-1} відповідно. Значить, збільшення рангів рефлексії може призводити до розширення множини суб'єктивних гарантуючих стратегій, якщо

$$L - 1 < K_{min}, \quad K - 1 < L_{min} \tag{11}$$

Відзначимо, що з даної точки зору максимальний доцільний ранг рефлексії першого агента залежить від властивостей суб'єктивних гарантуючих стратегій другого агента і навпаки. З іншого боку, агенту не має сенсу збільшувати ранг своєї рефлексії, якщо він вже «вичерпав» власну множину можливих суб'єктивних рівноважних дій. З цієї точки зору збільшення рангів рефлексії може призводити до розширення множини суб'єктивних гарантуючих стратегій, якщо

$$K < K_{min}, \quad L < L_{min} \tag{12}$$

Об'єднуючи (11) і (12) отримуємо, що першому агенту не має сенсу збільшувати свій ранг рефлексії вище

$$K_{max} = \min\{K_{min}, L_{min} + 1\} \tag{13}$$

а другому агенту не має сенсу збільшувати свій ранг рефлексії вище

$$L_{max} = \min\{L_{min}, K_{min} + 1\} \tag{14}$$

Позначимо

$$R_{max} = \max\{K_{max}, L_{max}\} \tag{15}$$

Таким чином, доведена справедливість наступного твердження.

<u>Твердження 2</u>. Використання агентами в біматричній грі рангів стратегічної рефлексії вище, ніж (13) і (14), не має сенсу. Твердження 2 дає можливість у кожному конкретному випадку кожному агенту обчислити максимальні доцільні ранги стратегічної рефлексії обох агентів. Так як величини (13) - (14) залежать від гри (матриць виграшів), то отримаємо оцінки залежності цих величин від розмірності матриць виграшів (очевидно, що $|I_\infty| \le |I| = n,\ |J_\infty| \le |J| = m$, де m, n – розмірність матриці.

<u>Твердження 3</u>. В біматричних іграх n × м максимальні доцільні ранги стратегічної рефлексії першого і другого агентів задовольняють наступним нерівностям:

$$\begin{aligned} &K_{\max}(n,m) \le \min\{n, m+1\}, \\ &L_{\max}(n,m) \le \min\{m, n+1\}, \\ &L_{\max}(n,m) \le \max\{\min\{n, m+1\}, \min\{m, n+1\}\}, \end{aligned} \qquad (16)$$

Наслідок 1. В біматричних грі n × n, n ≥2, максимальний доцільний ранг стратегічної рефлексії будь-якого агента $R_{\max}$ (n, n) ≤ n.

Наслідок 2. В біматричній грі 2 × 2 максимальний доцільний ранг рефлексії не перевищує двох.

<u>Приклад 2</u>. ("Prisoners ‘Dilemma" (Дилема ув’язненого)). Розглянемо біматричних гру: у кожного з двох ув’язнених - спільників є дві дії: «Н» - «Не зізнаватися в скоєнні злочину» і «З» - «зізнатися в скоєнні злочину». Якщо зізнаються обидва агента, то вони отримують покарання - їх виграш є вектор (1; 1). Якщо перший зізнається, а другий ні, то перший виходить на свободу, а другий отримує значне покарання - вектор виграшів (результат) - (9; 0). Симетричним чином йде справа, якщо зізнається другий агент і несознается перший. І, нарешті, якщо не зізнаються обидва, то обидва отримають невелике покарання, кожен отримає виграш рівний 5, тобто менший, ніж якби він вийшов на свободу. Матриця виграшів приведена у таблиці 2.

Таблиця 2

Матриця виграшів

Дії	**Н**	**З**
Н	(5;5)	(0;9)
З	(9;0)	(1;1)

Відзначимо, що дія «З» у обох агентів домінує над дією «Н». Єдиною рівновагою Неша є («З»; «З»), яка складається з гарантуючих стратегій агентів і дає їм відповідно виграші $a_0 = 1$ і $b_0 = 1$. Отже, $i_0 = i_1 = i_2 = ...i_\infty$ = «З», $j_0 = j_1 = j_2 = ...j_\infty$ =«З», і розгляд рефлексії в даній грі не має сенсу (принанні, жодне з визначень (7) - (9) не дає «нової» рівноваги, в тому числі, не дозволяє обґрунтувати стійкості **Парето-ефективного результату** (при якому значення кожного приватного показника, що характеризує систему, не може бути покращено без погіршення інших) - («Н»; «Н»), що є однією з тестових проблем теорії ігор.

Література

[1] - Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003. – 149 с.

[2] - Смолян Г. Л. Исследование операций – инструмент эффективного управления. М.: Знание, 1967. – 62 с.

[3] - Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 272 с.

[4] - Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения: учебное пособие. СПб.: Лань, 2010. – 446 с.

Контарєв О. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – ст. викл. Мороз І. І.

Харківський національний автомобільно-дорожній університет (Харків, Україна)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ МОДЕЛІ БОЙОВИХ ДІЙ

Диференціальне рівняння є одним з головних математичних понять. Диференціальне рівняння, одержане в результаті досліджень якого-небудь реального явища або процесу, називається диференціальною моделлю цього явища або процесу. На практиці часто вимушені мати діло з такими випадками, коли невідомі закони, за якими можна скласти диференціальне рівняння. Тому роблять різні припущення (гіпотези) відносно досліджуваного процесу.

Розглянемо один з прикладів диференціальних моделей.

Під час першої світової війни англійський інженер і математик Ф.У. Ланчестер побудував декілька математичних моделей повітряних боїв. Потім ці моделі були узагальнені і розповсюджені на випадок бойових дій регулярних військ, партизанських з'єднань, а також тих та інших одночасно. Будемо розглядати першу з цих моделей.

Нехай в бойових діях приймають участь дві воюючи сили x і y, числовий склад яких в момент часу t (вимірюється в днях, починаючи з першого дня бойових дій) позначають $x(t)$ і $y(t)$. При побудові математичної моделі чисельність воюючих сторін буде грати визначну роль.

Припустимо, що функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервні і диференційовані по змінній t. Для складання математичної моделі відзначимо декілька факторів, які дозволяють описати швидкість, з якою змінюється чисельність воюючих сторін. По-перше, це величина, яка вказує на швидкість, з якою сторона x несе збитки від хвороб і інших факторів, не зв'язаних з веденням бойових дій; по-друге, це швидкість, з якою сторона x несе людськи збитки від безпосереднього ведення бойових дій зі стороною y; в-третє, це швидкість підходу підкріплення до сил сторони x.

Запишемо модель, побудовану Ланчестером, яка описує бойові дії між регулярними військами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ax(t) - by(t) + p(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t), \end{cases} \qquad (1)$$

де a, b, c і d – невід'ємні сталі, які характеризують ступень впливу різних факторів на втрати живої сили обох сторін x і y;

P(t) і $Q(t)$ – функції, які враховують можливості підходу підкріплення силами x і y на протязі дня;

x_0 і y_0 – чисельний склад сил x і y перед початком бойових операцій.

Для розв'язання системи (1) розглянемо випадок, коли дві сили x і y ведуть бойові дії за умови, що збитки, які не пов'язані з бойовими діями, відсутні. Крім того, вони ще не отримають і підкріплення. Толі модель (1) набуває вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -by(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = -cx(t). \end{cases} \tag{2}$$

Поділимо друге рівняння системи на перше:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by}. \tag{3}$$

Проінтегрувавши рівняння (3), будемо мати

$$by^2 = cx^2 + k, \tag{4}$$

де $k = y_0^2 - x_0^2$ – стале значення.

Тоді рівняння (4) набуває вигляду

$$by^2 - cx^2 = k. \tag{5}$$

Це рівняння при $k \neq 0$ задає гіперболу (якщо $k = 0$, тоді пару прямих). На рис. 1 зображені гіперболи для різних значень k. Стрілками на кривих вказують напрямок, за яким змінюється чисельність сил при зміні часу.

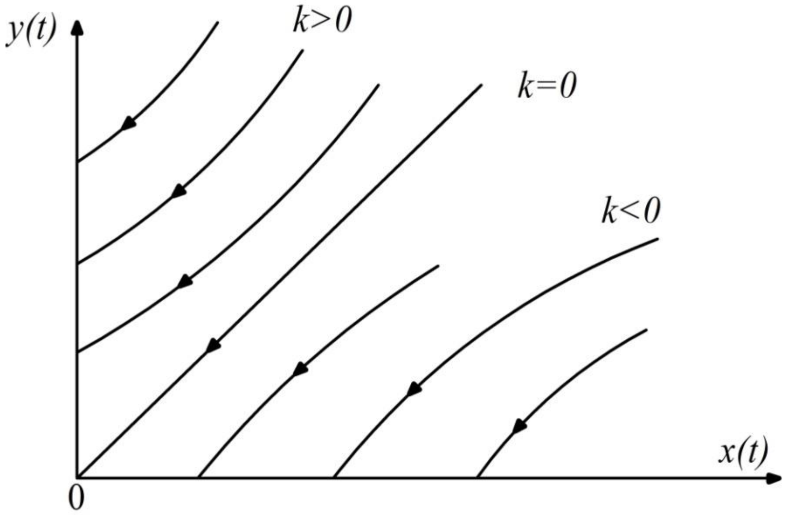


Рис. 1. Графіки розв’язків системи рівнянь (2)

Щоб відповісти на питання, хто перемагає в побудованій моделі (2), домовимось попередньо, що перемагає сторона y (відповідно x), якщо вона першою знищує бойові сили сторони x (відповідно y). Якщо $k > 0$, то перемагає сила y тому, що в рівнянні (5) змінна y ніколи не може перетворитися на нуль. Таким чином, для перемоги сили y має скластися така ситуація, коли $k > 0$, тобто коли:

$$by_0^2 > cx_0^2.$$

При складанні цієї моделі бойових дій враховувалась лише чисельність воюючих сторін, тому що практично неможливо вказати критерії, які б враховували рівень бойової готовності і озброєності, рівень і досвід командного складу, моральний дух та багато інших факторів.

Література

[1] - Амелькин В. В. Математические модели и дифференциальные уравнения / В. В. Амелькин, А. П. Садовский. – Минск, Вышейшая школа, 1982. – 272 с.

[2] - Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

УДК 517

Кошелєв М. С. (студ., 3 курс),
Чемерис Р. Р. (студ., 3 курс)
Науковий керівник – доц. Гадецька С. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ЗАСТОСУВАННЯ ПРАВИЛА «СТАРШИХ СТЕПЕНІВ» ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ НЕСТАНДАРТНИХ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Одним з поширених типів задач в математичних олімпіадних змаганнях є задачі знаходження границь функцій за умови прямування аргументу до нескінченності, розв'язання яких базується на розкритті невизначеності вигляду $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ за допомогою правила «старших степенів» [1]. Основним елементом підвищеної складності в таких завданнях виступають, як правило, параметри.

Відмітимо, що при розв'язанні задач вказаного типу, окрім найпростіших формул скороченого множення, також може стати в нагоді розкладання на окремі доданки натурального степеня суми двох змінних за формулою бінома Ньютона:

$$\left(a+b\right)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \ldots + \mathrm{C}_n^n b^n, \qquad (1)$$

де $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$ – біноміальні коефіцієнти, $n \in \mathrm{N},\ k = 0,1,\ldots,n.$

Так, при визначенні припустимого значення параметра k $(k \in \mathrm{N})$ за умови

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k - \left(n-1\right)^k}{n^{2019}} = 2020$$

виходимо з розуміння того, що при рівності границі скінченному ненульовому числу 2020, а також при нескінченно великій величині у знаменнику (при $n \to \infty$), чисельник також є нескінченно великим (при $n \to \infty$), причому такого самого порядку. Це означає, що вираз $n^k - \left(n-1\right)^k$ є многочленом степеня 2019, і його коефіцієнт при старшому степені дорівнює числу 2020. За формулою (1) маємо:

$$\frac{n^k-(n-1)^k}{n^{2019}}=\frac{n^k-\left(n^k-kn^{k-1}+\ldots\right)}{n^{2019}}=\frac{kn^{k-1}-\ldots}{n^{2019}},$$

звідки $k-1=2019,\ k=2020.$

Окремої уваги заслуговують границі, які містять ірраціональні вирази і передбачають розкриття невизначеностей шляхом множення і ділення цих виразів на відповідні спряжені до них. Так, при розв'язанні задачі знаходження значень параметрів $a, b, c,$ при яких

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4-2x^2-3}-ax^2-bx-c\right)=0,$$

що пропонувалась на Всеукраїнській олімпіаді у 2014 році, зауважуємо, що дана границя може дорівнювати нулю лише при $a>0$, і виконуємо перетворення:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2-3-\left(ax^2+bx+c\right)^2}{\sqrt{x^4-2x^2-3}+ax^2+bx+c}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-a^2\right)x^4-2abx^3-\left(b^2+2ac+2\right)x^2-2bcx-c^2-3}{\sqrt{x^4-2x^2-3}+ax^2+bx+c}.$$

Оскільки за правилом «старших степенів» маємо: $1-a^2=0, 2ab=0, b^2+2ac+2=0, a>0,$ то $a=1,\ b=0,\ c=-1.$

При обчисленні границі $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n}\right)$, запропонованої на олімпіаді Білоруського державного університету у 2006 році, застосування вищезазначеного прийому здійснюється на підставі попереднього перетворення з використанням періодичності функції $y=\sin^2 x,$ а також з урахуванням її неперервності. Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n}-\pi n\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi\left(n^2+2n-n^2\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{2\pi n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\sin^2\pi=0,$$

оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=1.$

Зупинимося окремо на твердженні про представлення функції , яка має скінченну границю, згідно якого $f(x)=A+\alpha(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x\to x_0$.

Тоді в задачі визначення параметрів λ і μ таким чином, щоб мала місце рівність $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right)=0$ [2], маємо: $\sqrt[3]{1-x^3}=\lambda x+\mu+\alpha(x),$ де $\alpha(x)\to 0\ (x\to\infty)$. Поділимо обидві частини цього рівняння на x і перейдемо до границі при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\lambda+\frac{\mu}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right).$$

(2)

Оскільки границя в лівій частині (2) за правилом «старших степенів» дорівнює –1 і $\frac{\mu}{x}\to 0,\ \frac{\alpha(x)}{x}\to 0\ (x\to\infty)$, то $\lambda=-1$. Значення μ отримаємо з рівності: $\mu=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)=0.$ Отже, дана рівність має місце при $\lambda=-1,\ \mu=0$.

Анотація.*В роботі аналізуються деякі особливості використання правила «старших степенів» при дослідженні границь функцій підвищеного рівня складності. Фундаментальні твердження підкріплюються конкретними прикладами, що демонструють різноманіття підходів і нестандартних прийомів розв'язання.*

Ключові слова*: границя функції, розкриття невизначеності, правило «старших степенів».*

Літератури

[1] - Всеукраїнські олімпіади з математики серед студентів технічних, економічних та аграрних ВНЗ: 2005-2010 рр./ М. І. Деркач, Ю. Є. Обжерін, О. І. Песчанський. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2011. – 120 с.

[2] - Зюбин С. А. Сборник олимпиадных задач по высшей математике: учебное пособие / С. А. Зюбин,Т. В. Тарбокова, В. М. Шахматов. – Томск: Изд-во Томского политехнического ун-та, 2005. – 144 с.

УДК 373.5.016:51

Майстрюк І. С. (студ., 5 курс)
Науковий керівник – проф. Гризун Л. Е.
Харківський національний педагогічний університет імені Г.С.Сковороди (Харків, Україна)

ДОСЛІДНО-ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА РОБОТА З НАДАННЯ ПЕДАГОГІЧНОЇ ПІДТРИМКИ СТАРШОКЛАСНИКАМ У ВИЧЕННІ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Експериментально-дослідна робота з надання педагогічної підтримки учням старшого підліткового віку у вивченні елементів комбінаторики та розв’язуванні рівнянь і нерівностей з параметрами проводилась протягом 2017-2019 навчальних років в умовах звичайного навчального процесу на базі Харківського ліцею № 107.

Метою статті є з’ясування впливу розробленої методики надання педагогічної підтримки старшокласникам у вивченні шкільного курсу математики на рівні сформованості реальних навчальних можливостей школярів.

Організація експериментальної роботи потребувала:

по-перше, вивчення стану розробки досліджуваної проблеми шляхом аналізу психолого-педагогічної і методичної літератури, а також збору емпіричного матеріалу, що вимагало з’ясування рівнів сформованості реальних навчальних можливостей (РНМ) школярів за такими критеріями, як научуваність і навчальна працездатність (Ю. Бабанський, І. Чередов);

по-друге, визначення способів і прийомів надання адекватної педагогічної підтримки старшокласникам з урахуванням домінуючих утруднень учнів у навчальній діяльності з математики;

по-третє, здійснення експериментальної перевірки розробленої методики надання дозованої адекватної педагогічної підтримки школярам з боку суб'єктів навчального процесу (вчителя, учнів-консультантів) в індивідуальній і груповій роботі у вивченні комбінаторики й рівнянь і нерівностей з параметрами;

по-четверте, виявлення впливу використаної методики надання диференційованої педагогічної підтримки на якісні показники навчання старшокласників з математики.

Результати експериментальної роботи підтвердили гіпотезу дослідження про те, що вивчення елементів комбінаторики та рівнянь і нерівностей з параметрами вимагає спеціальної організації навчальної діяльності старшокласників; довели ефективність запропонованої методики їх вивчення.

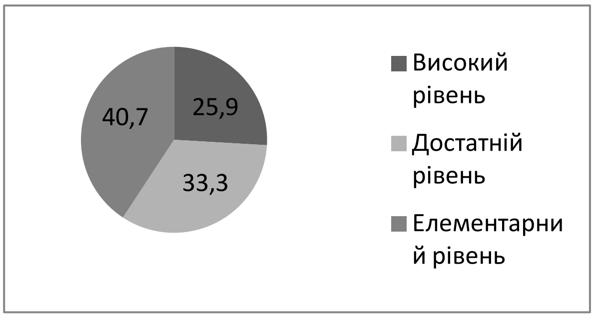
Так, аналіз отриманих результатів надає підстави засвідчити, що з 27 учнів експериментального класу на початок експерименту 11 учнів (40,7%) мали низький рівень сформованості РНМ, 9 – середній рівень (33,3%) та 7 школярів виявили високий рівень сформованості реальних навчальних можливостей (25,9%). Рівні навчальних можливостей школярів контрольного класу на початок експерименту виявились дещо вищими: 30,8%; 38,5%; 30,8%, відповідно.

У ході проведення порівняльного аналізу рівнів успішності учнів експериментального 11-А та контрольного 11-Б класів на кінець експерименту було встановлено, що кількість учнів з високим рівнем сформованості навчальних можливостей збільшилась в експериментальному класі на +7,4% (у контрольних класах кількість таких учнів залишилась незмінною); 11,1% учнів підвищили свій рівень за цим параметром до середнього (у контрольних класах приріст склав +3,9%); кількість школярів з низькими навчальними можливостями зменшилась на 18,5 (проти 3,9% у контрольних класах).

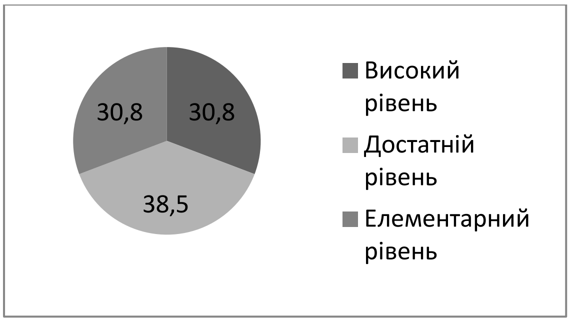
Порівняльно-узагальнювальні результати розподілу учнів експериментального (Е) і контрольного (К) класів за рівнями сформованості реальних навчальних можливостей на початок і кінець експерименту у вивченні елементів комбінаторики та рівнянь і нерівностей з параметрами, подано на діаграмі (див. рис. 1).

Початок експерименту

Е

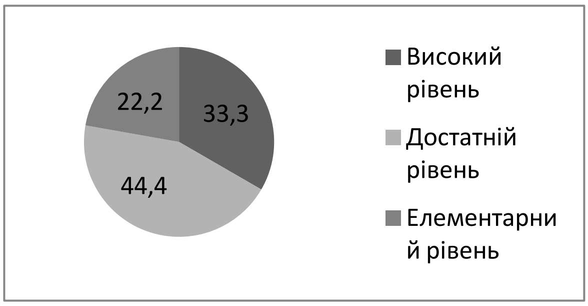


К



Кінець експерименту

Е



К

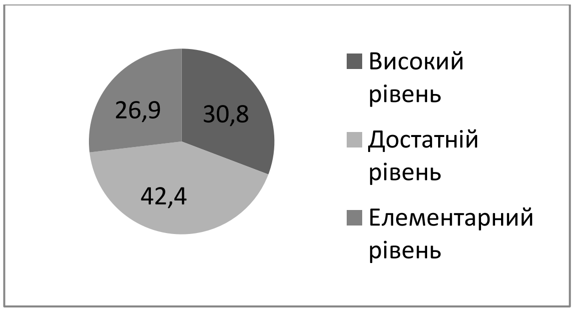


Рис. 1. Розподіл за рівнями сформованості РНМ учнів експерементального (27 осіб) і контрольного (26 осіб) класів на початок і кінець експеременту (у %).

Отже, унаслідок проведеної дослідно-експериментальної роботи:

- розроблено локальну особистісно орієнтовану методику вивчення елементів комбінаторики та рівнянь і нерівностей з параметрами, експериментальна перевірка якої виявила її позитивний вплив на рівні сформованості РНМ старшокласників;

- на основі результатів дослідження розроблено логіко-дидактичний аналіз теми “Елементи комбінаторики”, диференційовані засоби педагогічної підтримки (таблиці-поради, картки-консультанти; електронні навчально-методичні посібники з метою надання комп’ютерної підтримки старшокласникам; плани-конспекти уроків різних типів; завдання для організації індивідуальної і групової навчальної діяльності школярів).

Основні висновки дослідження використовуються під час проведення педагогічних практик зі студентами ХНПУ імені Г.С. Сковороди, науково-методичного семінару «Особистісно орієнтовані технології навчання», у написанні курсових робіт з методики навчання математики тощо.

Розроблені методичні рекомендації для учнів, засоби педагогічної підтримки старшокласників у вивчені елементів комбінаторики й рівнянь і нерівностей з параметрами пройшли дослідно-експериментальну перевірку і можуть використовуватись учителями математики, викладачами педагогічних ЗВО в організації навчально-пізнавальної діяльності школярів і студентів.

Анотація. *У статті висвітлено основні етапи організації дослідно-експериментальної роботи з надання педагогічної підтримки старшокласникам у вивченні елементів комбінаторики та рівнянь і нерівностей з параметрами; з’ясовано вплив розробленої методики на рівні сформованості РНМ школярів.*

Ключові слова: *педагогічна підтримка, експериментально-дослідна робота, шкільний курс математики, комбінаторика, рівняння та нерівності з параметрами, аналіз результатів.*

Література

[1] - Дейніченко Т.І. Диференціація навчання в процесі групової форми його організації (на прикладі предметів природничо-математичного циклу) : автореф. дис. … канд. пед. наук : спец. 13.00.09 «Теорія навчання» / Т. І. Дейніченко. – Харків, 2006. – 21 с.

[2] - Майстрюк І.С. Педагогічна підтримка школярів у вивченні елементів комбінаторики в сучасному ШКМ / І.С. Майстрюк // Актуальні проблеми розвитку науки в контексті глобальних трансформацій інформаційного суспільства: матеріали ІІ Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 25-26 жовтня 2019 р. / ГО «Інститут інноваційної освіти»; Науково-навчальний центр прикладної інформатики НАН України. – Київ, 2019. –С. 28-30.

УДК 372.851

Мосляков Я. В. (студ., 5 курс)
Науковий керівник – доц. Водолаженко О. В.
Харківський національний педагогічний університет ім. Г. С. Сковороди (Харків, Україна)

ПРОБЛЕМНІ ЗАВДАННЯ НА ЗНО

Аналіз відповідей школярів на тести ЗНО минулих років дозволяє зрозуміти, що існують такі завдання, в яких відсоток неправильних відповідей досить високий, а інколи й більший за відсоток правильних. І досить дивно те, що, найчастіше, труднощі виникають у таких завданнях, які легко можна перевірити практичним прикладом.

Цей короткий аналіз зроблений на основі розглянутих офіційних звітів про проведення ЗНО на сайті УЦОЯО за минулі роки [1]. Завдяки цим звітам існує можливість аналізувати відповіді на те чи інше завдання враховуючи відповідний відсоток вірних або помилкових відповідей.

Завдання, пов’язані з теорією ймовірностей, утворюють проблему майже для половини школярів. Діти не пам’ятають формул, або де їх використовувати, і це стає причиною помилки. Звісно, цій темі приділяється небагато уваги в школі, але ці задачі можна розв’язувати майже не пам’ятаючи формул. Це вказує на те, що діти погано розуміють саму тему, а ймовірнісне мислення в них практично не розвинене.

Чимала частка помилок припадає на текстові задачі. Неправильні відповіді, частіше за все, перевищують кількість правильних (навіть на першому рівні). Дітям буває важко правильно скласти рівняння, користуючись матеріалом тексту задачі, або ж вони просто намагаються вгадати правильну відповідь, навіть не склавши рівняння. Цю проблему можна вирішити, якщо пояснювати дітям більше практичних задач на заняттях особливо звертаючи увагу на аналіз умови задачі і на вміння читати математичні тексти взагалі.

Багато помилкових відповідей зустрічається в завданнях, пов’язаних з тригонометрією. Це й не дивно, оскільки багато хто з школярів має труднощі із запам’ятовуванням усіх формул тригонометрії, вже не кажучи про те, щоб їх розуміти. Можливо, вчителям потрібно робити більший наголос на те, як виводяться ці формули, що вони означають. Треба наводити більше графічних ілюстрацій до формул, які пояснювали б зв’язок між ними. Це дозволить дітям легше розуміти матеріал, а не просто заучувати його.

Задачі на аналіз, дослідження та побудову графіків функцій також викликають в учнів труднощі. Судячи з того, що відсоток виборів одного з п’яти варіантів майже однаковий для кожного (тобто маємо практично рівномірний розподіл відповідей), можна зробити висновок, що на це завдання багато учнів відповідають навмання. Труднощі виникають через великий обсяг інформації, що потрібно тримати в голові для досконалого розв’язання задач даної теми. Одним із методів подолання цієї проблеми може стати великий досвід розв’язування подібних задач, а також практика побудови та аналізу графіків за допомогою математичних пакетів (GeoGebra [2], wxMaxima [3] тощо). Це дозволить візуально зв’язати параметри функцій із їх відображенням на координатній площині, наочно побачити, як зміна значень цих параметрів впливає на зміну графіка функції.

Нерівності, як виявляється, утворюють ще одну складність для учнів. Відсоток правильних відповідей не перевищує третину. На мою думку, школярі просто не хочуть витрачати багато часу на розв’язання, оскільки не стільки не пам’ятають, скільки не розуміють, як швидко визначити, де нерівність має розв’язки. У цьому випадку вирішенням проблеми може стати лише детальний аналіз нерівностей на уроках із одночасною графічною візуалізацією.

У деяких завданнях більш ніж половина школярів не порівнює відповідь із умовою. Це дало б їм можливість зрозуміти, що було допущено помилку під час розв’язування. Наприклад, у задачах на використання декартової системи координат досить часто обирається така відповідь, що доволі просто спростовується умовою. Як варіант подолання проблеми – вчити дітей уважніше читати умову, вміло користуватися даними, робити перевірку, якщо не певен у відповіді, перевіряти, чи можливо виконати умови відповіді у житті (якщо задача має практичний зміст).

Задачі з побудовою малюнків також є слабким місцем більш ніж половини школярів. Завдання, що вміщують побудову проекцій ліній, перерізів, фігур на площині та в просторі, викликають багато труднощів у учнів. Причиною цього є погана просторова уява школярів, або нерозуміння того, як саме мають лежати фігури та де саме пересікати одна одну. Вихід із цієї ситуації, нажаль, лише один – треба розвивати просторове мислення школярів, частіше наводити аналогії фігур у навколишньому середовищі, а дітям, в свою чергу, вирішувати більше задач, де потрібно виконувати побудову фігур.

На основі аналізу всього матеріалу можна зробити такі висновки. Діти забувають багато що з пройденого матеріалу. Тому перед складанням ЗНО виникає необхідність повторювати та систематизувати весь шкільний курс, бо не кожен учень здатен зрозуміти, запам'ятати та оволодіти такою кількістю матеріалу самостійно. Можливо, більша кількість практичних задач в шкільному курсі дозволить дітям краще розуміти деякі тонкощі математики та, як наслідок, більш вдало використовувати свої знання.

Анотація. *У тезах розглядаються основні проблеми, з якими стикаються учні під час складання ЗНО, та можливі причини виникнення труднощів. Також наводяться рекомендації до вирішення цих проблем для здобувачів середньої освіти.*

Ключові слова. *ЗНО, математика, проблемні задачі, способи розв'язування.*

Література

[1] - Український центр оцінювання якості освіти, офіційні звіти про проведення ЗНО за 2015-2019 роки. http://testportal.gov.ua/

[2] - GeoGebra: графічний калькулятор для функцій, геометрії, статистики та 3D геометрії. Динамічна математика для навчання та викладання [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://www.geogebra.org

[3] - wxMaxima: a document based interface for the computer algebra system Maxima. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/

УДК 372.851

Матвійчук Ю. Ю.(аспірант, 2 рік навчання)
Науковий керівник - проф. Золотухіна С. Т.
Харківський національний педагогічний університет ім. Г. С. Сковороди
(Харків, Україна)

РЕАЛІЗАЦІЯ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ФУНКЦІЯ» У КУРСІ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

Актуальність проблеми змісту освіти зумовлюється зростанням інтересу педагогів до питань покращення її якості. Суспільний запит на формування в учнів цілісної системи знань потребує включення нової інформації у програми навчальних предметів, що обумовлено стрімким розвитком інформаційного середовища. Використання інтеграції в навчальному процесі є одним із шляхів для формування узгодженої наукової картини світу сучасного учня.

Міжпредметні зв'язки є дидактичним інструментом інтеграції змісту освіти та ґрунтуються на координації проблематики окремих предметів. Інтеграція навчальних дисциплін спрямована на поглиблення взаємозв'язків і взаємозалежностей між предметами, не заперечуючи їх системи. Щоб встановити міжпредметні зв'язки, необхідно, у ході аналізу, виділити за змістом навчального матеріалу споріднені смислові елементи дисциплін та ретельно спланувати комплексне використання встановлених зв'язків у ході вирішення навчальних задач. Такого роду підхід до підготовки уроків з використанням міжпредметних зв'язків відповідатиме найвищим принципам інтеграції, науковості та посильності навчання [5, с. 11].

В. Лозова зазначає, що хоч існує поділ на шкільні навчальні предмети, але вони знаходяться у межах об'єктивного взаємозв'язку, який ґрунтується на меті і завданнях шкільної освіти. Саме через це, на думку дослідниці, міжпредметні зв'язки є об'єктивно необхідними і мають реалізуватися в змісті освіти, методах і формах навчання [2, с. 537]. Отже, для використання на уроках інтеграції, вчителю необхідно спочатку проаналізувати зміст навчальних дисциплін для встановлення міжпредметних зв'язків та побудови структури подання матеріалу. Тому, у ході підготовки до уроків з теми «Функція» курсу алгебри 7 класу, було проаналізовано навчальні програми природничо-математичних дисциплін, з метою встановлення міжпредметних зв'язків за темою. Навчальні програми розміщені на офіційному веб-сайті МОН України [3].

Таблиця 1

Міжпредметні зв'язки з теми «Функція»

№	Навчальний предмет, клас	Тема згідно навчального плану предмету, що вивчались раніше	Зміст навчального матеріалу з теми «Функція». **Алгебра**, 7 клас
1	**Географія**, 6 клас	***Тема 2. Атмосфера.*** Складання графіка зміни температури повітря, опадів, рози вітрів, їх аналіз.	***Тема 2. Функції.*** Функціанальна залежність між величинами як математична модель реальних процесів.
2	**Фізика**, 7 клас	***Розділ 1. Фізика як природнича наука. Пізнання природи.*** Фізичні величини та їх вимірювання. Міжнародна система одиниць фізичних величин. *Лабораторна робота* № 1. Ознайомлення з вимірювальними приладами. Визначення ціни поділки шкали приладу.	***Тема 2. Функції.*** Функціанальна залежність між величинами як математична модель реальних процесів. (+Ціна поділки)
3		***Розділ 2. Механічний рух.*** Прямолінійний рівномірний рух. Швидкість руху. Графіки руху.	***Тема 2. Функції.*** Лінійна функція, її графік та властивості.

Подані теми у табл. 1, були взаємопов'язані та реалізовані у вигляді інтегрованих запитань на уроках алгебри, відповідно до календарного плану.

На основі встановлених зв'язків, наведемо один із прикладів завдань, які допоможуть учню згадати вже відому інформацію з інших предметів.

✓ <u>**Приклад 1 (відповідає темам №2 в Табл. 1).**</u>

<u>**№ 768**</u> [1, с. 139]

Турист вийшов з базового табору й через деякий час повернувся. На рисунку зображено графік руху туриста. Питання задачі:

1) На якій відстані від табору був турист через 10 год після початку руху?

2) Скільки часу він витратив на зупинку?

3) Через скільки годин після виходу турист був на відстані 8 км від табору?

4) З якою швидкістю йшов турист до зупинки?

5) З якою швидкістю йшов турист останні 2 год?

<u>**Коментар.**</u> Під час розв'язання задачі можна згадати вже відому учням інформацію з фізики 7 класу [4, с. 48-53]

1. Що називають механічним рухом? (Зміну положення тіла із часом відносно інших тіл). Що таке траєкторія? (Траєкторія – це уявна лінія, яку описує матеріальна точка під час руху).

2. Який рух називають прямолінійним? Криволінійним? (Коли рух відбувається вздовж прямої, то такий рух називають прямолінійним, а якщо траєкторією є крива лінія, – криволінійним) Як рухався турист за даним графіком, прямолінійно чи криволінійно? (Прямолінійно).

3. Що таке шлях? (Довжину траєкторії, яку описує тіло під час руху протягом певного інтервалу часу, називають шляхом). Згадати формулу.

4. Яка одиниця шляху в системі СІ? (1 метр). Як перевести 16 км в м? (1 км = 1000 м, значить, 16 км = 16 · 1000 = =16 000 км або $16 \cdot 10^3$км).

5. Яка одиниця швидкості в СІ? (Одиницею швидкості в СІ є один метр за секунду (1 м/с). 1 м /с - це швидкість руху тіла, під час якого воно за 1 с проходить шлях 1 м). Як перевести 1км/год в 1 м/с? (1 км/год = 1000 м/3600 с = 0,28 м/с).

6. Яке існує правило для визначення положення тіла у будь-який момент часу? (Необхідно знати його початкове положення і переміщення, здійснене тілом до цього моменту часу. Під час руху тіла довжина пройденого шляху і здійснене переміщення можуть не збігатися. Вони збігаються лише в тому разі, якщо тіло рухається вздовж прямої і не змінює напряму руху. У випадках, коли тіло повернулося в точку початку руху, то модуль переміщення дорівнює нулю).

Деякі діти, дали відповідь на питання «з якою швидкістю йшов турист останні 2 год?»: 2,5 км/год, що є неправильно. Тож, необхідно було згадати правило «ціни поділки». (Щоб визначити ціну однієї поділки, необхідно знайти дві найближчі підписані позначки шкали; відняти від більшого значення менше та отримане число розділити на число поділок, що знаходяться між ними). Ми знайшли ціну поділки до нашої задачі: 2 км $\left(\frac{4-0}{2} = 2\right)$. Отже, швидкість руху туриста останні дві години дорівнює 3 км/год ($\vartheta = \frac{S}{t} = \frac{6}{2} = 3$ км/год).

Можна навести ще багато прикладів інтегрованих завдань з теми «Функція», які побудовані на зв'язках між алгеброю та фізикою, географією або хімією. На нашу думку, завдання зі встановленими міжпредметними зв'язками дозволяють учням мислити за межами окремого навчального предмету. Вони допомагають систематизувати та узагальнювати знання на міжпредметному рівні, формують здатність застосовувати їх для пояснення зв'язку з реальними процесами повсякденного життя.

Анотація. *Стаття присвячена питанню використання міжпредметних зв'язків для покращення якості освіти. Проаналізовано*

навчальні програми та наведено приклад впровадження завдань, побудованих на зв'язках між предметами.

Ключові слова:_*міжпредметні зв'язки, заклад загальної середньої освіти, алгебра, функція, географія, фізика, інтегровані завдання.*

Література

[1] - Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. Гімназія, 2016. 256 с. : іл.

[2] - Енциклопедія освіти / АПН України ; голов. ред. В. Г. Кремень. – К. : Юрінком Інтер, 2008. – 1040 с.

[3] - Навчальні програми для 5-9 класів. Режим доступу: https://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html

[4] - Фізика : підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Д. Сиротюк. – Київ : Генеза, 2015. – 240 с. : іл.

[5] - Якобчук Н. М. Інтеграція математичних знань. Інтеграція знань з предметів природничо-математичного циклу: проблеми та шляхи їх вирішення (збірник матеріалів інтернет-семінару). Черкаси, 2012, 88с.

Панченко К. О. (студ., 1 курс)

Науковий керівник – ст. викл. Михайленко І. В.

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

(Харків, Україна)

ВИКОРИСТАННЯ ІТ-ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Статистичні методи використовуються в різних галузях науки, зокрема економіці, медицині, моделюванні, психології, педагогіці та ін. На основі методів математичної статистики можна вирішувати багато аналітичних задач в галузі економіки. Зокрема, кількісні характеристики, одержані в результаті математико - статистичного аналізу, дозволяють мати більш глибоке уявлення про характер причинно-наслідкових зв'язків явищ, а також одержати стійкі надійні параметри для здійснення економічних розрахунків, особливо з метою прогнозування [1].

Оперативне, якісне і точне опрацювання великих масивів статистичних даних може бути виконане лише з використанням сучасних засобів обчислювальної техніки. За наявності потужних, надійних і разом з тим простих в експлуатації програмних продуктів статистичного аналізу дослідник звільняється від рутинних операцій, розширюється сфера застосування статистичних методів.

Програмне забезпечення статистичних досліджень досить розвинуте. На сучасному ринку програмних продуктів пропонуються різноманітні пакети програм для статистичного опрацювання даних [2, 3]. Всесвітньо відомі статистичні пакети для комплексного опрацювання даних: BMDP, SPSS, SAS, Systat, Minitab, S-Plus, Statgraphics Statistica та інші [4, 5].

Використання згаданих пакетів програм дає змогу автоматизувати процес статистичного дослідження в таких напрямах: створення файлів даних і таблиць; групування даних; графічний аналіз даних; розрахунок варіаційних характеристик вибіркових сукупностей; побудова рядів розподілу та ін.

На наш погляд, вивчати можливості і володіти навичками аналізу та опрацювання статистичних даних з використанням сучасного програмного забезпечення потрібно у ЗВО під час вивчення математичних і спеціальних дисциплін.

Для накопичення даних, проміжових перетворень, попередніх статистичних обчислень, побудови деяких видів діаграм зручно використовувати MS Excel.

Проте остаточний статистичний аналіз необхідно робити з використанням програм, які спеціально створені для цих цілей. Існують макроси-доповнення для MS Excel, до яких включаються додаткові статистичні функції, які в основних випадках є достатніми для звичайного застосування.

Вважаємо, що для досягнення результативності стосовно статистичного пакету, який використовується повинні задовольнятися певні вимоги: модульність; використання простої проблемно-орієнтованої мови для формулювання завдання користувача; автоматична організація процесу опрацювання даних та зв’язків з модулями пакета; ведення банку даних користувача і складання звіту про результати зробленого аналізу; сумісність з іншими програмами. Для реалізації цих вимог фахівці рекомендують використовувати мову програмування Python.

Python – це потужна мова програмування, якою легко оволодіти. В ній передбачено ефективні структури даних високого рівня та простий, але ефективний підхід до об’єктно-орієнтованого програмування [6, 7]. Наголошують на таких математичних можливостях використання мови програмування Python:

1)існує чотири вбудованих типи числових символів: булеві значення, цілі числа, числа з плаваючою точкою, комплексні числа;

2)підтримуються всі основні математичні операції і дії;

3)наявні математичні модулі: decimal, fractions, math, numbers, random та ін.;

4) наявні бібліотеки для складних обчислень та візуалізації даних: SymPy, Numeric, NumPy, Pandas, Matplotlib, Dislin та ін. [7].

Висновок: Використання ІКТ у навчальному процесі сприяє набуттю студентами навичок володіння інструментарієм опрацювання статистичних даних, дає можливість значного розширення та ускладнення набору навчальних завдань, активізує самостійну пізнавальну діяльність студентів.

Література

[1] - Кобильник Т.П. Використання web-сервісу wolfram|alpha для розв’язування задач з теорії ймовірностей. Information Technologies in Education. 2015. № 24. (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050910004370)

[2] - Борздова Т. В. Основы статистического анализа и обработка данных с применением Microsoft Excel (http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/93367/1/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82.%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7.pdf)

[3] - Вуколов Э.А. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL: учеб.пособ. 2-е изд., испр. и доп. М.: Форум, 2008. 464 с.(https://institutiones.com/download/books/1934-osnovy-statisticheskogo-analiza-vukolov.html)

[4] - Огляд програмних засобів статистичного аналізу даних (http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=5676)

[5] - Функції Excel (за категоріями) (https://support.office.com/uk-ua/article/%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%97-

excel-%D0%B7%D0%B0-%D0%BA%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%B3%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F%D0%BC%D0%B8-5f91f4e9-7b42-46d2-9bd1-63f26a86c0eb)

[6] - Основы вычислительной аналитики на Python. Спецкурс профессора Шибзухова З.М. URL:http://tidm.ru/osnovy-vychislitelnoy-analitiki-na-python.Анотація.

[7] - Лутц М. Изучаем Python, 4-е издание. Пер. с англ. СПб.: Символ-Плюс, 2011. 1280 с. https://studizba.com/files/show/pdf/39115-1-m-lutc--izuchaem-python-4-e-izdanie-.html

Плетенко А. В. (студ., 2 курс)
Науковий керівник – доц. Ємельянова Т. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет (Харків, Україна)

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ З ТЕМИ «ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ. КОРЕЛЯЦІЙНА ТЕОРІЯ ВИПАДКОГО ПРОЦЕСУ»

Одним з напрямів подолання труднощів формування та розвитку математичних компетентностей студентів перших курсів є інтеграція математичних знань і компетентностей майбутніх професій. Основу такого підходу становить використання в навчальному процесі, як на лекціях, так і на практичних заняттях, професійно-орієнтованих математичних задач.

Прикладом можливостей математичної підготовки у формуванні та розвитку математико-прикладної компетентності може служити використання професійно орієнтованих завдань у розділі «Випадкові процеси» курсу «Теорія ймовірностей і випадкові процеси».

Останнім часом поширення набули вібраційні методи інтенсифікації технологічних процесів. Вібраційне обладнання дозволяє легко автоматизувати процес обробки матеріалів, об’єднати кілька операцій обробки в одній. Вібраційні машини відрізняються високою надійністю, великим терміном служби, можливістю автоматизації та механізації виробничих процесів, забезпечують вирішення екологічних проблем. В даний час новим перспективним напрямом розвитку технічного діагностування є вібродіагностика, яка базується на основних положеннях вібродинаміки.

Вібраційні методи діагностування технічного стану машин широко використовуються в таких високотехнологічних галузях, як авіа- і суднобудування, транспортне машинобудування та інші. Вібраційні методи дослідження відомі як неруйнівні методи діагностики, що особливо важливо для проведення комплексу ремонтних, профілактичних, діагностичних і налагоджувальних робіт.

Але коли вібраційні процеси виникають випадково, вони завдають великої шкоди обладнанню. Випадкові процеси виникають в задачах на витривалість елементів машин, конструкцій, автомобілів, дорожніх машин, при вимірюванні їх параметрів і в багатьох інших випадках. Їх шкідливий вплив слід очікувати, вміти прогнозувати і зменшувати. Вивчення і розрахунок випадкових процесів, наприклад, вібрацій, вимагають досить твердих знань з області фундаментальних наук, в тому числі математичних.

Важко переоцінити ступінь складності математичного апарату, що дозволяє вирішувати багато технічних проблем, що виникають при обліку впливу на роботу машин і обладнання випадкових впливів.

Дисципліна «Теорія ймовірностей і випадкові процеси» вивчається майбутніми фахівцями, які навчаються за спеціальністю Автоматизація та приладобудування. Розділ «Випадкові процеси» цієї дисципліни дає широкий простір для введення в курс актуальних задач професійної спрямованості, які враховують технічні можливості та наукові досягнення в цій галузі. Завдання професійної спрямованості наповнюються теоретичною інформацією, яку вони можуть застосувати надалі.

У статті наведено деякі приклади професійно-прикладних задач за темою «Кореляційна теорія випадкових процесів» з банку професійно-орієнтованих задач.

Приклад 1. Вимірювання значень напруги в розподільних електричних мережах протягом доби показало випадковий характер змін напруги $X(t)$, які характеризуються кореляційної функцією $K_X(t_1,t_2)=\dfrac{1}{1+(t_1-t_2)^2}$.

Знайти кореляційну функцію, дисперсію і коефіцієнт кореляції випадкової зміни напруги $Y(t)=\dfrac{1}{1+t^2}X(t)+\cos 2t$.

Розв'язання.

Обчислюємо кореляційну функцію $K_Y(t_1,t_2)$ випадкового процесу $Y(t)$

$$K_Y(t_1,t_2)=\mathrm{M}[(\mathrm{Y}(\mathrm{t}_1)-\mathrm{M}_Y(\mathrm{t}_1))(\mathrm{Y}(\mathrm{t}_2)-\mathrm{M}_Y(\mathrm{t}_2))]=$$

$$=\left|\begin{aligned}&\mathrm{Y}(\mathrm{t}_1)-\mathrm{M}_Y(t_1)=\frac{1}{1+t_1^2}(X(t_1)-\mathrm{M}_X(\mathrm{t}_1))\\&\mathrm{Y}(\mathrm{t}_2)-\mathrm{M}_Y(t_2)=\frac{1}{1+t_2^2}(X(t_2)-\mathrm{M}_X(\mathrm{t}_2))\end{aligned}\right|=$$

$$=M[\frac{1}{1+t_1^2}\left\{X(t_1)-\mathrm{M}_X(\mathrm{t}_1)\right\}\cdot\frac{1}{1+t_2^2}\left\{X(t_2)-\mathrm{M}_X(\mathrm{t}_2)\right\}]=$$

$$=\frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}M[\left\{X(t_1)-\mathrm{M}_X(\mathrm{t}_1)\right\}\cdot\left\{X(t_2)-\mathrm{M}_X(\mathrm{t}_2)\right\}]=$$

$$=\frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}K_X(t_1,t_2),$$

де
$$K_X(t_1,t_2)=\frac{1}{1+(t_1-t_2)^2}.$$

Після підстановки $K_X(t_1,t_2)$ в формулу для кореляційної функції $K_Y(t_1,t_2)$ отримуємо

$$K_Y(t_1,t_2)=\frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}\cdot\frac{1}{1+(\mathrm{t}_1-t_2)^2}.$$

Дисперсія $\mathrm{D}_Y(t)$ випадкового процесу

$$D_Y(t) \equiv K_Y(t,t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

Знаючи кореляційну функцію $K_Y(t_1,t_2)$ і дисперсію $\mathrm{D}_Y(t)$, обчислюємо коефіцієнт кореляції $r_Y(t_1,t_2)$ випадкового процесу

$$Y(t) = \frac{1}{1+t^2} X(t) + \cos 2t$$

$$r_Y(t_1,t_2) = \frac{K_Y(t_1.t_2)}{\sqrt{D(t_1)}\sqrt{D(t_2)}} = \frac{\dfrac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)} \cdot \dfrac{1}{1+(\mathrm{t}_1 - t_2)^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{(1+t_1{}^2)^2}}\sqrt{\dfrac{1}{(1+t_2{}^2)^2}}} = \frac{1}{1+(\mathrm{t}_1 - t_2)^2}.$$

Приклад 2. При русі вантажного автотранспорту вібрації опор моста в напрямку, перпендикулярному їх перетину, характеризуються випадковою функцією $\mathrm{Z(t)} = \mathrm{X}\sin(\mathrm{Y}t)$, де X і Y незалежні випадкові величини, математичне сподівання і дисперсія X дорівнює $\mathrm{M[X]} = m_X$, $\mathrm{D[X]} = \sigma_X^2$, випадкова величина Y рівномірно розподілена на відрізку [0, a] з постійною щільністю ймовірностей $\mathrm{f}_Y(\mathrm{y}) = \dfrac{1}{a}$. Знайти математичне сподівання, дисперсію і кореляційну функцію випадкового процесу $\mathrm{Z}(t)$. Як змінюється математичне сподівання випадкової функції $\mathrm{Z(t)} = \mathrm{X}\sin(\mathrm{Y}t)$ в залежності від параметру a?

Розв'язання.

Математичне сподівання $\mathrm{m}_Z(\mathrm{t})$ випадкового процесу $\mathrm{Z(t)} = \mathrm{X}\sin(\mathrm{Y}t)$

$$\mathrm{m}_Z(\mathrm{t}) = \mathrm{M}\left[\mathrm{Z}(t)\right] = \mathrm{M}\left[\mathrm{X}\sin(\mathrm{Y}t)\right] = M[X] \cdot M[\sin(Yt)] = \left|M[X] = m_x\right| =$$

$$= m_x \cdot \frac{1}{a}\int_0^a sinytdy = m_x \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{-\mathrm{cosy}t}{t}\Bigg|_0^a = m_x \cdot \frac{1-\mathrm{cosat}}{at}.$$

Кореляційну функцію $K_Z(t_1,t_2)$ обчислюємо за формулою

$$K_Z(t_1,t_2) = M\left[\mathrm{Z}(t_1)\,\mathrm{Z}(t_2)\right] - m_Z(t_1)m_Z(t_2)\,,$$

де

$$M\left[\mathrm{Z}(t_1)\,\mathrm{Z}(t_2)\right] = M\left[\mathrm{X}\sin(\mathrm{Y}\,t_1)\cdot\mathrm{X}\sin(\mathrm{Y}\,t_2)\right] =$$
$$= M\left[\mathrm{X}^2\right]\mathrm{M}[\sin(\mathrm{Y}\,t_1)\cdot\sin(\mathrm{Y}\,t_2)] =$$
$$= \left|M[X^2] = \sigma_x^2 + m_x^2\right| = (\sigma_x^2 + m_x^2)\cdot\frac{1}{a}\int_0^a \sin(\mathrm{y}\,t_1)\cdot\sin(\mathrm{y}\,t_2)dy =$$

$$= (\sigma_x^2 + m_x^2)\cdot\frac{1}{2a}\int_0^a\left\{\cos\left[\mathrm{y}(t_1 - t_2)\right] - c\,\mathrm{os}\left[\mathrm{y}(t_1 + t_2)\right]\right\}dy =$$

$$= (\sigma_x^2 + m_x^2)\cdot\frac{1}{2a}\cdot\left(\left.\frac{\sin\mathrm{y}(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2}\right|_0^a - \left.\frac{\sin\mathrm{y}(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2}\right|_0^a\right) =$$

$$= (\sigma_x^2 + m_x^2)\cdot\frac{1}{2a}\cdot\left[\frac{\sin\mathrm{a}(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{\sin\mathrm{a}(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2}\right],$$

$$\mathrm{m}_Z(\mathrm{t}_1)\,\mathrm{m}_Z(\mathrm{t}_2) = \mathrm{m}_x^2\,\frac{1-\mathrm{cosat}_1}{at_1}\,\frac{1-\mathrm{cosat}_2}{at_2}\,.$$

$$K_Z(t_1,t_2) = (\sigma_x^2 + m_x^2)\cdot\frac{1}{2a}\cdot\left[\frac{\sin\mathrm{a}(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{\sin\mathrm{a}(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2}\right] -$$
$$- m_x^2\left(\frac{1-\cos at_1}{at_1}\cdot\frac{1-\cos at_2}{at_2}\right).$$

Дисперсія $D_Z(t)$ дорівнює кореляційній функції $K_Z(t_1,t_2)$ при $t_1 = t_2 = t$.

$$D_Z(t) = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + m_x^2)\left[1 - \frac{\sin 2\mathrm{a}\,t}{2at}\right] - m_x^2\left(\frac{1-\cos at}{at}\right)^2$$

Математичне сподівання випадкового процесу $\mathrm{m}_Z(\mathrm{t})$ дорівнює

$$m_Z(t) = m_x \cdot \frac{1-\cos at}{at}$$

Математичне сподівання $m_Z(t)$ є середнє значення випадкової функції $Z(t) = X\sin(Yt)$п, де X – випадкова амплітуда коливання $\sin(Yt)$ з випадковою частотою Y. Математичне сподівання функції Z(t) є добутком математичного сподівання амплітуди X і випадкового процесу $\sin(Yt)$ із випадковою частотою рівномірно розподіленою в інтервалі [0, a]. Математичне сподівання випадкового процесу $\sin(Yt)$, середнє по частоті Y, визначає поведінку $m_Z(t) \equiv m_Z(at)$ в залежності від параметра a, як граничній частоти вібрацій опор моста.

Розглянемо більш детально поведінку математичного сподівання випадкового процесу $\sin(Yt)$

$$M[\sin(Yt)] = \frac{1-\cos at}{at}.$$

Гранична частота a (параметр a) значно впливає на амплітуду коливань математичного сподівання випадкового процесу. На рис. 1 приведено графік залежності $M[\sin(Yt)]$ від значень параметру a.

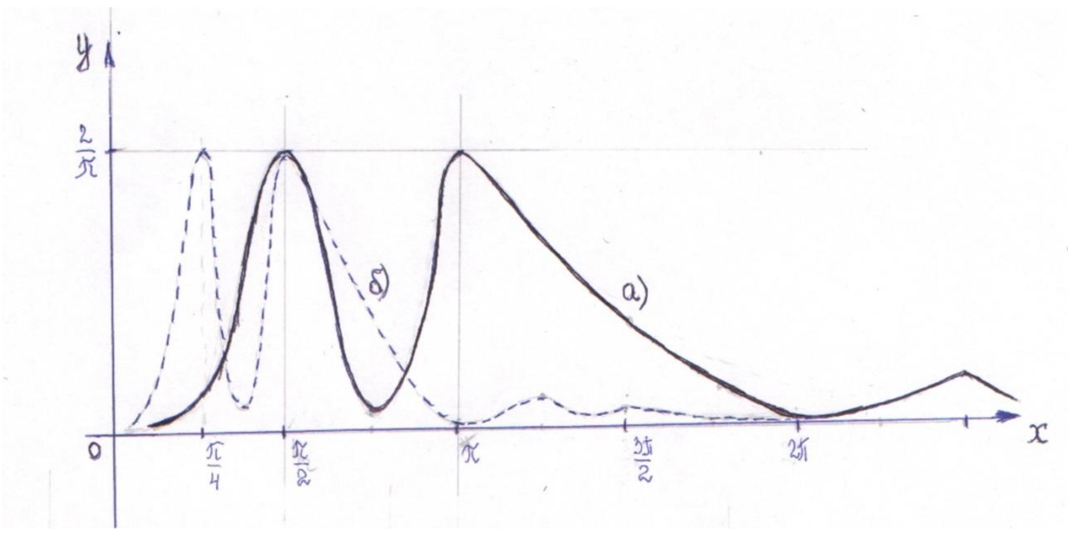


Рис. 1. Графік функції математичного сподівання процесу $M[\sin(Yt)]$. Крива а) визначає поведінку функції з параметром a=1, крива б) – з параметром a=2.

З рис. 1 видно, що інтервал значних коливань математичного сподівання істотно залежить від граничної частоти а. З збільшенням частоти інтервал зменшується обернено пропорціональне параметру а.

Література

[1] - Власова Е. А., Меженная Н. М., Попов В. С. Методические аспекты обеспечения дисциплины «Теория случайных процессов» в техническом университете // Интернет-журнал «Мир науки», 2018. - №1.

[2] -Випадкові процеси. [Текст], навчальний посібник / І.В. Новицький, С.А. Ус. – Д.: Національний гірничий університет, 2011. – 125 с.

[3] -3. Жильцов О. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Б. Жильцов ; за ред. Г. О. Михаліна. – К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. – 336 с.

[4] - Зайцев Е. П. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с индивидуальными заданиями и решениями типових вариантов: учебно-методическое пособие /Е. П. Зайцев. – Кременчуг: Кременчуг,2008. – 484 с.

[5] - Крупин В. Г. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы. Сборник задач с решениями: учебное пособие / В. Г. Крупин, А. Л. Павлов, Л. Г. Попов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2013. – 368 с.

[6] - Тактаров Н. Г. Теория вероятностей и математическая статистика: Краткий курс с примерами и решениями. – М.: Комкнига, 2010. – 240 с.

Полякова А. В. (студ., 1 курс))
Науковий керівник - ст. викл. Михайленко І. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

РІЗНОВИДИ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЮ ЗАСВОЄННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ У ПРАКТИЦІ КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Тестування якості математичних знань студентів є важливою складовою опанування курсу вищої математики в університеті.

На думку педагогів для організації тестового контролю є: врахування класичної та сучасної тестової теорії, комплексна перевірка всієї навчальної діяльності студента. Як зазначає В.Аванесов, «навчання має починатися з вхідного тестового контролю, супроводжуватися самоконтролем і закінчуватися підсумковим тестуванням» [1, с.6]. Усі ці різновиди перевірки знань упроваджено в практику викладання математичних дисциплін студентам ХНАДУ.

Для перевірки знань студентів механічного факультету було використано багато різновидів тестів. Усі їх можна розбити на декілька груп [2].

1 група – тести з обираними відповідями:

- **Тести упізнання.** Це завдання, що вимагають альтернативної відповіді: «згодний» або «не згодний», «так» або «ні» і т.д.
- **Тести розрізнення.** Містять варіанти відповідей, з яких треба вибрати один або декілька.
- **Тести співвіднесення.** У них пропонується знайти спільне або відмінне в об’єктах, співвідносячи їх за властивостями, параметрами, класами і т.д.

Тестові завдання можуть бути представлені у різних формах – словесній, графічній, табличній, символічній і т.д.

Зазначені тести розраховані, в першу чергу, на розуміння матеріалу. Наведемо фрагменти тестових завдань 1 групи (рис. 1, рис. 2)

Звичайні диференціальні рівняння
Тестове завдання

У завданнях **1 — 3** виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. До якого типу належить рівняння $x^2y' + x^2y = x+1$?

а	б	в	г
лінійне	Бернуллі	однорідне	з відокремлюваними змінними

2. Умова того, що рівняння $Pdx + Qdy = 0$ є рівнянням в повних диференціалах :

а	б	в	г
$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$	$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$	$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$

3. Скільки невизначених констант містить загальний розв’язок рівняння $y^{(6)} - y' = 2x$?

а	б	в	г
п’ять	шість	жодної	чотири

Рис.1. Фрагмент тестового завдання з обиранням однієї відповіді

Звичайні диференціальні рівняння
Тестове завдання

У завданні **4** до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (літери).

4. Для даних диференціальних рівнянь першого порядку (1– 4) встановити їх тип (А – Д).

Рівняння	Тип
1. $y' = y \cdot \mathrm{tg}x - y^2 \cos x$	**А** однорідне рівняння
2. $y' = \dfrac{\mathrm{arctg}\, x - y}{1 + x^2}$	**Б** рівняння Бернуллі
3. $(y^2 + x)dx + 2xydy = 0$	**В** рівняння з відокремлюваними змінними
4. $y' = \dfrac{1 - e^{y^2}}{2y}$	**Г** лінійне рівняння
	Д рівняння у повних диференціалах

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Рис 2. Фрагмент тестів на встановлення відповідності

2 група тестів не містить еталонів (варіантів відповідей).

- **Тести-підстановки.** У таких завданнях, що представляються у різноманітних формах, пропущені деякі складові – слова, елементи схем, графіків і т.д. Студент повинний заповнити пропуски.
- **Тести-задачі.** Ці тести пропонують надання розгорнутої відповіді стосовно розв’язання задачі.

Наведемо фрагменти тестових завдань 2 групи (рис.3)

Звичайні диференціальні рівняння
Тестове завдання

Розв'язання задачі 5 повинно мати *обґрунтування*. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

5. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - 5y \end{cases} ; \quad x(0) = 3,\, y(0) = -4 .$$

Рис. 3 Фрагмент тесту-задачі

Вважаємо, що впровадження розглянутих різновидів тестового контролю у всі теми курсу вищої математики дає можливість комплексного контролю засвоєння знань студентами не тільки з боку викладачів, але є ефективним засобом своєчасного самоконтролю.

Висновок. Тестування якості засвоєння математичних знань студентами є важливою складовою процесу викладання курсу вищої математики в університеті.

Література

[1] - Аванесов В. С. Современные методы обучения и тестового контроля знаний. Владивосток, 1999. 125 с.

[2] - Ільїна О. І Використання електронного тестування для контролю якості знань студентів [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://drive.google.com/file/d/

[3] - Милютина І. М. Тестування як ефективний метод перевірки професійної компетентності студентів. / І. М. Милютина. [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://ru.osvita.ua.

УДК 371.321.3

Потапова Т. В. (студ., 3 курс)
Науковий керівник - доц. Яловега І. Г.
Харківський національний педагогічний університет імені Г.С. Сковороди (Харків, Україна)

МІКРОНАВЧАННЯ (MICROLEARNING): ОСНОВНІ ПІДХОДИ

Одним із стратегічних напрямів в «Національної стратегії розвитку освіти в Україні на період до 2021 року» зазначений «розвиток наукової та інноваційної діяльності в освіті, підвищення якості освіти на інноваційній основі». Інноваційна педагогічна діяльність стає обов'язковою умовою ефективної роботи та конкурентоспроможності освітніх закладів [3].

Актуальність дослідження. Модернізація навчального процесу на основі впровадження досліджень психолого-педагогічної науки та інформаційно-комунікаційних технологій в першу чергу орієнтується на потреби учня. Серед важливих задач шкільної математичної освіти є розробка та провадження нових навчальних комплексів та доповнення існуючих інноваційними розробками. Однією з особливостей останніх років стало збільшення споживання інформації невеликими порціями, звідусіль чується так зване «кліпове мислення», яке притаманне молодому поколінню. І це призводить до того, що фокус з традиційних форм навчання зміщується на мікронавчання, особливістю якого є надання навчального матеріалу невеликими частинами.

Мікронавчання (англ. microlearning) – є одним з найголовніших трендів електронного навчання (англ. e-learning) за останні два роки. Використання коротких анімацій та відео-файлів, що доповнюють основний навчальний матеріал, значно спрощує та осучаснює процес навчання, зацікавлює учнів і часто доступніше доносить суть нових понять, ніж застосування вже звичних цифрових презентацій. Аналіз існуючих підходів та визначення можливостей мікронавчання в навчальному процесі стало **проблемою дослідження** роботи.

Мікронавчання є достатньо новим поняттям, але кількість досліджень щодо можливостей його застосувань та визначення складових стрімко збільшується. Нажаль, більшість наукових праць – це дослідження зарубіжних вчених та педагогів-практиків, вітчизняні науковці тільки починають звертати увагу на цей важливий напрям інновацій в освіті. Визначення стратегії мікронавчання хвилює багатьох практиків. Експериментуючи зі сценаріями, тривалістю відеороликів, напрямом навчання, визначають основні вимоги до створення ефективних курсів мікронавчання.

Мікронавчання – це стратегія навчання, яка доносить зміст матеріалу з використанням серії коротких, сфокусованих навчальних матеріалів і коротких завдань, які складають міні-курс. Мікронавчання орієнтоване і пропонує саме той обсяг інформації, який необхідний для того, щоб допомогти учневі досягти конкретної, дієвої мети. Це робить мікронавчання для школярів особливо цінним та ідеальним навчальним підходом для багатьох ситуацій завдяки тому, що інформація швидко змінюється, ресурси є вільно доступні онлайн і нові технології підтримують це. Хоча концепція мікронавчання існувала протягом тривалого часу, термін «мікронавчання» не використовувався півтора десятиріччя, і дослідження, які підтримують інтегровану технологію для створення середовищ мікроначання, все ще мають багато невирішених питань. Єдиного означення терміну мікронавчання досі немає, як і в більшості термінів, пов'язаних з електронним навчанням. Але мікронавчання завжди характеризується коротким проміжком часу, обмеженою кількістю навчального матеріалу, використанням відео або анімаційних візуалізацій та доступністю до перегляду у будь-який час [1]. Мікронавчання щільно пов'язано з наступними поняттями та концепціями:

– **Мікрозміст**. Мікронавчання та мікрозміст разом визначають, як саме доставити деяку кількість знань та інформації, що є структурованими в декілька коротких розділів, глав, що чітко визначені та взаємопов'язані.

– **Соціальне програмне забезпечення**. Мікронавчання може підтримуватися соціальним програмним забезпеченням, оскільки воно, з одного боку, забезпечує доставку матеріалу у коротких та гнучких форматах, з іншого боку – це соціальна взаємодія на основі цього матеріалу.

– **Неформальне навчання**. Оскільки мікронавчання не потребує багато уваги в учнів та щоденних занять, воно може бути корисним для навчання за певною необхідністю, забезпечуючи зв'язок між формальною та неформальною освітою [2].

Розробка елементів мікронавчання є дуже складною задачею – це і визначення його доцільності саме для обраного навчального матеріалу, виокремлення змісту, створення сценарію, вибір формату та багато інших важливих складових процесу. Основними трьома складовими для створення ефективного середовища мікронавчання є зміст, педагогіка і технології. Першою складовою в створенні середовища мікронавчання є зміст. У навчальній програмі необхідно визначити області, в яких інтеграція технологій підходить для підрозділів і видів діяльності, пов'язаних з мікронавчанням. Після визначення змісту важливо подумати про педагогічної моделі, які доцільно використовувати, і про дизайн середовища для мікронавчання. Пітер Баумгартнер у 2013 році висловив теорію, що лежить в основі мікронавчання, і запропонував модель спіралі компетенцій для підтримки навчання учнів та студентів, яку розбив на чотири етапи: «Навчання I», «Навчання II», «Навчання III», «Навчання I+». Ще один важливий елемент, який треба враховувати при використанні техніки мікронавчання, – це характеристики, котрі необхідні для проектування і створення ефективних середовищ мікронавчання на цифровому підґрунті. По-перше, навчання в невеликих підрозділах, навчальний контент створюється в цифровому форматі (наприклад, короткі відеоролики, анімація), кожен короткий сегмент контенту має займати в учня близько 2-4 хвилини. По-друге, довжина сегменту. Загальний час, необхідний для завершення всього сегмента контенту в середовищі мікронавчання, повинен займати не більше ніж 15-20 хвилин, щоб учні мали змогу завершити навчання за один раз. По-третє, єдиний результат навчання. І врешті решт, третьою складовою в створенні середовища мікронавчання є технології. Під час мікронавчання важливо визначити найліпшу технологію проектування. Серед найбільш поширених інструментів мікронавчання на сьогодні виділяються Coursmos, Grovo, Panopto [1].

Ґрунтуючись на вищенаведених фактах та аргументах, мікронавчання можна охарактеризувати як прагматичне нововведення, яке погоджується із сучасними інформаційними й комунікаційними моделями і може бути легко адаптоване для задоволення індивідуальних потреб у навчанні. Використання мікронавчання відкриває багато можливостей не тільки щоб привернути увагу до ключових повідомлень, але й для створення сприятливого середовища для навчання, орієнтованого на покращення знань учнів.

Анотація. *У статті розглянуто можливості мікронавчання та основні підходи до нього, систематизовано основні складові для створення ефективного середовища мікронавчання.*

Ключові слова: *мікронавчання, електронне навчання, іноваційна педагогічна діяльність.*

Література

[1] - Microlearning: A Pedagogical Approach For Technology Integration. [Електронний ресурс] / Alqurashi E. – 2017. – Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/319715909_Microlearning_A_Pedagogical_Approach_For_Technology_Integration.

[2] - Microlearning an evolving e-learning trend. [Електронний ресурс] / Giurgiu L. – 2017. – Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/318657319_Microlearning_an_Evolving_Elearning_Trend.

[3] - Про національну стратегію розвитку освіти в Україні на період до 2021 року. [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/344/2013

УДК 517.93:519.876.

Приходько О. П. (магістрант)
Науковий керівник – доц. Гриб'юк О. О.
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова (Київ, Україна)

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ПРОЦЕСІ ДОСЛІДНИЦЬКОГО НАВЧАННЯ УЧНІВ МАТЕМАТИКИ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ: ДИДАКТИЧНІ АСПЕКТИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ

Комп'ютерне моделювання як метод пізнання. Усеможливі зв'язки комп'ютерного моделювання з іншими методами пізнання продемонстровано в експериментальному дослідженні [1]. Висновки враховуються з метою покращення методики експериментального вивчення об'єкта дослідження, розвитку математичної моделі та удосконалення комп'ютерної моделі. Дослідження соціальних і економічних процесів вирізняються неможливістю повністю використання експериментальних методів.

Комп'ютерне моделювання – метод представлення об'єкта, що відрізняється від реального, але дуже наближений до реальної дійсності, з використанням якого вивчаються фізико-хімічні, біологічні, хімічні закони та експерименти *(які неможливо провести в реальному житті).*

Під *комп'ютерним моделюванням* в широкому смислі розуміється процес створення і дослідження моделей з використанням комп'ютера.

Виокремлюються наступні *види моделювання:* фізичне моделювання; динамічне моделювання; імітаційне моделювання; статистичне моделювання; інформаційне моделювання; моделювання знань [2].

Із врахуванням мети моделювання, *комп'ютерні моделі розподіляються на групи* [3]*:*

− *Оптимізаційні моделі* (із використанням яких з'являється можливість дібрати оптимальний спосіб управління технічною, соціальною та іншою системами; наприклад, космічною станцією);

− *Прогностичні моделі* (із використанням яких можливе прогнозування стану об'єкта в наступні моменти часу; наприклад, модель земної атмосфери для прогнозування погоди);

− *Навчальні моделі* (використовуються для навчання, тренування і тестування учнів, студентів, майбутніх фахівців і т.д.);

− *Ігрові моделі* (із використанням яких можливе створення ігрової ситуації, яка імітує управління армією, державою, підприємством, людиною, ракетою і т.д., або гру в шахи, шашки та інші логічні ігри);

− *Дескриптивні моделі* (використовуються для розуміння природи досліджуваного об'єкта, виокремлення суттєвих факторів, які впливають на його поведінку).

Переваги використання комп'ютерного моделювання: вільнопоширюване і доступне у використанні; можливе проектування і створення об'єктів, які в реальних умовах неможливі (не існують); можливе прогнозування результатів експериментів; знаходження оптимальної форми і конструкції без створення пробних деталей; експериментування без ризику для здоров'я людини та навколишнього середовища; можливість огляду об'єкта з різної перспективи.

Недоліки використання комп'ютерного моделювання: помилкове твердження про те, що в використанням моделювання можна якісно виявити нові явища, оскільки потрібне підтвердження в реальних умовах і в реальних експериментах. Модельний аналіз зменшує можливі пояснення. З об'єкта моделювання можна «здобути» лише те, що входить за рамки моделі.

Методична система дослідницького навчання математики є комп'ютерно орієнтованою системою, використання якої сприяє формуванню прийомів дослідницької діяльності в процесі навчання математики [4].

Успішне використання пропонованої системи залежить від уміння вчителя здійснювати проектування моделі навчання із дотриманням необхідних умов [5]:

− Рівня математичної культури вчителя математики;

− Вільного володіння теоретичними та практичними основами процесу формування прийомів дослідницької діяльності учнів, практичними основами проектування комп'ютерно орієнтованого навчання математики, вміння організовувати та управляти дослідницькою діяльністю школярів;

− Уміння мотивувати учня та зацікавити його дослідницькою діяльністю;

− Уміння надавати своєчасну індивідуальну допомогу учням;

− Уміння долучати школярів до творчої діяльності, пов'язаної з розширенням можливостей виконання дослідницької діяльності, в тому числі з використанням системи дослідницьких і творчих задач та різноманітних комп'ютерно орієнтованих засобів навчання;

− Допомагати учням самостійно здійснювати рефлексію, визначати та усвідомлювати отримані особисто результати дослідницької діяльності.

З використанням систем динамічної математики забезпечується необхідна *«інтерактивність»* роботи з рисунком і можливість його дослідження в динаміці, причому з'являється можливість:

− Автоматизовувати процес побудови, розширюючи набір базових геометричних інструментів, попередньо визначивши вихідні об'єкти та алгоритм побудови;

− Виконувати побудови, аналогічні класичним побудовам за допомогою циркуля та лінійки *(будувати відрізки; промені; прямі за двома точками; будувати точки, що належать фігурам; знаходити точки перетину фігур; будувати образ точки при центральній та осьовій симетрії, середину відрізка; вимірювати відстані і кути; проводити паралельні і перпендикулярні прямі, бісектриси; коло за даним радіусом; коло за центром і точки на ньому);*

− Задавати точки і фігури аналітично *(за допомогою координат і рівнянь);*

– Здійснювати оформлення рисунків, змінюючи при цьому властивості відображення точок і фігур *(товщину ліній, стиль, колір, спосіб нанесення, відображати необхідні частини рисунка);*

– Вимірювати відповідні параметри побудови *(координати, довжини, кути, площі)* шляхом *(а) безпосереднього вимірювання (позначення крапок для виміру та підготовка відповідних підписів), (б) з використанням вбудованого геометричного калькулятора, (в) додавання напису з динамічними виразами;*

– Вимірювати параметри побудови, причому значення миттєво обновляються залежно від відповідних змін базових параметрів; *з'являються можливості для виконання досліджень, пошуку закономірностей і формування гіпотез;*

– Використовувати необхідні елементи аналітичної геометрії *(систему координат, графіки функцій, рівняння прямих і кіл, алгебраїчні залежності між частинами побудови тощо);*

– Будувати *геометричні місця точок, будувати слід точки при відповідному переміщенні, будувати сліди прямої на комплексному кресленні та ін.;*

– Переглядати алгоритми побудови за необхідними кроками;

– Здійснювати експорт рисунків в графічні формати для підготовки геометричних ілюстрацій та використання в інших додатках.

Крім традиційних, використовуються також різноманітні форми навчання (розрахункові графічні роботи, творчі тижні, учнівські дослідження, індивідуальні, групові, фронтальні форми тощо) [4].

У поєднанні з традиційними формами організації контролю та корекції результатів навчання, пропонується різнорівневий контроль знань учнів з метою виявлення рівнів досягнення сформованості прийомів дослідницької діяльності та методична підтримка корекції результатів навчання [4] з використанням окремих дослідницько-дидактичних конструктів комп'ютерно орієнтованої системи [6].

Результати дослідження свідчать про можливе та доцільне використання таких програм у поєднанні з традиційними методами навчання, причому отримуємо можливість ефективно використовувати час без перевантаження учнів [3].

Анотація. *Розглядаються дидактичні аспекти та перспективи використання комп'ютерного моделювання в процесі дослідницького навчання учнів математики в закладах загальної середньої освіти, в тому числі з педагогічно виваженим та методично вмотивованим використанням інформаційно-комунікаційних технологій.*

Ключові слова: *комп'ютерне моделювання, варіативна модель, комп'ютерно орієнтована методична система дослідницького навчання, дидактика.*

Література

[1] - Hrybiuk O. Improvement of the Educational Process by the Creation of Centers for Intellectual Development and Scientific and Technical Creativity. In: Hamrol A., Kujawińska A., Barraza M. (eds) Advances in Manufacturing II. MANUFACTURING 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2019.: 370-382. Springer, Cham Online.

[2] - Hrybiuk O. Mathematical modeling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry // Proceedings of the First International conference on Eurasian scientific development. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH. Vienna. 2014. P. 46-53.

[3] - Гриб'юк О. О. Математичне моделювання при навчанні дисциплін математичного та хіміко-біологічного циклів: навчально-методичний посібник для учителів / О. О. Гриб'юк. – Рівне: РДГУ, 2010. – 207 с.

[4] - Гриб'юк О. О. Дослідницьке навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з використанням комп'ютерно орієнтованих методичних систем / О. О. Гриб'юк. Монографія. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019. – 858 с.: іл.

[5] - Гриб'юк О.О. Перспективи впровадження варіативних моделей комп'ютерно орієнтованого середовища навчання предметів природничо-математичного циклу у загальноосвітніх навчальних закладах України / Гриб'юк О. О. // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна / [редкол.: П.С. Атаманчук (голова, наук. ред.) та ін.] – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. – Випуск 22: Дидактичні механізми дієвого формування компетентнісних якостей майбутніх фахівців фізико-технологічних спеціальностей. – С. 184-190.

[6] - Hrybiuk O. Problems of expert evaluation in terms of the use of variative models of a computer-oriented learning environment of mathematical and natural science disciplines in schools, [w:] Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Seria: Organizacja i Zarządzanie, Zeszyt Nr 79, Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej (WPP), 2019.: 101-119. ISSN 0239-9415.

УДК 371.2

Методист Пухальская М. Ф.
Национальный институт образования (Минск, Республика Беларусь)

НОВЫЕ ПОДХОДЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ ДИСЦИПЛИН (В ОБЛАСТИ ГЕОГРАФИИ И БИОЛОГИИ)

Естественнонаучные дисциплины: ботаника, зоология, биология, география, землеведение – это не только система обширных знаний и умений, но и богатый арсенал для развития и воспитания личности самого исследователя.

Так, в процессе изучения географии происходит ознакомление с различными народами, их культурой, бытом, традициями, верованиями, где уже в некоторой степени исследователь знакомится с теми или иными религиозными системами и их воззрениями, стилем поведения, нормами морали и нравственности других стран и народов. Эти факты открыто свидетельствуют о присутствии *культурологического подхода.* Изучая другие страны человек в той или иной степени знакомиться со стереотипами и образцами поведения разных культур, учится толерантности и уважительному отношению. Например, всем известно, что у немцев высокая организация труда и производительности, у них можно научиться трудолюбию и эффективности труда без меньших затрат. Изучение культуры жизнерадостных итальянцев, может способствовать формированию оптимизма. У восточных народов можно позаимствовать глубокие традиции почитания и уважения старших и пр.

Системный подход является основой почти любого исследования. Изучение любой области научного знания в системе способствует целостности и завершённости исследования. Грамотное целеполагание способствует структуризации и классификации (например, зоология и ботаника).

Общечеловеческие ценности такие как: жизнь, здоровье, человек, природа, мир и пр. пронизывают содержание естественнонаучных дисциплин, преломляясь через призму предмета исследования каждой естественнонаучной дисциплины. Что говорит о присутствии *аксиологического подхода*.

Ценность «жизнь» и все ее производные по-разному трактуется в географии и биологии. Геграфия и землеведение изучают социогенные и природные факторы, способствующие благополучию человека. Ботаника, биология, зоология изучает происхождение и разнообразие жизни (живой природы и человека). Ценность «здоровье» не ограничивается биологическими сведениями о полезности и вреде употребляемой пищи, а косвенно присутствует в содержании природных катаклизм, климатических неестественных изменений и сведениях о негативном влиянии научно-технического прогресса на окружающую действительность. Ценность «человек» составляет основу географических и общебиологических исследований. Такие ценности как «природа» и «мир» также являются весомыми в содержании изучаемых и исследуемых дисциплин.

Таким образом, можно сделать вывод, что вышеперечисленные общечеловеческие ценности являются базисом естественнонаучных дисциплин.

Такая постановка вопроса позволяет нам утверждать, что новым подходом при изучении естественнонаучных дисциплин, будет *антропологический христианско-этический подход* общечеловеческого характера (М.Ф. Пухальская) (на осн. мат. [1]).

Данный подход был теоретически обоснован и сформулирован нами в процессе историко-педагогических исследований (на осн. мат. [1]). Однако, по своей сути, это подход актуализации христианских ценностей, поэтому есть вероятность его применения и при естественнонаучных исследованиях.

С одной стороны, методология изучаемых дисциплин в учебных заведениях имеет светский характер и вроде бы далека от религиозных основ. Однако мы не рассматриваем влияние сформулированного нами подхода с точки зрения богословско-теологической и не вступаем в научные дискуссии о происхождении человека и его эволюционном развитии.

Ограничиваясь содержанием и значением обозначенных выше общечеловеческих ценностей и их вариабельностью в отношении конкретно-научных областей знания, мы прослеживаем логическую центрацию ценности «человек». В связи с чем, можно сделать заключение, что все исследования естественнонаучного плана по своей сути – антропологические.

Белорусский учёный М.А. Станчиц пишет: «…никакое мировоззрение не может считаться полным и законченным, если оно не включает в себя более или менее разработанной и логически оформленной системы этических понятий и принципов» [2, с. 21]. Этические христианские ценности как никакие другие провозглашают ценность человеческой жизни и бытия. Нравственные качества личности: трудолюбие, бережливость, сострадание, милосердие, альтруизм, терпеливость и ответственность, наиболее ярко отражаются в христианстве (на осн. мат. ист. [3]). Изучение этических норм и правил поведения в обществе, семье и в отношениях не только расширяет кругозор человека, но и способствуют формированию сострадания, а может и милосердия к странам с более низким экономическим уровнем развития и с более высоким уровнем бедности и пр..

С целью выявления антрополого-центрической этической значимости проводимых естественнонаучных исследований, мы определили и сформулировали основные принципы реализации разработанного нами подхода при изучении естественнонаучных дисциплин.

1.Базовым принципом реализации антропологического христианско-этического подхода при изучении географии мы определили *принцип ценности национально-этнической культуры в контексте общенародного единства*.

Данная идея включает в себя приоритет общечеловеческого над национально-этническим. Человек как представитель разнообразных культур и этнических меньшинств, рассматривается как существо высшей организации, объединённое в расы и живущее в одном общем доме – планета Земля. Здесь можно проследить глубокую связь и где-то единство с культурологическим подходом.

2. В процессе исследований в области ботаники антропологический христианско-этический подход представлен нами принципом *бережного и заботливого отношения к любому проявлению жизни*. Этическая христианская концепция жизни наиболее убедительно призывает к ответственности и заботе человека о природе, которая его окружает (на осн. мат. ист. [3]).

3. При изучении зоологии мы определили реализацию антропологического христианско-этического подхода в *принципе экстраполяции свойств животных на свойства личности человека.* Закономерность отождествлять отдельные качества животных с негативными или положительными чертами человеческой личности больше проявляет себя в зоологии, нежели ботанике. Это связано со способностью животных более осуществлять определённый род деятельности. Например, трудолюбивый человек в притчах Соломона сравнивается с муравьём и пр.(на осн. мат. ист. [3]).

4. В общей биологии реализация антропологического христианско-этического подхода проявляется, прежде всего, в *принципе ценности продолжения жизни и человеческого рода.*

Таким образом, содержательный потенциал естественнонаучных дисциплин настолько богат, что позволяет сформулировать тезис о базисе общечеловеческих ценностей: жизнь, человек, добро, здоровье, природа и пр. как методологической основе. В связи с чем, реализуются методологические подходы междисциплинарного ракурса: системный, культурологический, аксиологический и антропологический христианско-этический (М.Ф. Пухальская).

Аннотация: *В статье рассмотрена реализация системного, культурологического, аксиологического и антропологического христианско-этического подходов при изучении естественнонаучных дисциплин. Акцент сделан на исследования в области географии и биологии.*

Литература

[1] - Пухальская М. Ф. Концептуальные подходы участия христианских ценностей в воспитании личности учащегося России и Беларуси начала XX-го века // Интеллектуальная культура Беларуси: истоки, традиции, методология исследования. Право и экономика. Минск, 2015. - С. 507-510.

[2] - Станчиц М. А. Этическое образование и воспитание в процессе нравственного развития школьника. Национальный институт образования. - Минск, 2001. - 216 с.

[3] – Библия. М., 1995. - 360 с

УДК 378.147.34

Пяткова Ю. А. (студ., 2 курс)
Научный руководитель – доц. Раецкая Е. В
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова (Воронеж, Россия)
.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial z^2(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x), \tag{1}$$

переменные определены на отрезках $x \in [0, X]$, $t \in [0, T]$.

Решается задача построения функции $f(t,x)$, обеспечивающей для $z(t,x)$ - решения уравнения (1) , выполнение в $k+1$ точках $t_i = \frac{iT}{k}$, ($i = \overline{0,k}$) отрезка $[0,T]$ условий:

$$z(t_i, x) = c_i(x), i = \overline{0,k}\,. \tag{2}$$

Алгоритм решения поставленной задачи (АРПЗ) состоит из двух этапов.

Аналогичный алгоритм использовался ранее в работах [1]-[10], при решении задач программного управления для различных динамических систем.

Первый этап включает построение, удовлетворяющей всем условиям (2), функции $z(t,x)$, которую предлагается искать в виде

$$z(t_i,x)=\sum_{i=0}^{k} t^i g_i(x), \tag{3}$$

с неизвестными функциями $g_i(x)$.

Первая функция в разложении (3) находится из условий (2) при $i=0$ $z(0,x)=c_0(x)=g_0(x)$, с учетом чего, формула (3) принимает вид

$$z(t_i,x)=c_0(x)+\sum_{i=1}^{k} t^i g_i(x). \tag{4}$$

Остальные неизвестные функции $g_i(x)$, ($i=\overline{1,k}$), находятся как решение системы k уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(x)\left(\frac{iT}{k}\right)^i = c_i(x)-c_0(x), \quad i=\overline{1,k}. \tag{5}$$

Определитель системы d, составленный из коэффициентов $\left(\frac{iT}{k}\right)^i$ системы (5) при функциях $g_i(x)$ не равен нулю ($d \neq 0$), так что получаем формулы для нахождения ранее неизвестных функций

$$g_i(x)=\frac{1}{d} w_i(x), \tag{6}$$

где $w_i(x)$ - определитель, полученный из определителя системы, с заменой элементов i-го столбца на столбец правых частей системы (5): $c_i(x)-c_0(x)$

Результатом реализации первого этапа АРПЗ является получение формулы для построения функции $z(t,x)$

$$z(t_i,x)=c_0(x)+\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{k} t^i w_i(x), \tag{7}$$

удовлетворяющей всем условиям (2).

Вторым этапом реализации АРПЗ является построение функции $f(t,x)$, которая, с учетом (1), находится по формуле

$$f(t,x)=\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial z^2(t,x)}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Подстановка функции $z(t,x)$ в формулу (8), приводит к искомому выражению

$$f(t,x)=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{k}(i\cdot t^{i-1} w_i(x)-t^i \frac{\partial^2 w_i(t,x)}{\partial x^2})-\frac{\partial^2 c_0(x)}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Литература

[1] - С. П.Зубова О полиномиальных решениях линейной системы управления / С. П.Зубова, Раецкая Е.В., Ле Хай Чунг // Автоматика и телемеханика, № 11, 2008. – С.41-47.

[2] - Raetskaya E. V. Invariance of a nonstationary observability system under certain perturbations/ Raetskaya E. V., Zubova S. P.// Journal of Mathematical Sciences. New York. – 2013. V.188, I.3, .218–226.

[3] - S. P. Zubova. Solution of the CaushyProblem for Two Descriptive Equations with Fredholm Operator / Zubova S. P., Raetskaya E. V.// Doklady Mathematics, 2014, Vol. 90, No. 3, pp. 528–532.

[4] - S. P. Zubova. A Study of the Rigidity of Descriptor Dynamical System in a Banach Space// Zubova S. P., Raetskaya E. V.// Journal of Mathematical Sciences, New York. – 2015. Vol. 208, I.1, P. 204-210.

УДК: 616-71

Резуненко К. І. (студ., 1 курс).
Наукові керівники - доц. Носова Т. В., доц. Жемчужкіна Т. В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(Харків, Україна)

РЕАБІЛІТАЦІЙНА СИСТЕМА ДЛЯ ЛЮДЕЙ З ОБМЕЖЕНИМИ МОЖЛИВОСТЯМИ

На даний час гостро стоїть проблема людей з обмеженими можливостями, які втратили функціональність кінцівок. Причини можуть носити характер зовнішнього пошкодження, внаслідок аварій, військових дій, хірургічних ампутацій через запущені стадії хвороб, опіків чи відморожень, а також можуть бути причини, засновані на вроджених патологіях [1].

Реабілітація в даний час сформувалася в самостійну науку, яка має конкретний субстрат дослідження - саногенетичні механізми в їх биосоціальній єдності.

Згідно з визначенням експертів Міжнародної організації праці, реабілітація - система державних, соціально-економічних, медичних, професійних, педагогічних і психологічних заходів, спрямованих на попередження розвитку патологічних процесів, що призводять до тимчасової або стійкої втрати працездатності, і на ефективне і раннє повернення хворих і інвалідів (дітей і дорослих) в суспільство, до суспільно корисного життя. У цьому визначенні на перше місце висуваються відновлення трудових функцій і навичок, можливість участі в суспільному житті і виробничої діяльності як засобу досягнення хворими та інвалідами економічної незалежності і самостійності, зниження витрат на їх утримання, тобто реабілітація переслідує не тільки суто економічні цілі, але, не меншою мірою, і соціальні [2].

Роль і значення медико-соціальної реабілітації для забезпечення соціальної безпеки вразливих категорій населення обумовлені наступними обставинами:

- Інтенсифікація темпів науково-технічного прогресу, що супроводжується диференціацією трудової і побутової діяльності, змінами в системі «людина-навколишнє середовище ».

- Зростаюча ціна втрат кваліфікованих кадрів і обмежень повсякденної активності громадян.

- Динаміка демографічної структури населення (збільшення питомої ваги осіб «третього віку»).

- Зміни соціально-гігієнічних показників неблагополуччя населення (зростання хронічних захворювань, інвалідності, смертності, соціальної девіантності).

- Трансформація навколишнього природного і соціального середовища, пред’являє високі вимоги до стану мобільності населення (самообслуговування, пересування, виконання професійних і побутових дій) [3].

Завдання соціально-реабілітаційних закладів полягає в тому, щоб допомогти пацієнтам, які втратили функціональність кінцівок, підключити, навчити користуватися протезом та соціально адаптувати пацієнта. В зв’язку з цим постає питання стосовно розробки системи реабілітації пацієнтів з обмеженими можливостями. Складність цього завдання полягає в тому, що через різноманітність причин, за якими людина позбавляється кінцівки, початковий стан кукси у кожного пацієнта носить індивідуальний характер і вимагає аналізу, на підставі якого є можливість розробити методику реабілітації, а також проводити контроль у процесі відновлення.

Периферичний нерв стимулюється електричними імпульсами з подальшою реєстрацією відповіді м’язів, які іннервуються цим нервом. Електроміографія дозволяє виміряти швидкість проходження імпульсу по нервових волокнах; виявити локалізацію ушкодження периферичних нервів; оцінити здатність м’язів до скорочення у відповідь на подразнення електричним імпульсом [4], [5]. Для визначення стану активності м’язів використовується стимуляційна (поверхнева) електроміографія, яка проводиться шляхом накладення електродів на шкіру, при цьому дослідження проводиться швидко і безболісно; а також голкова електроміографія, яка виконується шляхом введення в м’яз спеціального електроду, що має вигляд тонкої голки. Ця методика дає більш цінну інформацію, ніж поверхнева електронейроміографія, тому що вдається дослідити роботу окремих м’язових волокон в спокої та при довільному русі.

Таким чином, необхідно розробити тренувальну систему для реабілітації пацієнтів, яка має використовуватись під час періоду відновлення м’язової активності верхніх кінцівок пацієнта в реальному масштабі часу. Методологічна складова повинна передбачати декілька наборів тестів для розвитку дрібної моторики рук, враховуючи використання різних форм та текстур тест-об’єктів [4], [5], а також перерахунок у бальну оцінку якості (коректності) виконання тестів для оцінки прогресу проведеної реабілітації. Така система повинна містити три модулі. Перший модуль – апаратний; складається з електроміографічних датчиків та датчиків контролю виконання тестів. Другий модуль – модуль обробки; він має відповідати за обробку електроміографічного сигналу та формувати попередні рекомендації для лікаря-реабілітолога. Третій модуль – так званий «бізіборд» – обладнання із набором рухових тестів із різними рівнями складності їх виконання.

Анотація. *В статті розглядаеться питання щодо розробки реабілітаційного комплексу для людей з обмеженними можливостями, а саме для группи людей, втративших функціональність верхніх кінцівок.*

Ключові слова: *біомеханіка, реабілітація, електроміограф, м’язовоа активність, обробка сигналів, тренувальна система, електричний імпульс, опорно-руховий аппарат.*

Література

[1]- Проблемы инклюзивного образования / В. В. Семенец, О. Г. Аврунин, Т. В. Носова, Я. В. Носова // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Соціальні комунікації. – 2014. – №1143, Вип. 6. – С. 23-27.

[2]- Статистический анализ спектральных характеристик ЭМГ-сигнала с целью дифференцирования поясничных болей / Т. В. Жемчужкина, Т. В. Носова, Я. В. Носова и др. // Бионика интеллекта. – 2015. – №2 (85). – С. 105-108.

[3] - Губанов А. В. Модуль обробки електроміографічних даних / А. В. Губанов, Т. В. Жемчужкіна, Т. В. Носова, Я. В. Носова // XIII Міжнародна наукова конференція

студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2015: Радіофізика. Електроніка. Комп'ютерні системи» – Київ. – 2015. – С. 81-83.

[4] - Аврунин О. Г. Применение виртуальных тренажеров в лабораторном практикуме при дистанционном обучении / О. Г. Аврунин, Я. В. Носова // Проблеми теорії та практики дистанційної освіти в Україні. Матеріали міжвузівської конференції 19 жовтня 2012р. – Харків: Харк. нац. ун-т будів. та архіт., 2012. – С. 6-10.

[5] - Носова Т. В. Автоматизированный контроль усталости мышц конечностей спортсменов / Т. В. Носова, Т. В. Жемчужкина, В. В. Семенец. // Тези доповіді 5-й всеукраїнської науково-практичної конференції «Здоров'я нації і вдосконалення фізкультурно-спортивної освіти в Україні». – Харків, 2018. – С. 130–132.

УДК 372.851

Рашевська А. М. (студ., 4 курс)
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Науковий керівник – доц. Рашевська Н. В.
Криворізький національний університет
(Кривий Ріг, Україна)

КОНСТРУКТОРСЬКА ДІЯЛЬНІСТЬ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ

В систему сучасного навчання математичних дисциплін у закладах середньої освіти покладено Державний стандарт, який регламентує мету та завдання навчання освітньої галузі «Математика» в закладах середньої освіти. Відповідно до зазначеного стандарту основною метою вивчення математики є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції [3].

До основних задач навчання математики відносять формування уяви про математичні поняття, геометричні фігури та їх властивості; уміння їх ідентифікувати як на рисунках так і в навколишньому світові; уміння створювати математичні моделі, вивчення яких надає можливість вивчати різноманітні процеси та явища, що робить математику основою фундаментальних дисциплін шкільного курсу.

Одним із основних видів діяльності, що може сприяти формуванню відповідних математичних компетентностей є уміння конструювати. Оскільки вивчення будь-якого предмету відбувається краще, якщо є процес візуалізації та можливості практичної реалізації, то формування конструкторських умінь надасть можливість учням не тільки зрозуміти те, що вони вивчають, а й запам'ятати та застосовувати у життєвих ситуаціях.

Так, у процесі вивчення геометрії, як частині математики у шкільному курсі, доцільно не тільки розв'язувати задачі прикладного змісту, а й надавати можливість учням самостійно конструювати як геометричні об'єкти, так і математичні поняття, означення, властивості.

За тлумаченням С. Гончаренка [2], конструкторська діяльність – це створення моделей відповідно до проекту, плану чи розрахунків, що надає учням можливість поглибити теоретичні знання, набути певних навичок роботи, а конструкторські уміння – здатність самостійного виконання практичних завдань, що передбачає використання раніше набутого досвіду та певних знань.

На думку І. Аваакумової [1], конструкторські уміння учнів можна класифікувати таким чином:

1) уміння виконувати конструкторську діяльність результатом якої створення об'єкту;

2) уміння виконувати конструкторську діяльність, результатом якої деякий процес;

3) уміння виконувати конструкторську у діяльність, результатом якої є система знань.

При вивченні геометрії в середній школі, конструкторською діяльністю можна вважати процес розв'язування задачі результатом якого є отримання або геометричного об'єкту, або набуття нових знань.

Розглянемо можливі шляхи реалізації конструкторської діяльності на уроках геометрії учнів Криворізького Покровського ліцею.

1. *Конструювання знань*. Конструювання нових знань на уроках геометрії можливо за допомогою як інструментів (лінійка, олівець, транспортир та циркуль) так і засобів системи комп'ютерної математики (СКМ). На уроках геометрії у 8 класі було проведено конструювання знань за допомогою СКМ GeoGebra при вивчені теми «Центральний та вписаний кути».

Після ознайомлення з такими поняттями як «центральний та вписаний кути», вчитель на уроці пропонує учням провести дослідження та самостійно спробувати отримати: 1) формування теореми про вписаний кут; 2) формування наслідків з цієї теореми; 3) визначення умов, що надають можливість вписати в коло чотирикутник.

Вчитель на уроці пропонує учням самостійно визначити значення внутрішніх кутів, вписаних в коло. Під керівництвом вчителя, учні виконують такі дії:

1) будують в системі коло довільного радіуса. Одразу праворуч система визначає координати центру кола та записує його рівняння;

2) будують довільний кут таким чином, щоб його вершина лежала на колі;

3) визначають градусну міру цього кута;

4) рухаючи вершину кута по колу за допомогою інструменту  отримують одне й те саме значення кута, що надає можливість самостійно отримати перший наслідок: *вписані кути, що спираються на одну й ту ж дугу рівні* (рис. 1).

Після цього вчитель може запропонувати учням побудувати декілька кутів, що спираються на одну й ту ж дугу та визначити їх числове значення (рис. 2).

Як видно з рис. 2, числове значення побудованих кутів одне й те саме, що надає можливість підтвердити сформульовану учнями властивість.

Також доречним буде дослідження, про внутрішні кути, що спираються на діаметр. Крім того, що учні отримують другий наслідок з теореми про вписаний кут: *вписані кути, що спираються на діаметр – прямі*, так ще мають змогу отримати одну із властивостей прямокутного трикутника, вписаного в коло: *медіана прямого кута дорівнює половині гіпотенузи*.

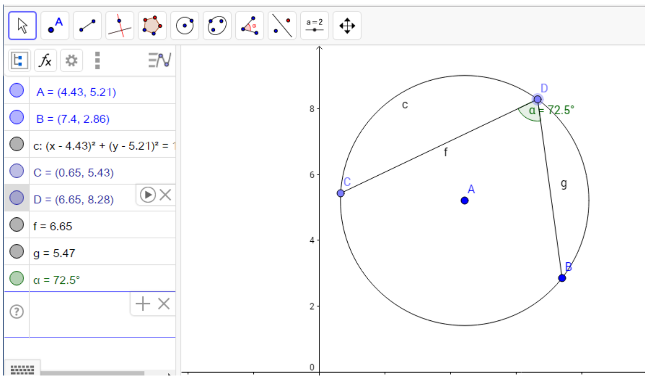


Рис. 1. Визначення рівності внутрішніх кутів, що спираються на одну дугу за допомогою руху вершини кута

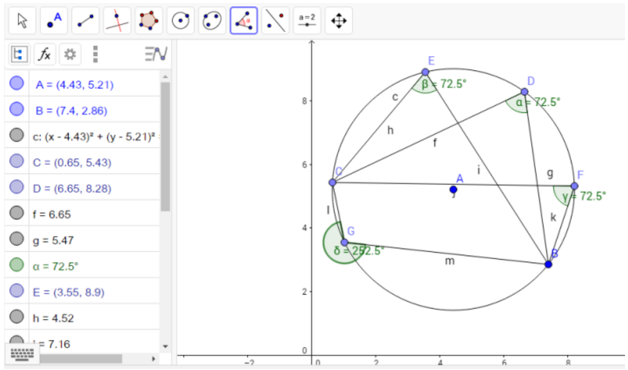


Рис. 2. Визначення рівності внутрішніх кутів, що спираються на одну дугу за допомогою визначення значень кута

2. *Конструювання об'єктів.* На уроках геометрії 7 класу учням було запропоновано самостійно сконструювати Платонові тіла за вибором. Перед тим як видати завдання учням, вчитель проінформував учнів про Платонові тіла, їх особливості та можливості побудови. Роздруковані схеми надали учням можливість провести конструктивну діяльність (рис. 3). А учнів 9 класу зацікавило питання конструювання меблів із картону та перевірка їх на міцність (рис. 4).

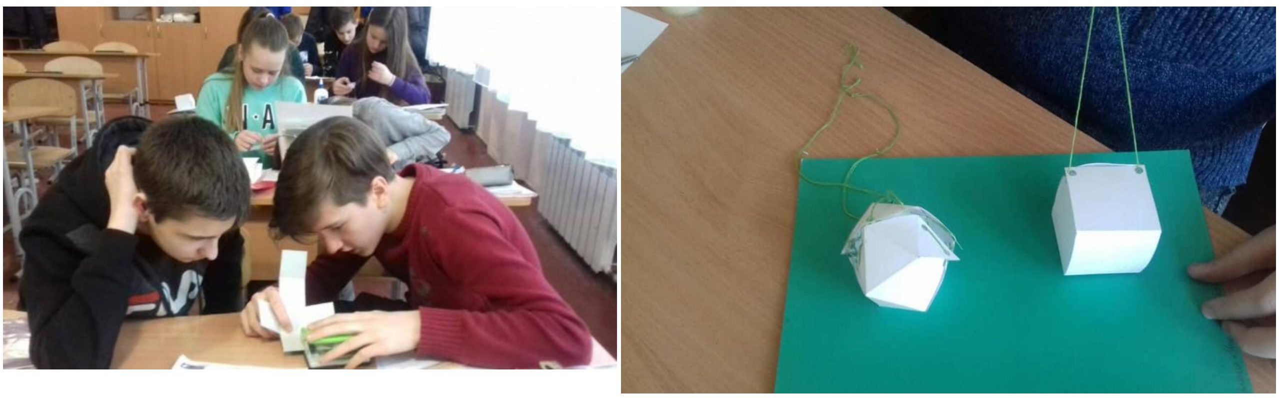


Рис. 3. Конструювання Платонових тіл

Рис. 4. Конструювання меблів

Формування конструкторських умінь та навичок під час вивчення математики надає учням можливість не тільки зрозуміти навчальний матеріал, а й самостійно отримувати нові знання та використовувати математику під час вивчення різноманітних тем на інших уроках; мати уяву про прикладну спрямованість математики, вибудовувати міждисциплінарні зв'язки та дивитися на математику як на цікавий предмет, що дозволяє не тільки формувати логічне та абстракте мислення, а й загальні компетентності.

Анотація. *В роботі розглянуто два підходи конструкторської діяльності, що можуть бути застосовані на уроках геометрії в закладах середньої освіти, що надають учням можливість конструювати поняття, геометричні тіла та речі. Метою дослідження є розгляд різних підходів до формування в учнів конструкторських умінь. Розвиток конструкторської діяльності учнів створить можливості для їх наступної творчої реалізації. А візуалізація власної роботи надасть можливість підходити до навчання більш відповідально.*

Ключові слова: *конструкторська діяльність, конструкторські уміння, GeoGebra.*

Література

[1] – Аваакумова І. А. К вопросу о формировании конструктивных умений у обучающихся в процессе обучения математике / І. А. Аваакумова, Е. С. Казакова // *Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий.* - 2019. - № 4. - С. 117-120.

[2] - С. Гончаренко Український педагогічний словник. Київ : Либідь, 1997. 375 с.
[3] - Державний освітній стандарт з математики. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/derzhavni-standarti (дата звернення: 12.02.2020).

УДК 378.008.001.9

Сновидович І. Г. (аспіринт, 1 рік навчання)
Науковий керівник – проф. Юринець З. В.
Львівський національний університет імені Івана Франка
(Львів, Україна)

ЦИФРОВІ КОМПЕТЕНЦІЇ: ПОНЯТТЯ, РОЛЬ І ПІДҐРУНТЯ РОЗВИТКУ

В умовах теперішнього, дуже непростого сьогодення, коли практично за один день після оголошення карантину діяльність багатьох підприємств, установ та організацій призупиняють свою роботу, а працівники переходять на віддалену чи дистанційну роботу, усім за нагоди стають цифрові компетенції, завдяки яким вони зможуть у подальшому виконувати свою роботу та реалізовувати поставлені перед ними завдання. Адже розвиток цифрового середовища та використання інтернет мережі охоплює майже всі сфери життя і цифрові компетенції постають критично важливими для фахівців у ході подальшої їхньої взаємодії і розвитку. Ще у далекому 2006 році Європарламент і Рада Європи відзначили цифрову компетентність, як одну з восьми ключових компетенцій, якими має володіти кожен європейський громадянин, а впровадження цифрових технологій та інновацій у різних напрямках розвитку економіки суттєво змінює стиль життя сучасного суспільства.

Для того, щоб детальніше аналізувати зазначену проблематику зазначимо, доцільно уяснити, що таке «компетенції» та «цифрові компетенції». Чимало дослідників та науковців працює у цьому напрямі і по різному трактують вищезгадані поняття. У «Новому тлумачному словнику української мови» термін «компетенція» трактується як «добра обізнаність із чим-небудь; коло повноважень якої-небудь організації, установи, особи» [1, с. 874]. Щодо науковців, то за висновками Голованя М.С., загальним для переважної більшості означень «компетенції» є розуміння її як властивості або якості особистості, потенційної здатності особи справлятися з різноманітними завданнями, як сукупність знань, умінь, навичок і способів діяльності особи, які взаємозв'язані між собою, необхідних для здійснення якісної продуктивної діяльності і задані по відношенню до певного кола предметів і процесів. Водночас простежується взаємодія когнітивних і афективних навичок, наявність мотивації і відповідних ціннісних настанов [3, с. 6]. Опрацювавши і узагальнивши основні тлумачення терміну «компетенції», можна зазначити, дослідники акцентують увагу на таких чинниках, як «знання та коло питань», у яких має бути обізнана особа, щоб вона була «готова» отримати «ресурси», «здатність» для «досягнення» «якісних» результатів у своїй професійній діяльності.

Щодо поняття «цифрова компетенція», то Січкаренко К.О. у своїй статті аналізуючи публікацію «Компетенції HR-фахівця в епоху цифрових технологій» [3] зазначає, що – це «знання та навички, які необхідні для коректурного, ефективного та безпечного використання цифрових технологій, а також існування у суспільстві, яке насичено цифровими технологіями» [4, с. 2]. Серед зарубіжних дослідників С. Скотт розуміє цифрову компетентність, як здатність використовувати цифрові медіа й ІКТ, розуміти і критично оцінювати різні аспекти цифрових медіа і медіа контенту, а також уміти ефективно комунікувати у різноманітних контекстах [5].

Відповідно до Рамкової програми оновлених ключових компетентностей для навчання протягом життя, що ухвалив Європейський парламент у 2018 році, то основними цілями програми є [6]:

1. Визначити ключові компетенції, необхідні для працевлаштування, посилити особистісний потенціал активного громадянства та соціальної інтеграції.

2. Створити довідник для розробників освітніх політик, надавачів освітніх і тренінгових послуг, керівних кадрів закладів освіти, роботодавців, а також безпосередньо тих, хто навчається.

3. Підтримувати зусилля на європейському, національному, регіональному та місцевому рівнях задля сприяння розвитку компетенцій для навчання протягом усього життя.

Компетенції розглядають, як певні знання, вміння та навички, котрі людина повинна удосконалювати протягом життя з метою покращення свого всебічного розвитку, досягнень, спілкування та рівня життя. Усі компетентності є важливими і взаємопов'язаними, що доповнюють одна одну і як результат формують свідому особистість.

Зокрема, серед переліку ключових компетентностей, які є ключовими для подальшого розвитку особистості та людства, є цифрова компетентність.

Цифрова компетентність передбачає формування навичок у використанні цифрових технологій, вміння ефективно застосовувати цифрові технології для своєї професійної діяльності, навчання, спілкування та в роботі над інноваційними розробками [7]. Також важливим є інформаційна грамотність, створення цифрового контенту, вміння критично аналізувати та опрацьовувати джерела отримання інформації, можливості її захисту. Цифрова компетентність включає в себе також критичне застосування інформаційно-комунікаційних технологій, основ програмування, уміння працювати з базами даних, підбором, обміном та збереженням інформації.

Цифровізація, яка швидкими темпами охоплює усі сфери економічного життя, змушує активно вчитися і розвиватися, щоб ефективно та безпечно освоювати сучасні цифрові технології і грамотно їх використовувати. Цифрові компетенції – це не тільки знання та вміння, якими мають володіти спеціалісти, що працюють у цьому напрямі, а – це вже практично основні навики, якими мають володіти молоді фахівці та й усі свідомі громадяни для ефективної соціалізації, працевлаштування і кар'єрного зростання. Аналізуючи і опрацьовуючи сайти з пошуку роботи, потрібно зазначити, що переважна більшість вакансій пов’язана із цифровими компетенціями та навичками. Також багато провідних компаній вкладають чимало фінансів і зусиль, щоб безупинно навчати свій персонал у цьому напрямі. Відповідно до сучасних вимог ринку праці, шалених темпів цифровізації та прогнозів щодо розвитку технологій нагальною потребою постає покращення компетенцій, зокрема цифрових.

Анотація. *Активний розвиток інформаційних технологій, інновації, сучасні вимоги ринку праці та прогнози щодо розвитку суспільства спонукають нас переглядати наші набуті компетенції, щоразу покращувати їх і розвивати. У статті проаналізовано поняття «цифрові компетенції», наголошено на доцільності їх розвитку для підвищення особистого потенціалу і можливостей.*

Ключові слова. *Компетенції, цифрові компетенції, ключові компетентності, знання.*

Література

1. Новий тлумачний словник української мови (у трьох томах). том 1, А – К / Укладачі: В. В. Яременко, О. М. Сліпушко. Київ: Вид-во “АКОНІТ”, 2006. 926 с.

2. Головань М. С. Компетенція і компетентність: досвід теорії, теорія досвіду / М. С. Головань // Вища освіта України. - 2008. - № 3. - С.23-30.

3. Василик А. В. Компетенції HR-фахівця в епоху цифрових технологій / А. В. Василик, А. І. Кушнір // Науковий вісник Херсонського державного університету. - 2018. - №9. - С.119-127.

4. Січкаренко К. О. Поняття цифрових компетенцій та їх комунікаційна роль у сучасному суспільстві / К. О. Січкаренко // Ефективна економіка. - 2018. - № 9. - URL: http://www.economy.nayka.com.ua/pdf/9_2018/54.pdf

5. Scott C. The Futures of Learning 3: What kind of pedagogies for the 21st century?. UNESCO Education Research and Foresight, Paris. ERF Working Papers Series, no. 15. URL: http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002431/243126e.pdf.

6. ANNEX to the Proposal for a Council Recommendation on Key Competences for Lifelong Learning. URL: https://ec.europa.eu/education/sites/education/files/annexrecommendation-key-competences-lifelong-learning.pdf.

7. Юринець З. Зарубіжний досвід забезпечення конкурентоспроможності інноваційних кластерів в умовах розвитку цифрових технологій / З. Юринець, Р. Юринець // Формування ринкової економіки в Україні. - 2020. - Вип. 43. - С.168-176

УДК 372.851

Спасьонова Т. Ю. (магістрант, 1 курс)
Науковий керівник – доц.Бистрянцева А.М.
Херсонський державний університет (Херсон, Україна)

РОЛЬ ТЕМИ «НЕРІВНОСТІ» ПРИ ПІДГОТОВЦІ ДО ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ З МАТЕМАТИКИ

Основним завданням зовнішнього незалежного оцінювання є забезпечення кожному громадянину рівних умов доступу до вищої освіти, оскільки саме результати оцінювання є основними показниками, які дозволяють учням вступати до закладів вищої освіти України. Крім того, тестування дозволяє об’єктивно оцінити рівень знань випускників закладів середньої освіти.

Метою дослідження є визначення ролі та рівня значущості теми «Нерівності» при підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Сертифікаційна робота з математики передбачає можливість отримання учасником зовнішнього оцінювання 62 тестових балів та складається з 35 завдань різних форм та рівнів складності:

- з вибором однієї правильної відповіді – 20 завдань;
- на встановлення відповідності – 4 завдання;
- задачі відкритої форми з короткою відповіддю – 8 завдань;
- з розгорнутою відповіддю – 3 завдання.

На перший погляд у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання, тема «Нерівності» посідає не ключове місце. Посилаючись на офіційні звіти зовнішнього незалежного оцінювання попередніх років [1, с. 200-222], було виявлено, що тема «Нерівності» входить до змістової лінії «Рівняння і нерівності» та для її оцінювання передбачається всього 6 завдань, із них: 4 з вибором однієї правильної відповіді, 1 завдання відкритої форми з короткою відповіддю, 1 завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю.

Приблизно така ж ситуація спостерігається і у завданнях для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання 2020 року.

При цьому завдання, в яких за умовою передбачене розв'язування нерівностей, при правильному їх виконанні дозволяють учаснику зовнішнього незалежного оцінювання отримати 8 тестових балів. Більш глибокий аналіз завдань, які пропонувались під час тестування дозволяє стверджувати, що уміння розв'язувати нерівності є необхідним також для розв'язування інших завдань. Нерівності широко застосовуються при знаходженні області визначення функцій, розв'язуванні ірраціональних та логарифмічних рівнянь та їх систем.

Саме тому надзвичайно важливим є приділення достатньої кількості часу під час вивчення цієї теми на уроках математики, а також при підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання.

Тема «Нерівності» починає вивчатись учнями ще в молодшій школі, проте основну увагу їй приділяють починаючи з 9 класу. Саме в цей період відбувається поглиблене знайомство учнів з темою «Нерівності» [2, с. 5-58] та продовжується вивчатись до 11 класу [3, с. 107-112, 248-256; 4].

Нерівність може бути ірраціональною, показниковою, логарифмічною, тригонометричною, дробово-раціональною, числовою, нерівністю з однією або кількома змінними, квадратною, тощо [5].

Оскільки за означенням нерівність утворюють дві функції, що поєднані між собою знаком нерівності, то для відшукання її розв'язку, спочатку необхідно знайти область допустимих значень зазначених функцій. Цей етап також включає розв'язування нерівностей. Так, наприклад, розв'язування логарифмічних нерівностей передбачає перехід до розв'язування лінійних, квадратних нерівностей, знаходження коренів квадратного тричлена.

Серед учасників зовнішнього незалежного оцінювання з математики минулого року близько 40% не змогли розв'язати пропоноване квадратне рівняння, хоча вміння розв'язувати такі рівняння є базовими. Це вміння відпрацьовують більше, ніж 3 навчальні роки і воно є необхідним при розв’язуванні квадратних нерівностей. Водночас більше половини тестованих правильно визначили число, що є розв’язком нерівності з модулем.

Дуже часто помилки, допущені під час обчислень, скорочень або розв’язування найпростіших рівнянь та нерівностей, призводять до неправильної відповіді в завданнях з тем, що вивчають в 10 та 11 класах [1, с. 221].

Отже негативний вплив на результат зовнішнього незалежного оцінювання мають недостатньо відпрацьовані навички, що мали б бути сформовані в 5-9 класах. Тому надзвичайно важливо при підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання сформувати вміння розв’язувати найпростіші нерівності, а вже потім переходити до більш складних завдань, таких як, наприклад, нерівності з параметрами, показникові та логарифмічні нерівності.

Анотація. *Представлена роль та особливості завдань з теми «Нерівності» в зовнішньому незалежному оцінюванні з математики. Розглянуті базові проблеми, з якими стикаються учні при проходженні тестування, та зазначені напрямки їх вирішення.*

Ключові слова: *нерівність; завдання; зовнішнє незалежне оцінювання.*

Література

[1] - Офіційний звіт про проведення в 2019 році ЗНО результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти (Том 2) [Електронний ресурс] // Український центр оцінювання якості освіти. – Режим доступу: http://testportal.gov.ua//wp-content/uploads/2019/08/ZVIT-ZNO_2019-Tom_2.pdf. – Назва з екрану.

[2] - Мерзляк А. Г. Алгебра 9: підруч.[для кл. з поглибленим вивченням математики] // Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. – Х.: Гімназія. – 2017.

[3] - Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти // Х.: Гімназія. – 2018.

[4] - Мерзляк А. Г. Алгебра. 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2011.

[5] - Навчальна програма з математики (Алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту, затверджена наказом МОНУ від 23.10.2017 № 1407 (чинна з 1 вересня 2018 року) [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx (дата звернення: 20.05.2018). – Назва з екрану.

УДК 519-6

Страхаль О. О. (магістрант, 1 курс)
Науковий керівник – доц. Болдарєва О. М.
Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського (Одеса, Україна)

ЕЛЕМЕНТИ МЕТОДИКИ ВИПЕРЕДЖАЮЧОГО НАВЧАННЯ НА УРОКАХ ІНФОРМАТИКИ В ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

Автори багатьох сучасних підручників інформатики для початкової школи при вивченні лінії «Алгоритми та програми» пропонують користуватися середовищем для блочного програмування «Scratch» (Скретч), і недарма (див. [1,2]). Scratch – це надійне і потужне середовище розробки, яке націлене на дитячу аудиторію, і найкращим чином підходить для навчання програмуванню в початковій школі, адже молодші школярі ще погано вміють створювати тексти програм. При цьому можливості Scratch дуже різноманітні. Але, на жаль, більшість завдань у підручниках є надмірно простими і не можуть зацікавити учнів. Внаслідок цього, учні взагалі втрачають інтерес до програмування, тому що не бачать можливостей його застосування.

Вищевикладене стало поштовхом для проведення дослідження на прикладі вивчення розділу «Алгоритми з розгалуженням і повторенням» лінії «Алгоритми та програми» в курсі інформатики 4 класу. Під час вивчення обраного розділу в середовищі програмування для дітей розглядалися теми, що стосувалися реалізації алгоритмів з розгалуженнями, циклічних алгоритмів і алгоритмів повторення до виконання умови. Розглядали і питання сортування та впорядкування об’єктів за деякою ознакою, використання логічних висловлювань з «якщо-то…».

Для засвоєння обраної теми було використано метод проектів і учням було запропоновано проект створення ігри типу «Арканоїд», з залученням навчального матеріалу шести тем розділу. У грі присутні два виконавці – м’яч, який рухається по сцені (так називається екран виконання програми в Scratch), і машина, або платформа, якою керує користувач для відбивання м’яча. Під час виконання завдань проекту і опису алгоритмів руху м’яча і платформи, учням необхідні такі знання з курсу математики:

1. координатна площина, якою є сцена; центром сцени є точка з координатами (0;0);

2. градусна міра кута площини, яку потрібно вказати або обчислити для зміни напрямку руху м’яча після зіткнення з платформою.

Під час реалізації методу було вирішено застосувати елементи методики випереджаючого навчання, автором якої є видатний педагог-новатор С. Н. Лисенкова (див. [3]). Для її реалізації на початку кожного уроку при вивченні теоретичного матеріалу, окрім пояснення нових елементів програмування, учні протягом 7-10 хвилин засвоювали матеріал курсу математики середньої школи. У результаті цього учні:

- вивчили, що таке координатна площина та її осі (осі абсцис і ординат);
- засвоїли і застосували на практиці знання про координати точки (або об’єкта) на площині;
- зуміли описати алгоритм руху м’яча на всій координатній площині, а платформи – уздовж осі абсцис;
- дізналися, що таке гострий, тупий, прямий та розгорнутий кут, отримали уявлення про градусну міру таких кутів;
- проекспериментували, на який кут доцільно відхилити м’яч при зіткненні з платформою.

Результатом реалізації цього проекту учнями 4-го класу було власноруч розроблено гру (див. рис. 1) з функцією підрахунку балів (або очок) за вдале відбиття м’яча платформою, також у грі враховано можливість програшу в разі зіткнення м’яча з нижнім краєм сцени.

Після завершення проекту учні отримали можливість «протестувати» свою гру. У підсумку, учні були зацікавлені під час реалізації проекту, отримали, закріпили знання з математики і інформатики та застосували їх на практиці. Створений власноруч програмний продукт учні мали змогу використати його за призначенням, і вони отримали впевненість у необхідності навчання для подальшого досягнення власних цілей і життєвих задач.

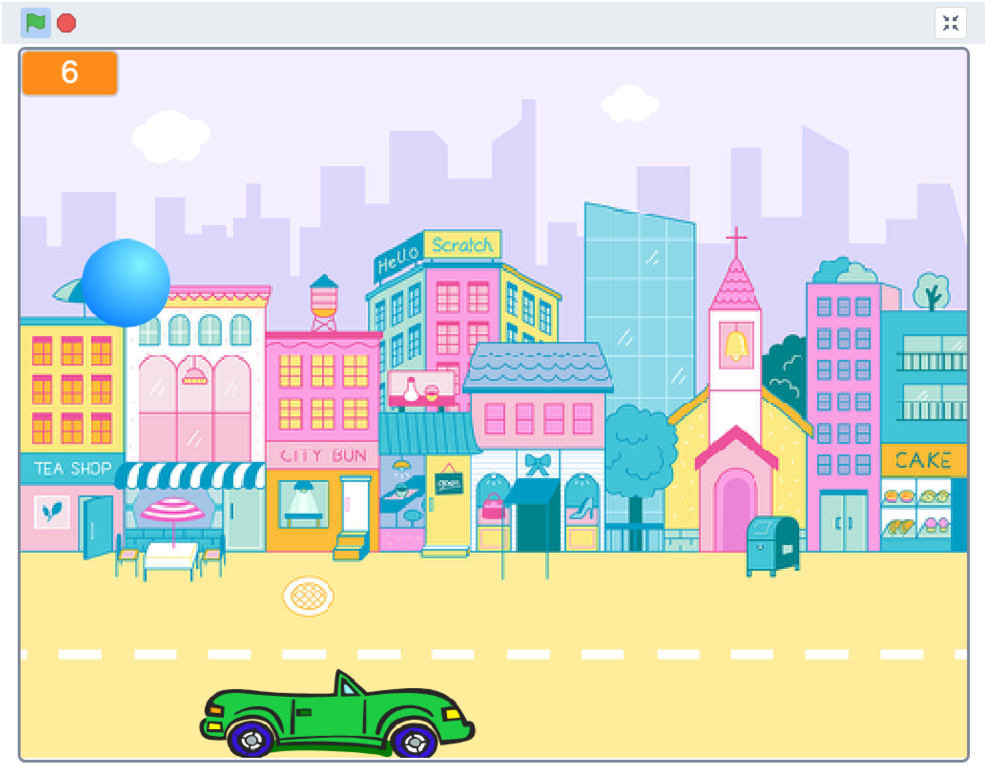


Рис. 1. Сцена гри «Арканоїд» в Scratch

Звісно, такий метод потребує ретельного планування і довгої підготовки, але результат того вартий. Окрім того, тепер більшість учнів 4-го класу мають стійкий інтерес до програмування і розуміння того, що знання математики при цьому є необхідним.

Література

[1] - Інформатика. Підручник для 4 класу загальноосвіт. навч. закл. / Г.В. Ломаковська, Г.О. Проценко, Й.Я. Ривкінд. – Київ: «Освіта», 2015. – 160 с.

[2] - Інформатика. Підручник для 4 класу загальноосвіт. навч. закл. / М. М. Корнієнко, С. М. Крамаровська, І. Т. Зарецька. – Харків : «Ранок», 2015. – 160 с.

[3] - Лысенкова С. Н. Методом опережающего обучения : книга для учителя : из опыта работы / С. Н. Лысенкова. – Москва : Просвещение, 1988. – 192 с.

УДК 512

Страхаль О. О.(магістрант, 1 курс)
Науковий керівник – доц. Болдарєва О. М.
Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д.Ушинського (Одеса, Україна)

НЕСТАНДАРТНІ ПІДХОДИ ДО НАВЧАННЯ УЧНІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ У ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Високий рівень розвитку ІКТ і наявність електронно-цифрових пристроїв майже у кожного учня школи з одного боку, додають клопоту шкільним учителям, а з іншого – дають можливість використання цих технологій у навчальному процесі. Сьогодні існує багато зручних інструментів і додатків, за допомогою яких учитель може покращити засвоєння навчального матеріалу учнями, може швидко діагностувати «пробіли» в знаннях учнів, збільшити наочність певного матеріалу для більш повного розуміння.

Саме тому цікавим виявилось дослідження можливостей використання окремих технологій та інструментів на уроках математики в загальній середній школі і відстеження позитивних змін компетентностей учнів після їх застосування. Ознайомившись з сучасним педагогічним, методичним досвідом, звернули увагу, що не досить вивченим є питання використання під час викладання математики принципу навчання «Перевернутий клас» (Flipped classroom)[1]. Доповненням до нього ми обрали мобільний додаток «Geogebra графічний калькулятор» (або його онлайн-версії)[2], і використання комп’ютерного тестування учнів засобами Google Forms. Застосування цих принципів і технологій вирішено було реалізувати під час викладання розділу «Лінійні рівняння та їх системи» у курсі алгебри 7 класу (для загальноосвітніх навчальних закладів), оскільки для багатьох учнів розв’язання рівнянь і їх систем має певні труднощі, тому не буде зайвим відпрацювання саме практичних навичок розв’язання рівнянь під наглядом учителя на уроці.

Основні принципи реалізації навчання у «Перевернутому класі» є такими, що у якості домашнього завдання учням пропонують переглянути відео-, або аудіо-матеріал, що стосується теоретичної частини наступного уроку. При цьому завдань практичного характеру додому учні не отримують. Таким чином, вони перед наступним заняттям уже майже готові до розв'язання практичних завдань з теми, мають змогу задати запитання, які виникли у них при самостійному опрацюванні теоретичного матеріалу. Це дає можливість на уроці більше приділити увагу розв'язанню практичних завдань. Зауважимо, учні під час вивчення цієї теми (як і після закінчення) мають доступ до матеріалів, що пояснюють теоретичний матеріал і можуть бути використаними за потреби необмежену кількість разів у зручний для кожної дитини час.

Велику кількість часу під час опанування матеріалів розділу, що стосується лінійних рівнянь та їх систем, учні і вчитель витрачають на побудову графіків функцій. Тому під час вивчення теми «Лінійне рівняння з двома змінними» учні виконували побудову графіків функцій у зошитах «від руки», а потім – у додатку Geogebra. При вивченні розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом учням (після «ручного розв'язку») було запропоновано скористатися мобільним додатком Geogebra. Це дозволило продемонструвати раціональність використання часу і було опрацьовано більшу кількість практичних завдань. При цьому, вчитель мав змогу швидко і наочно показати учням, в яких випадках система рівнянь має один корінь (є сумісною), в яких – безліч коренів (є невизначеною), а в яких – жодного (є несумісною). У подальшому, при вивченні інших методів розв'язку систем двох лінійних рівнянь з двома невідомими (метод підстановки і метод додавання), учням пропонувалося використовувати обраний додаток для графічної перевірки знайдених розв'язків.

Для перевірки засвоєння навчального матеріалу нами були створені тестові завдання за допомогою безкоштовного сервісу Google Forms. Діагностичні тести учні складали на кожному другому уроці, що проводилися за принципом «перевернутого класу». Питання практичного і теоретичного характеру містили матеріал двох попередніх занять. Підсумкові оцінки проходження тесту і відповіді учнів зберігалися для подальшого аналізу. Перевагою такого контролю є оцінка, яку учень отримує одразу після завершення тестування. При цьому вчитель має можливість для швидкого аналізу рівня засвоєння знань учнів, виокремлення труднощів у засвоєнні знань кожного учня і прийняття дій для їх усунення або корекції.

Зрозуміло, що такий підхід, реалізований під час вивчення обраної теми з математики, має як переваги, так і недоліки. Наприклад, вчителеві необхідний додатковий час для підготовки перед проведенням таких уроків, а також деякі навички роботи із запропонованими цифровими інструментами. Також необхідно слідкувати, щоб програмний додаток мав вторинну роль при розв'язуванні завдань і слугував способом самоперевірки знайденого розв'язку. Але, таке поєднання використання принципів і засобів значно заощаджує час для відпрацювання практичних навичок учнів. Можливо, він є більш ефективним під час дистанційного навчання?

Анотація. *В статті наведено короткий огляд можливостей використання сучасних ІКТ при викладанні курсу математики в ЗЗСО на прикладі вивчення розділу «Лінійні рівняння та їх системи» в курсі алгебри 7 класу.*

Ключові слова*: перевернутий клас, комп'ютерне тестування*

Література

1. Модель навчання «Перевернутий клас»: змінюємо освітній процес // [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://naurok.com.ua/post/model-navchannya-perevernutiy-klas-zminyuemo-osvitniy-proces – Назва з екрану.

2.Використання програмного середовища Geogebra при викладанні математики у загальноосвітній школі // [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://timso.koippo.kr.ua/hmura11/vykorystannya-prohramnoho-seredovyscha-geogebra-pry-vykladanni-matematyky-u-zahalnoosvitnij-shkoli/ – Назва з екрану.

УДК 373.31:51 (091)

Сушко О. В. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Овсієнко Ю. І.
Полтавська державна аграрна академія (Полтава, Україна)

З ІСТОРІЇ РОЗВИТКУ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Системи рівнянь із 2-ма невідомими зустрічаються у математичних текстах ще з часів Древнього Вавилону (2000–1700 рр. до н. е.). Авторами методу послідовного виключення невідомих для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) і нових методів наближеного розв'язування рівнянь вищих степенів стали китайські філософи. Результати математичних праць вони зібрали у давньому китайському трактаті «Математика в дев'яти книгах» (I ст. до н. е.). Це свого роду є енциклопедією математичних знань для будівельників, землемірів, фінансистів, купців, ремісників та ін. представників тогочасних професій [1, с. 42, 161]. Розв'яжемо різними способами історичну задачу з трактату, для складання математичної моделі якої, можливо вперше в історії алгебри, вводяться від'ємні числа [2, с. 500].

Задача 8 із VIII книги трактату «Математика в дев'яти книгах» [2, с. 502]. Продали 2 буйволи, 5 баранів, придбали 13 свиней, залишилось 1000 цяней (цянь – грошова одиниця Китаю до кінця XIX ст.). Продали 3 буйволи, 3 свині, купили 9 баранів, якраз вистачило. Продали 6 баранів, 8 свиней, купили 5 буйволів, не вистачило 600 цяней. Яка вартість буйвола, барана та свині?

$$\begin{cases} 2x+5y = 13z+1000, \\ 3x + 3z = 9y, \\ 6y+8z = 5x-600. \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x-3y+z = 0, \\ -11y+15z = -1000, \\ 8z = 2400. \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x=1200, \\ y=500, \\ z=300. \end{cases} \quad (3)$$

Позначимо вартість буйвола, барана і свині x, y, z (цяней) відповідно.

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \\ 8 & -13 & 1 \\ -600 & 1000 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -9 & -11 & -3 \\ 13 & 15 & 1 \\ -600 & -1000 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -3 \\ 8 & 15 & 1 \\ 2400 & -1000 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Згідно умови складаємо СЛАР (1). Розв'яжемо задачу за правилом «фан-чен» перетворенням таблиць, способом «чжен-фу» (вистроювання чисел по клітинках) (4), а саме: складається матриця із стовпцями рівняннями і рядками коефіцієнтами при невідомих і вільних членів СЛАР. Остання таблиця (4) виражає СЛАР (2). Виконаємо перетворення, що нагадують зворотний хід методу Гауса. Із (2) отримуємо розв'язок СЛАР (3). На прикладі задачі [2, с. 502] ми продемонстрували метод китайських математиків розв'язування СЛАР. Перейдемо до більш сучасних підходів, що склались в історії математики з урахуванням сучасних технологій.

На подальший розвиток алгебри значний вплив мали дослідження Діофанта Олександрійського – автора задач, для розв'язування яких складались не лише СЛАР, деякі з них містили кількість рівнянь меншу від кількості невідомих. Значний внесок у подальший розвиток теорії СЛАР вніс італійський математик, інженер, лікар і астроном Джіроламо Кардано. У праці «Видатне мистецтво» або «Правила алгебри» (1545 р.) він фактично наводить правило Крамера для СЛАР із 2-ма невідомими. У 1683 році японський математик Кова Секі (Секі Такакадзу) у праці «Метод розв'язування таємних задач» уперше використовує визначник для обчислення визначників квадратних матриць від 2-го до 5-го порядку і застосовує їх до розв'язування СЛАР.

Уперше в Європі приходить до ідеї визначника німецький математик і філософ Готфрід Вільгельм Лейбніц (1693 р). Він формально описує визначники і застосовує їх до дослідження СЛАР, створивши загальну теорію позначення коефіцієнтів і фактично формулює правило Крамера і теорему Лапласа для окремого випадка. Подальшого розвитку теорія СЛАР набуває у працях шотландського математика Коліна Маклорена у «Курсі алгебри» (1748 р.). Він вперше публікує доведення правила Крамера для систем із 2-ма та 3-ма невідомими і вказує, як застосувати його для системи з 4-ма невідомими.

У 1750 році швейцарський математик Ґабрієль Крамер у праці «Вступ до аналізу алгебраїчних кривих» дає загальне правило розв'язування систем, що мають будь-яку кількість невідомих (без доведення і пояснень до застосування). Продемонструємо сучасний метод розв'язування СЛАР історичної задачі [2, с. 502] методом Крамера [3, с. 35-37], скориставшись комп'ютерними технологіями.

	2	5	-13			1000	5	-13	
Δ	3	-9	3	=МОПРЕД(R[-1]C[-3]:R[1]C[-1])	Δ1	0	-9	3	=МОПРЕД(R[-1]C[-3]:R[1]C[-1])
	-5	6	8			-600	6	8	

	2	1000	-13			2	5	1000	
Δ2	3	0	3	=МОПРЕД(R[-1]C[-3]:R[1]C[-1])	Δ3	3	-9	0	=МОПРЕД(R[-1]C[-3]:R[1]C[-1])
	-5	-600	8			-5	6	-600	

x1=	Δ1/Δ=	=R[-7]C[8]/R[-7]C[2]	1200	x2=	Δ2/Δ=	=R[-3]C[-2]/R[-7]C[-2]	500	x3=	Δ3/Δ=	=R[-3]C/R[-7]C[-6]	300

Алгебра продовжувала розвиватись і у 1772 році французький математик і астроном П'єр-Симон Лаплас у праці по вивченню орбіт внутрішніх планет, дослідивши розв'язки СЛАР сформулював теорему Лапласа. Термін «детермінант» (визначник) уперше введено німецьким математиком, фізиком і астрономом Карлом Фрідріхом Ґаусом (1801 р.) у праці, присвяченій теорії чисел. Його метод виключення подібний до продемонстрованого у трактаті [4, с. 502] та був використаний ним під час вивчення орбіти астероїда Паллада. Представимо сучасний метод розв'язування СЛАР задачі із трактату методом Гауса [3, с. 38-44], застосовуючи електронні таблиці (таблиця).

Таблиця 1

Розв'язування СЛАР методом Гауса

x1	x2	x3	b
1	-3	1	0
2	5	-13	1000
-5	6	8	-600
1	-3	1	0
=R[-1]C*(-2)+R[-3]C	=R[-1]C*(-2)+R[-3]C	=R[-1]C*(-2)+R[-3]C	=R[-1]C*(-2)+R[-3]C
=R[-2]C*5+R[-3]C	=R[-2]C*5+R[-3]C	=R[-2]C*5+R[-3]C	=R[-2]C*5+R[-3]C
1	-3	1	0
0	1	-5	-1000
=R[-1]C*(-4)+R[-3]C	-9	13	-600
1	-3	1	0
=R[-3]C*(-1)	1	-5	-1000
=R[-3]C/12	=R[-4]C*9+R[-3]C	=R[-4]C*9+R[-3]C	=R[-4]C*9+R[-3]C
1			=R[-3]C[-2]*(-1)*R[1]C-R[2]C
	1		=R[-3]C-R[-3]C[-1]*R[1]C
		=R[-3]C/(-32)	=R[-3]C/(-32)

У 1812 році французький математик Огюстен Луї Коші вперше використав термін «детермінант» у сучасному розумінні. Він обґрунтував одержані до нього результати і дістав нові: ввів поняття мінорів і алгебричних доповнень, довів теорему про множення визначників, одержав результати діагоналізації матриці. А сам термін «матриця» уперше був використаний англійським математиком Джеймсом Сілвестром (1850 р.). Він означив матрицю як розміщені у прямокутнику елементи і пов'язав квадратні матриці із визначниками. Його ідею підтримав товариш Артур Келі, який у 1858 році публікує «Мемуари із теорії матриць», де вперше дає абстрактне означення матриці, подає всю матричну алгебру, дії над матрицями (додавання, множення матриці на число, множення матриць, відшукання оберненої матриці).

Продемонструємо сучасний метод застосування матриць до розв'язування СЛАР [3, с. 26], наведеної вище умови задачі [2, с. 502] за допомогою Microsoft Excel.

	2	5	-13		=МОБР(RC[-4]:R[2]C[-2])	=МОБР(RC[-4]:R[2]C[-2])	=МОБР(RC[-4]:R[2]C[-2])		1000		=МУМНОЖ(RC[-6]:R[2]C[-4];RC[-2]:R[2]C[-2])	1200
A	3	-9	3	A^{-1}	=МОБР(RC[-4]:R[2]C[-2])	=МОБР(RC[-4]:R[2]C[-2])	=МОБР(RC[-4]:R[2]C[-2])	B	0	X	=МУМНОЖ(RC[-6]:R[2]C[-4];R[4]C[-10]:R[6]C[-10])	500
	-5	6	8		=МОБР(RC[-4]:R[2]C[-2])	=МОБР(RC[-4]:R[2]C[-2])	=МОБР(RC[-4]:R[2]C[-2])		-600		=МУМНОЖ(RC[-6]:R[2]C[-4];R[4]C[-10]:R[6]C[-10])	300

Як бачимо, на прикладі розв’язування лише однієї задачі можна відслідкувати всі етапи зародження, становлення та розвитку СЛАР в історії математики. Представлення комп’ютерної реалізації розв’язування запропонованої історичної задачі показує невичерпні можливості поєднання сучасних технологій із класичними математичними методами.

Анотація. *У статті представлено варіативність методів розв’язування історичної задачі різними способами, що відповідають етапам зародження, становлення та розвитку систем лінійних алгебраїчних рівнянь.*

Ключові слова*: система лінійних алгебраїчних рівнянь, визначник, матриця, історична задача, методи розв’язування.*

Література

[1] – История математики. Т.1. С древнейших времен до начала нового времени / Под ред. А. П. Юшкевича. – М. : Наука, 1970. – 354 с.

[2] – Историко-математические исследования / Под ред. Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича. – Выпуск X. – Москва : ГИТТЛ, 1957. – 820 с.

[3] – Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посіб. / В. В. Булдигін та ін.; за ред. проф. В. В. Булдигіна. К.: ТВіМС, 2011. – 224 с.

[4] – История математики. Т.2. С древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А.П. Юшкевича. – М. : Наука, 1970. – 304 с.

УДК 929.51

Талдыкин И. А. (студ., 1 курс)
Научный руковдитель – ст. преп. Спирина Н. М.
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова (Воронеж, Россия)

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В ЛАНДШАФТНОЙ АРХИТЕКТУРЕ

Что общего имеют такие, казалось бы, не связанные друг с другом природные явления как расположение семян подсолнечника, элегантная спирали раковины улитки и форма Млечного Пути? Какой универсальный геометрический принцип скрыт в работах великих художников и архитекторов от Витрувия до Ле Корбюзье, от Леонардо да Винчи Сальвадор Дали?

Как бы это невероятно ни звучало, ответом на эти вопросы являются просто число, известное на протяжении многих веков которое постоянно появляется в различных творениях природы и искусства. В результате этому числу были даны такие имена как «божественное сечение», «золотое сечение» и «золотое число». Записать это число практически невозможно, не потому что она слишком большое, - оно чуть больше единицы - а потому, что оно состоит из бесконечного ряда цифр, которые никогда не образуют повторяющиеся группу. Поэтому математики используют формулу для записи золотого сечения:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6180339887.$$

В профессиональной математической литературе золотое сечение принято обозначать греческой буквой τ (тау) – от греческого слова τομή (читается «томэ»), которое означает «сечение» или «разрез». Однако в начале XX века американский математик Марк Барр предложил обозначать золотое сечение буквой φ – по первой букве имени великого древнегреческого скульптора Фидия, жившего примерно в 490–430 гг. до н. э. Величайшие шедевры Фидия – Афина Партенос в Афинах и Зевс в Олимпии.

Связь золотого сечения с красотой вопрос не только человеческого восприятия. Похоже, сама природа выделила $\boldsymbol{\varphi}$ особую роль, когда дело касается предпочтения одних форм другим. Чтобы понять это, нам придется углубиться в свойства золотого сечения.

Возьмем золотой прямоугольник, т.е. такой прямоугольник, одна сторона которого в 1,618 раз длиннее другого, и впишем в него квадрат, стороны которого равны ширине нашего прямоугольника. В результате мы получим новый золотой прямоугольник. Повторим эту процедуру несколько раз. Теперь в каждом из квадратов мы проведем дугу так, чтгобы радиус каждой дуги был равен длине стороны соответствующего квадрата. Эта элегантная кривая называется логарифмической спиралью. Она вовсе не является математическим курьезом, наоборот, эта замечательная линия часто встречается в физическом мире: от раковины наутилуса до рукавов галактик, и в элегантной спирали лепестков распустившейся розы.

То, что привлекает нас в ландшафтах – это их глубинная математическая структура. Золотое сечение в ландшафтном дизайне – краеугольный камень проектируемого пространства. Использование пропорций золотого сечения помогает создать на участке асимметричную, но при этом подчиненную правилам гармонии, целостную и законченную композицию.

Платон говорил, что Вселенная устроена согласно «золотому сечению», о чем он, вероятно, рассказывал своим ученикам, прогуливаясь по дорожкам рощи академии – одному из первых ландшафтных объектов, созданных человеком с использованием принципов золотого сечения.

При планировке участка (расположения дома, дорожек, различных насаждений и т.п.) желательно опираться на рассматриваемый принцип, к примеру, использовать геометрические фигуры, в пропорциях которых используется золотое сечение: логарифмические спирали, «золотые» прямоугольники и т.д. То есть, при формировании клумб, газонов и прочих ландшафтных объектов прямоугольной формы, для гармоничного восприятия желательно, чтобы независимо от величины объектов их стороны соотносились как 1 к φ.

Золотое сечение можно применить и в использовании цвета (посадка растений разных цветов, при расположении их на участке по формуле «0,68–0,32», т.к. эти два числа относятся друг другу как 1,618, т.е. число, близкое к φ).

Это очень удачно можно обыграть в так называемых «моносадах» (сад ирисов, сад камелий, сад тюльпанов и т.д.) или в коллекциях растений одного вида.

Прекрасным примером является Сад Кактусов на Канарском острове Лансароте, где 10 000 кактусов и суккулентов 1400 различных сортов растут разноцветными группами на круглых террасах, расположенных по принципу золотого сечения, вокруг прямоугольных черных мульчированных цветников.

Создавая гармоничную композицию в ландшафтном дизайне, нужно активно использовать геометрические формы, а с золотым сечением, в первую очередь, связан треугольник. Композиционные решения, основанные на правиле треугольника, позволяют грамотно разделить участок при проектировании пространства.

Упрощенно говоря, правило треугольника означает, что на участке желательно создавать группы из элементов числом не более 3. При этом все они должны быть разного размера и (или) разной высоты – от большего к меньшему.

Высаживать насаждения нужно в виде треугольника либо по одной линии (но группой в 3 элемента).

Если это треугольник, то насаждения должны располагаться по его углам. При этом правило треугольника можно использовать одновременно и в высоту. Например, самое маленькое дерево высадить на одной из вершин треугольника, дерево побольше – на второй, а самое большое – на третьей. И длина отрезков треугольника, и высота деревьев должны хотя бы приблизительно укладываться в рассматриваемую формулу.

Это же соблюдается, когда деревья высаживаются в одну линию. Расстояния между первым и вторым деревом должно составлять 0,68 частей, между вторым и третьим – 0,32. При этом деревьям желательно быть разноуровненными и по высоте относительно друг друга максимально приближаться к золотому сечению. В итоге вся композиция обретет объем и законченность.

Выводы.

1) Рассмотрев такие примеры, как мир растений, мы можем прийти в неожиданному выводу о том, что некоторые числа являются не просто абстрактными понятиями, а наоборот, основополагающими принципами красоты и гармонии вокруг. Становится ясно, что слова о том, что природа прекрасна в своем беспорядке, являются не совсем верными, ведь приглядевшись, как следует, даже в хаосе мы можем найти четкие математические принципы.

2) Регулярное появление садов, выполненных по принципу золотого сечения, в разные исторические эпохи и в разных уголках нашей планеты, а также их поразительная популярность вплоть до наших дней доказывает целесообразность применения данного принципа, и является рекомендацией для современных ландшафтных архитекторов и в дальнейшем использовать золотое сечение при создании собственных проектов участков, садов и парков.

Аннотация. *В статье рассматривается универсальная геометрическая пропорция, известная под названием «золотое сечение»; приведены примеры нахождения этого сечения в природе и использования методик «золотых» пропорций в ландшафтной архитектуре; показана роль математики, в частности принципа золотого сечения, для создания гармоничных ландшафтных проектов.*

УДК 519.9

Щеклеин Д. А. (студ., 1 курс)
Научный руководитель – ст. преп. Смирнова Е. В.
Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова (Воронеж, Россия)

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРОРАНЖИРОВАННОЙ ЦЕНОЙ

Дискретные управляемые системы широко используются при моделировании в экономике, биологии, социологии. Они применяются, например (см. [1]) в задачах экономического планирования, обработки и передачи информации цифровыми электронными устройствами, технологии и организации производства. В таких моделях изменение структурных параметров объектов представлено разностными уравнениями, управляющее воздействие осуществляется пошагово.

Рассмотрим возмущенную дискретную линейно-квадратичную задачу оптимального управления вида

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k (x(k)-\xi_k)' F_k (x(k)-\xi_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} u'(k) R_k u(k) \to \min_u, \quad (1)$$

$$x(k+1) = A_k x(k) + B_k u(k) + l_k, \quad k = \overline{0, N-1}, \; x(0) = x^0. \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр. В задаче (1)–(2) весовые коэффициенты ε^k в критерии качества введены для ранжирования требований минимизации отклонений дискретных значений траектории от заданных величин.

Решение задачи (1)-(2) будем искать по формулам

$$x(k) = \sum_{j\ge 0} \varepsilon^j x_j(k), \; u(k) = \sum_{j\ge 0} \varepsilon^j u_j(k). \quad (3)$$

Применим метод «прямой схемы». Подставим соотношения (3) в (1)-(2). Минимизируемый функционал запишется в виде ряда

$$J_\varepsilon(u)=\sum_{j\geq 0}\varepsilon^j J_j. \qquad (4)$$

Применим условие оптимальности управления в форме принципа максимума Понтрягина (см., например [2]).

Для того чтобы управление $u^*(k)$, $k=\overline{0,N-1}$ доставляло минимум

$$J(u)=\sum_{k=0}^{N}(\tfrac{1}{2}(x(k)-\xi_k)'W_k(x(k)-\xi_k)+a_k'x(k))+\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}u'(k)R_ku(k),$$

где матрицы $W_k\geq 0$ $(k=\overline{0,N})$, а $R_k>0(k=\overline{0,N-1})$, траектории дискретного управляемого процесса удовлетворяют разностным уравнениям (2), необходимо и достаточно, чтобы $u^*(k)=R_k^{-1}B_k'p(k+1)$, где $p(k)$ есть решение задачи $p(k)=-W_k(x^*(k)-\xi_k)-a_k+A_k'p(k+1)$, $p(N)=-W_N(x^*(N)-\xi_N)-a_N$, x^* – траектория при u^*.

Итак, $u_0(k)=0$, $x_0(0)=x^0$, $x_0(k+1)=A_kx_0(k)+B_ku_0(k)+l_k$.

Рассмотрим задачи P_j $(j\geq 1)$.

$$P_j:\tilde{J}_j(u_j)=\sum_{k=1}^{m}\ (x_{j-k}(k)-\tilde{\xi}_j^k)'F_kx_j(k)+\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}u_j'(k)R_ku_j(k)\to\min_{u_j},$$

$$x_j(k+1)=A_kx_j(k)+B_ku_j(k),\quad k=\overline{0,N-1},\ x_j(0)=0,$$

$m=j\,(j=\overline{1,N-1})$ или $m=N\,(j\geq N)$; $\tilde{\xi}_j^k=\xi_j\,(k=j)$ или $\tilde{\xi}_j^k=0(k\neq j)$.

После решения задач $P_i\,(i=\overline{0,m-1},m\geq 1)$, будут найдены x_i, u_i, J_{2m-1}. $\tilde{J}_m(u_m)$ в задаче P_m совпадет с J_{2m} из (4), если отбросить члены, известные после решения задач P_i $(i=\overline{0,m-1},\ m\geq 1)$.

Определяем сопряженную переменную:

$$p_n(N)=\begin{cases}0, & 1\leq n<N,\\ -F_N(x_{n-N}(N)-\tilde{\xi}_N^n), & n\geq N,\end{cases}$$

$$p_n(k)=\begin{cases}A_k'p_n(k+1)-F_k(x_{n-k}(k)-\tilde{\xi}_n^k), & 1\leq k\leq n,\\ 0, & n+1\leq k\leq N-1.\end{cases}$$

Находим оптимальное управление по формулам:

$$u_n(k) = R_k^{-1} B'_k p_n(k+1).$$

Переменные состояния находим из соотношений

$$x_n(0) = 0, \quad x_n(k+1) = A_k x_n(k) + B_k u_n(k), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Приведем численный эксперимент, иллюстрирующий предложенный алгоритм. Рассмотрим задачу P_ε, заключающуюся в минимизации функционала

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2}(x^2(0) + \varepsilon(x(1)-10)^2 + \varepsilon^2(x(2)-20)^2 + \varepsilon^3(x(3)-50)^2 +$$
$$+ u^2(0) + 2u^2(1) + 4u^2(2))$$

на траекториях линейной системы

$$x(0) = 1, \; x(1) = x(0) + u(0), \; x(2) = 3x(1) + 2u(1), x(3) = 5x(2) + 2u(2).$$

При помощи предложенного алгоритма найдем нулевое, первое, второе и третье приближения решения задачи $P_\varepsilon(\varepsilon = 0{,}05)$.

Значения точного решения задачи, а также приближений решения представлены в таблицах 1-2.

Таблица 1

Управление

k	u_0	$u_0 + \varepsilon u_1$	$\sum_{k=0}^{2} \varepsilon^k u_k$	$\sum_{k=0}^{3} \varepsilon^k u_k$	u^*
0	0	0,45	0,555	0,60525	0,58267
1	0	0	0,0425	0,061	0,0539
2	0	0	0	0,00022	0,0016

Таблица 2

Переменная состояния

k	x_0	$x_0 + \varepsilon x_1$	$x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2$	$x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3$	x^*
0	1	1	1	1	1
1	1	1,45	1,555	0,60525	1,58267
2	3	4,35	4,75	4,93775	4,85587
3	15	21,75	23,75	24,693125	24,28257

Таблица 3

Сравнение значений функционала

$J_\varepsilon(u_0)$	$J_\varepsilon(u_0+\varepsilon\, u_1)$	$J_\varepsilon(\sum_{k=0}^{2}\varepsilon^k u_k)$	$J_\varepsilon(\sum_{k=0}^{3}\varepsilon^k u_k)$	$J_\varepsilon(u^*)$
2,962812	2,784844	2,772539	2,772307	2,771969

Значения из таблицы 3 подтверждают уменьшение значений функционала с каждым последующим приближением оптимального управления.

На рис. 1, 2 приведены графики точного решения и приближения для управления и траектории состояния.

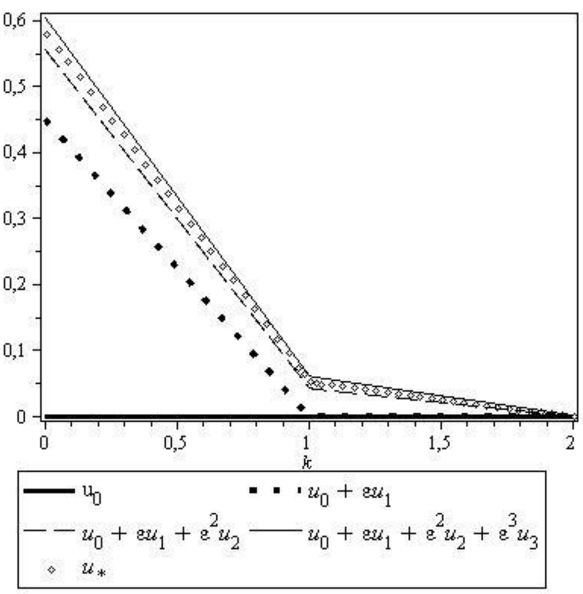


Рис. 1. Точное решение и приближения для управления

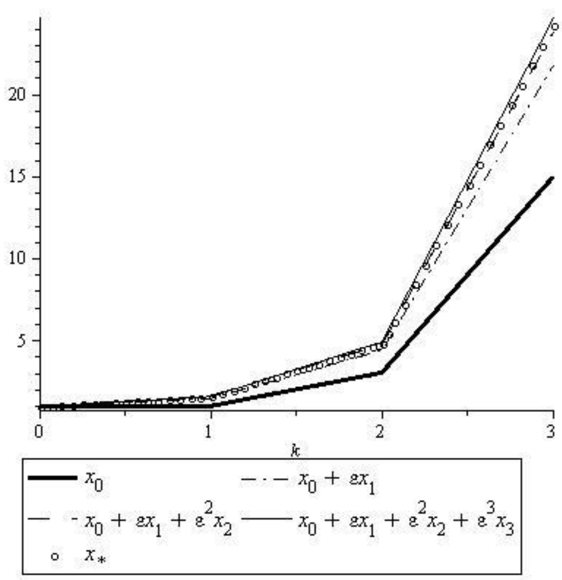


Рис. 2. Точное решение и приближения для переменной x

Аннотация. *В работе приведен и обоснован алгоритм решения возмущенной дискретной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с ранжированными требованиями минимизации отклонений дискретных значений траектории от заданных величин. Использован метод прямой схемы. Построен иллюстративный прим**ер.***

Литература

[1] - Бутковский, А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский – М. : Наука, 1965. – 474 с.

[2] - Моисеев, Н. Н. Методы оптимизации / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столярова. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

УДК 371.321.3

Яценко Н. В. (студ., 2 курс)
Науковий керивник – доц. Яловега І. Г.
Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди (Харків, Україна)

ВИВЧЕННЯ МЕТОДУ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Значення методу математичної індукції, його місце і роль в математиці є незаперечними та загальновідомими. Будучи тісно повя’заним з поняттям натурального числа, цей метод є надважливим в арифметиці, комбінаториці, алгебрі та теорії чисел, він застосовується в самих різноманітних галузях математики. Проте, нажаль, в шкільному курсі методу математичної індукції приділяють не досить багато уваги. Вивчення методу починається в 9 класі лише в класах з поглибленим вивченням математики, в 10 класі профільного рівня, та частково до нього повертаються під час доведення деяких теорем. Більш ґрунтовно метод математичної індукції вивчається в дисциплінах вищої математики: математичному аналізі, алгебрі та теорії чисел тощо. Вивчення методу математичної індукції є дуже важливим етапом формування математичного мислення школярів, і аналіз змісту навчального матеріалу відповідного цій темі в курсі шкільної математики став метою дослідження.

Метод математичної індукції входить до навчальних планів шкільного курсу математики, але, нажаль, виключений із стандартного рівня. В класах з поглибленим навчанням математики цей метод починають вивчати в 9 класі. Згідно навчальної програми для поглибленого вивчення з математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів в 9 класі «Метод математичної індукції» входить до теми «Послідовності» і вивчається після підтеми «Уявлення про границю послідовності» [2]. Після вивчення учень/учениця має розв'язувати вправи, що передбачають використання методу математичної індукції. У підручнику, рекомендованому Міністерством освіти і науки для загальноосвітніх навчальних закладів в 9 класі з алгебри з поглибленим навчанням, авторів А. Г. Мерзляк , В. Б. Полонський , М. С. Якір тема «Метод математичної індукції» вводиться с означення [2]. Загальних висновки робляться на підставі вивчення окремих випадків. На прикладі доведення рівності розкривається сутність індуктивних міркувань і формулюється алгоритм методу математичної індукції. В підручнику наводяться приклали доведення рівностей, нерівностей та подільності [1]. Також розглядається задача про поділ площини прямими так, щоб дві сусідні області можна було пофарбувати в різні кольори. Даний приклад активізує опорні знання с геометрії та показує застосування методу математичної індукції при доведенні геометричних тверджень [1].

В 10 класі тема математичної індукції зустрічається в 2 програмах: в профільному (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу), та в профільному для класів, які перешли на поглиблене вивчення математики лише в 10 класі. Згідно навчальної програми для 10 класу для профільного рівня (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів дана підтема знаходиться в загальній теми «Повторення вивченого за 9 клас» після підтеми «Рівняння і нерівності с двома змінними. У підручнику, рекомендованому Міністерством освіти і науки для загальноосвітніх навчальних закладів в 10 класі з алгебри для профільного рівня (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) авторів А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір, тема математична індукція дається на повторення, дається набір типових завдань в яких згадуються різні підходи до розв'язування завдань даним методом [2, 3].

Згідно навчальної програми для 10 класів с профільним рівнем навчання, для класів, які перешли на цей рівень лише в 10 класі, тема «Математична індукція» йде підтемою в темі «Функції, многочлени рівняння та нерівності» після підтеми «Ділення многочленів. Теорема Безу та наслідки з неї». Після вивчення учень/учениця має розв'язувати вправи, що передбачають використання методу математичної індукції. В підручнику рекомендованому Міністерством освіти і науки для загальноосвітніх навчальних закладів з алгебри 10 клас профільний рівень автора Є. П. Нелін тема «Математична індукція» вводиться з алгоритму математичної індукції [2]. Загальні висновки приводяться на основі застосування алгоритму, не підтверджуючи їх. В підручнику розглянутий один приклад на доведення рівності, а далі надається низка вправ на закріплення матеріалу [4].

Роблячи висновок щодо аналізу вивчення методу математичної індукції в загальноосвітніх навчальних закладах, хочеться відмітити, що ця надважлива тема, нажаль, включена не до всіх рівнів навчання, і, навіть, до тих рівнів, де вона вивчається, є багато питань. Так, в підручниках введення методу і підбір завдань часто не дають змоги відпрацювати відповідний матеріал для набуття навичок розв'язання вправ. Розробка більш структурованого набору вправ та доповнення візуалізаціями розв'язування задач мають допомогти полегшити опанування цієї складної та дуже важливої теми.

Анотація. *У статті проведено аналіз змісту навчального матеріалу з вивчення методу математичної індукції в загальноосвітніх навчальних закладах.*

Ключові слова: *метод математичної індукції, навчальна програма, доведення, рівність, нерівність, подільність.*

Література

[1] - Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Х.: Гімназія. 2017. - 416 с.

[2] - Міністерство освіти і науки України [Електронний ресурс] https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi.

[3] - Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початок аналізу: початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Х.:Гімназія. 2018. - 512 с.

[4] - Нелін Є. П. Алгебра і початок аналізу (профільний рівень): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Харків: Вид-во «Ранок». 2018. - 272 с.

UDC 378

Andreev S. E. (student, third year),
Strok V. A.(student, third year)
Scientific supervisor - aassociate Prof. Naumov D. I.
Belarusian State Economic University (Minsk, Belarus)

PEDAGOGICAL SUPPORT AS A FACTOR IN THE FORMATION OF PROFESSIONAL CULTURE OF STUDENTS

Throughout history, one of the main tasks of education is to train not only a competent specialist, but also a person who shares the spiritual values of society. Culture and work contribute to the socialization of the individual, its harmonious development.

In each profession, in addition to direct labor activities aimed at creating goods, there is a set of rules and values that are shared by the participants of labor. Professional culture as a social phenomenon provides a link between the cultural values of society and the professional activity of an individual. The formation of a professional culture of a specialist occurs even during his studies at a University or College.

Currently, there are two opposite trends in labor activity: integration and disintegration. On the one hand, professional freedom of choice and social responsibility of specialists in all fields are growing. On the other hand, there are negative trends that are reflected in the increased social disintegration, multidirection, and inconsistency of professional strategies.

Professional culture implies professional competence that combines theoretical knowledge and practical skills, the ability to quickly relearn and acquire new knowledge, and the ability to navigate non-standard situations. Thus, the activity of teachers in a transforming society should be aimed at forming the professional culture of future specialists.

In recent decades, a system of education that is focused on the individual and its development has begun to take shape. Concepts for modernizing education are being developed and adopted in the Republic of Belarus. There is a transformation of the educational process, the main principle of which is to take into account the individuality of each student at all levels of education.

According to a survey by the information and analytical center under the Administration of the President of the Republic of Belarus, 14% of the Belarusian population believes that the main problem of modern education in 2018 is the lack of teachers in institutions. In addition, 12.5 % of respondents note the greatest concern in the lack of professional training of students in higher education institutions [4, p.103].

In addition to the fact that the modern post-Soviet space has faced a number of changes in the economy and public policy that seek to modernize education, pedagogical support is still a mandatory component in education.

One of the main missions of modern education is the harmonious development of the individual, which is associated with the realization of creative abilities. The need for a professionally competent person is one of the leading factors in the labor market. However, for the modern individual, the key role in the profession is to get the maximum profit. The role of teachers in supporting workplace choice is often reduced.

Of all the variety of historically formed types of accompaniment, one of the most influential is pedagogical. Pedagogical support is a complex of social, socio-psychological, legal and other types of support, as well as an integral part of the educational process.

It does not apply to specific students, but at the same time it is targeted. The goals of pedagogical support are: a high level of educational activity and independence of students, the ability to evaluate the results of their activities, the acceptance and implementation of norms and rules, etc.

Pedagogical support implies a permanent process of interaction between the teacher and the student, which is not regulated by normative provisions, but is based on the moral values of the subjects [2]. Providing support is based on personal responsibility, which allows you to maximize the creative potential of both parties. The result of pedagogical support is the implementation of specific actions on the part of teachers, and not the development of recommendations that involve the implementation of the proposed procedures by the students themselves.

As a rule, the basis for decision-making in the maintenance process is a preliminary diagnosis. Preliminary diagnosis of a problem situation allows you to make informed decisions based on an objective study of the problem, which reduces the risk of making emotional, thoughtless decisions. Thus, pedagogical support implies goodwill on both sides, emotional involvement in the process. At the same time, the absence of strict regulations does not mean that the subjects of pedagogical support are guided by intuition and experience.

There is a problem of evaluating the results of implementing pedagogical support in practice. As criteria and indicators of the effectiveness of support, the ability to interact creatively, involvement in active activities, educational and personal achievements of students, etc. are singled out. However, these criteria characterize the maintenance process itself, but do not fully reflect its effectiveness.

Interaction between teachers and students plays a significant role in shaping the professional culture of students. It is important to note that cooperation allows you to develop not only creative qualities, but also expand the experience of joint activities.

As a result of interaction, the student develops new skills. In addition to the fact that the role of the teacher is characterized by consulting and informational support of students, students should have an active position in understanding their own goals.

Researcher S. V. Tereshchenko notes that in the process of university education, students should acquire the following entrepreneurial competencies: personal (creativity, initiative), social (cooperation, ability to work in a team), professional (knowledge in various fields, for example, economics or finance) [3].

The formation of professional culture depends on the situation where students show a creative approach, which is reduced to actualization and expansion of potential.

In turn, creativity forms the creative orientation of the individual and contributes to the creation of prerequisites for high-quality training of the individual. So, the teacher intends to solve the following tasks: to ensure the independence of students in educational activities, to change the management style with teachers through creative cooperation, to involve students to get a new professional and creative experience [1, p. 189].

Thus, pedagogical support is an integral part of the educational process, which implies a continuous process of interaction between teachers and students, based on the moral values of the subjects.

Abstract: *this paper examines the essence of pedagogical support, describes the need for its implementation in the formation of professional culture, and provides criteria for the effectiveness of support in the development of personality.*

Keywords: *pedagogical support, professional culture, personality, education.*

Literature

[1] - Bazavlutskaya, L. M. Pedagogical conditions of effective functioning of the system of formation of organizational culture in future managers / L. M. Bazavlutskaya / / World of science, culture, education. – 2010. – N. 5. – Pp. 186-190.

[2] - Psychological and pedagogical support of the educational process at the University / [T. A. Babakova et al.]; edited by T. A. Babakova. – Petrozavodsk: PetrSU Publishing house, 2015. – 104 p.

[3] - Tereshchenko, S. V. Entrepreneurial competencies: European approach to student learning / S. V. Tereshchenko // Problems of modern science and education. – 2017. – N. 5. – Pp. 41-45.

[4] - The Republic of Belarus in the mirror of sociology: collection of materials of sociological research / Information and analytical center under the Administration of the President of the Republic of Belarus. – Minsk, 2018. – 180 p.

Баталова Т. С. (студ., 5 курс)
Науковий керівник - ст. викл. Нестеренко В. О.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ВИКОРИСТАННЯ ПЕРЕДАТОЧНОЇ ФУНКЦІЇ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ МЕХАНІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Розглянемо математичну модель у вигляді лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами. Такі моделі з'являються при дослідженні електричних ланцюгів, механічних коливань та інші. В даній роботі розглядається застосування передаточної функції до розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР) як для нульових так і ненульових початкових умов.

При розв'язанні рівнянь застосуємо перетворення Лапласа. Розглянемо випадок нульових початкових умов.

Нехай треба розв'язати ЛНДР n – го порядку

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t) \tag{1}$$

при нульових початкових умовах $x_0 = x_0' = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$, при $t = 0$. Коефіцієнти a_i $(i = 1,2, \dots, n)$ дійсні числа, функція $f(t)$ є оригіналом. Переходимо до зображення заданого рівняння:

$$x(t) \leftarrow X(p), x'(t) \leftarrow pX(p), \dots, x^{(n)} \leftarrow p^n X(p)\ , f(t) \leftarrow F(p)$$

$$X(p)(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) = F(p) \tag{2}$$

Позначимо через $Q(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$, тоді запишемо рівняння (2) у вигляді

$$X(p) = \frac{1}{Q(p)} F(p) \tag{3}$$

Функцію $\Pi(p) = \frac{1}{Q(p)} = \frac{1}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n},$ (4)

на яку треба помножити зображення $F(P)$ правої частини рівняння для того, щоб одержати зображення розв'язку, для нульових початкових умов, називають *передаточною функцією*. Тоді рівняння (4) запишемо у вигляді

$$X(p) = \Pi(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{F}(\mathrm{p}) \tag{5}$$

Позначимо оригінал передаточної функції через $\pi(t)$, тобто

$$\pi(t) \longleftarrow \Pi(p) \tag{6}$$

тоді за теоремою про згортку оригіналів розв'язок $x(p)$ рівняння (1) може бути знайдено у вигляді

$$x(t) = \int_0^t \pi(\tau) f(t-\tau) d\tau \tag{7}$$

Цей інтеграл можна записати в іншій формі. Нехай в рівнянні (1), права частина є одиничною функцією Хевісайда $f(t) = \delta(t) = 1$. Початкові умови нульові. Позначимо розв'язок такого рівняння через $x_1(t)$, тоді за формулою (7)

$$x_1(t) = \int_0^t \pi(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = \int_0^t \pi(\tau) d\tau$$

Знаходимо похідну від $x_1(t)$ одержимо $x'_1(t) = \pi(t)$. Таким чином дістали, що оригінал передаточної функції дорівнює похідній від $x_1(t)$тобто похідній від розв'язку заданого рівняння, коли $f(t)$ та початкові умови нульові. Тоді розв'язок рівняння (1), тобто інтеграл (7), запишемо у вигляді

$$x(t) = \int_0^t x_1(\tau) f(t-\tau) d\tau \tag{8}$$

Інтегруємо (8) методом інтегрування частинами:

$$x(t) = x_1(\tau) f(t-\tau)/_0^t + \int_0^t x_1(\tau) f'(t-\tau) d\tau = x_1(t) f(0) +$$
$$\int_0^t f'(\tau) x_1(t-\tau) d\tau,$$

оскільки згортка функцій не змінюється при їх перестановки та $x_1(0) = 0$.

Таким чином знаходимо розв'язок рівняння (1) :

$$x(t) = x_1(t) f(0) + \int_0^t f'(\tau) x_1(t=\tau) d\tau. \tag{9}$$

Формули (8), (9) дають нам інтеграл Дюамеля, який виражає розв'язок рівняння (1).

Розглянемо рівняння (1) при ненульових початкових умовах. Оригінал передаточної функції можна застосувати і цьому випадку. Нехай $x(t)$ розв'язок рівняння (1) при ненульових початкових умовах. Перейдемо до рівняння у формі зображень: оскільки $x(t) \longleftarrow X(p), x'(t) \longleftarrow pX(p) - x_0, \ldots,$

$$x^{(n)}(t) \longleftarrow p^n X(p) - x_0 p \quad n-1 - \cdots - x_j^{(n-1)},$$

$$f(t) \longleftarrow F(p),$$

тоді маємо

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n)X(p) -$$

$$-(b\_0 + b\_1\, p + \cdots + b\_(n-1)\, p\hat{}(n-1)\,) = F(p), \qquad (10)$$

де

$$\begin{cases} b_0 = x_0^{(n-1)} + a_1 x_0^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} x_0 \\ b_1 = x_0^{(n-2)} + a_1 x_0^{(n-3)} + \cdots + a_{n-2} x_0 \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ b_k = x_0^{(n-k-1)} + a_1 x_0^{(n-k-2)} + \cdots + a_{n-k-1} x_0 \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ b_{n-1} = x_0 \end{cases} \qquad (11)$$

Тоді рівняння (10) записуємо у вигляді

$$X(p) = \Pi(p)F(p) + \sum_{k=0}^{k=n-1} b_k p^k \Pi(p), \qquad (12)$$

де $\Pi(p)$ – передаточна функція, її оригінал $\pi(t) \longleftarrow \Pi(p)$.

Оскільки $\pi(t) = x_1'(t)$, де $x_1(t)$ - розв'язок заданого рівняння при $f(t) = \delta(t)$ та нульових початкових умовах, то $\pi(0) = \pi'(0) = \cdots = \pi^{(n-2)}(0) = 0$. За теоремою про диференціювання оригінала знаходимо

$$\begin{cases} \pi'(t) \longleftarrow p\Pi(p) \\ \pi''(t) \longleftarrow p^2\Pi(p) \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \pi^{(n-1)}(t) \longleftarrow p^{n-1}\Pi(p) \end{cases} \qquad (13)$$

Тоді розв'язок рівняння (1) , коли початкові умови ненульові та заданою функцією $f(t)$, має вигляд

$$x(t) = \int_0^t \pi(\tau) f(t-\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{k=n-1} b_k \pi^{(k)}(t) \qquad (14)$$

де b_r $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ визначаються за формулами (11), $\pi(t)$ оригінал передаточної функції.

Висновок. Для розв'язання ЛНДР знаходимо передаточну функцію, оригінал передаточної функції, далі для випадку нульових початкових умов використовуємо формулу (9), а для випадку ненульових початкових умов формулу (14). Зображення функції $f(t)$ не знаходимо.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $x" - 2x' + 10x = te^t$.

Розв'язання. Початкові умови не задані, тому вважаємо, що $x_0 = C_1$, $x'_0 = C_2$, де C_1, C_2 довільні сталі. Передаточна функція для нашого рівняння має вигляд (4)

$$\Pi(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 10} = \frac{1}{(p-1)^2 + 9} = \frac{1}{3}\frac{`3}{(p-1)^2 + 3^2}.$$

Її оригінал дорівнює $\pi(t) = \frac{1}{3}e^t \sin 3t$, далі знаходимо складові для формули (14).

$$\int_0^t \pi(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{3}e^t \sin 3t\,(t-\tau)e^{t-\tau}d\tau = \frac{1}{3}e^t \int_0^t (t-\tau)\sin 3\tau =$$

$$= \frac{1}{9}e^t(3t - \sin 3t)$$

$$\pi'(t) = \frac{1}{3}e^t(\sin 3y - 3\cos 3t), \quad b_0 + a_1x_0 = C_2 - 2C_1,\ b_1 = x_0 = C_1.$$

Тоді загальний розв'язок буде

$$x(t) = \frac{1}{9}e^t(3t - \sin 3t) + (C_2 - 2C_1)\,\frac{1}{3}e^t \sin 3t +$$

$$+ C_1\frac{1}{3}e^t(\sin 3y - 3\cos 3t),$$

або

$$x(t) = \frac{1}{9}e^t(3t + (3C_2 - 6C_1 - 1)\sin 3t + 9C_1\cos 3t).$$

Анотація. *В роботі розглядається застосування передаточної функції при знаходженні розв'язків ЛНДР, які є математичними моделями механічних процесів.*

Література

[1] - Пак В. В. Вища математика. Підручник /В. В. Пак, Ю. Л. Носенко.– К.:Либідь, 1996. – 440с.

[2] - Саппа Ж. В. Операційне числення. Конспект лекцій/ Ж. В. Саппа. – Харків: Вид-во ХНАДУ, 2001. - 24с.

УДК 517.968

Буланая М. С. (студ., 1 курс)
Научный руководитель – доц. Сапронов И. В.
Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова (Воронеж, Россия)

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$C_0x^{2q}\vartheta' + C_1x^q\vartheta + C_2\int_0^x \vartheta(t)dt + qC_0x^{2q-1}\vartheta = 0\ , \quad 0 \le x \le \delta\ , \qquad (1)$$

где C_0, C_1, C_2 являются ограниченными операторами в банаовом пространстве E, причем C_0 имеет ограниченный обратный C_0^{-1}.

Теорема. Пусть операторный пучок $B_\upsilon = -C_0\upsilon + C_1 - C_2\frac{1}{\upsilon}$ имеет характеристическое число $\upsilon + i\mu$ $(\upsilon > 0)$, которому соответствует собственный вектор $e_0^1 + ie_0^2$ и присоединенный вектор $e_1^1 + ie_1^2$. Тогда для уравнения (1) существуют решения вида

$$\vartheta_p = \frac{1}{x^q}e^{\upsilon\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\left[\left(\bar{e}_p^1 sin\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right) + \bar{e}_p^2 cos\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{e}_{p-1}^1 sin\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right) + \bar{e}_{p-1}^2 cos\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)\right)\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right], \quad p = 0{,}1. \qquad (2)$$

Доказательство. В дальнейшем воспользуемся формулами

$$\int e^{\alpha t}cos\mu t dt = e^{\alpha t}\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+\mu^2}cos\mu t + \frac{\mu}{\alpha^2+\mu^2}sin\mu t\right]$$

$$\int e^{\alpha t}sin\mu t dt = e^{\alpha t}\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+\mu^2}sin\mu t - \frac{\mu}{\alpha^2+\mu^2}cos\mu t\right].$$

1) Рассмотрим случай $p = 0$, тогда

$$\vartheta_0' = -qx^{-q-1}e^{\upsilon\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\left(\bar{e}_0^1 sin\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right) + \bar{e}_0^2 cos\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)\right) -$$

$$-\frac{\upsilon}{x^{2q}}e^{\upsilon\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\left[\bar{e}_0^1 sin\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)+\bar{e}_0^2 cos\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)\right]- \tag{2}$$

$$-\frac{1}{x^{2q}}e^{\upsilon\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\left[\bar{e}_0^1\mu cos\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)+\bar{e}_0^2\mu sin\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)\right].$$

$$\int_0^x\vartheta_0(z)dz=\int_0^x\frac{1}{z^q}e^{\upsilon\int_z^\delta\frac{dt}{t^q}}\left[\bar{e}_0^1 sin\left(\mu\int_z^\delta\frac{dt}{t^q}\right)+\bar{e}_0^2 cos\left(\mu\int_z^\delta\frac{dt}{t^q}\right)\right]dz.$$

После замены $\int_z^\delta\frac{dt}{t^q}=u$ получаем следующий интеграл

$$-\int[e^{\upsilon u}\bar{e}_0^1 sin(\mu u)+e^{\upsilon u}\bar{e}_0^2 cos(\mu u)]du=\left\{\bar{e}_0^1e^{\upsilon u}\left[\frac{\upsilon}{\upsilon^2+\mu^2}sin(\mu u)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\mu}{\upsilon^2+\mu^2}cos(\mu u)\right]+\bar{e}_0^2e^{\upsilon u}\left[\frac{\upsilon}{\upsilon^2+\mu^2}cos(\mu u)+\frac{\mu}{\upsilon^2+\mu^2}sin(\mu u)\right]\right\}\Big|_{u=\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}= \tag{4}$$

$$=-\left\{\bar{e}_0^1e^{\upsilon\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\left[\frac{\upsilon}{\upsilon^2+\mu^2}sin\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)-\frac{\mu}{\upsilon^2+\mu^2}cos\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\bar{e}_0^2e^{\upsilon\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\left[\frac{\upsilon}{\upsilon^2+\mu^2}cos\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)+\frac{\mu}{\upsilon^2+\mu^2}sin\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)\right]\right\},$$

Подставляя (3) и (4) в уравнение (1), получаем

$$-C_0\upsilon e^{\upsilon\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\left[\bar{e}_0^1 sin\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)+\bar{e}_0^2 cos\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)\right]$$

$$-C_0e^{\upsilon\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\left[\bar{e}_0^1\mu cos\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)-\right.$$

$$\left.-\bar{e}_0^2\mu sin\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)\right]+C_1e^{\upsilon\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\left[\bar{e}_0^1 sin\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)+\bar{e}_0^2 cos\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)\right]-$$

$$-C_2\left\{\bar{e}_0^1e^{\upsilon\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\left[\frac{\upsilon}{\upsilon^2+\mu^2}sin\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)-\frac{\mu}{\upsilon^2+\mu^2}cos\left(\mu\int_x^\delta\frac{dt}{t^q}\right)\right]+\right. \tag{5}$$

$$+\bar{e}_0^2 e^{\upsilon\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}}\left[\frac{\upsilon}{\upsilon^2+\mu^2}cos\left(\mu\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}\right)+\frac{\mu}{\upsilon^2+\mu^2}sin\left(\mu\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}\right)\right]\Bigg\}=0$$

Приравнивая коэффициенты в (5) при $e^{\upsilon\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}}sin\left(\mu\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}\right)$ и $e^{\upsilon\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}}cos\left(\mu\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}\right)$ получаем

$$\begin{cases}-C_0\upsilon\bar{e}_0^1+C_0\bar{e}_0^2\mu+C_1\bar{e}_0^1-C_2\dfrac{\upsilon}{\upsilon^2+\mu^2}\bar{e}_0^1-C_2\dfrac{\mu}{\upsilon^2+\mu^2}\bar{e}_0^2=0\\ -C_0\upsilon\bar{e}_0^2-C_0\bar{e}_0^1\mu+C_1\bar{e}_0^2+C_2\dfrac{\mu}{\upsilon^2+\mu^2}\bar{e}_0^1-C_2\dfrac{\upsilon}{\upsilon^2+\mu^2}\bar{e}_0^2=0\end{cases} \qquad (6)$$

Система уравнений (6) означает, что

$$B_{\upsilon+i\mu}(\bar{e}_0^1+i\bar{e}_0^2)=0.$$

Следовательно, $\upsilon+i\mu$ является характеристическим числом, а $\bar{e}_0^1+i\bar{e}_0^2$ собственным вектором операторного пучка B_υ. Если положить $\bar{e}_0^1=e_0^1$, $\bar{e}_0^2=e_0^2$, тогда υ_0 будет решением уравнения (1).

2) Рассмотрим случай $p=1$, тогда решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\vartheta_1(x)=\frac{1}{x^q}e^{\upsilon\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}}\left[\left(\bar{e}_0^1 sin\left(\mu\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}\right)+\bar{e}_0^2 cos\left(\mu\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\bar{e}_0^1 sin\left(\mu\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}\right)+\bar{e}_0^2 cos\left(\mu\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}\right)\right)\int_x^{\delta}\frac{dt}{t^q}\right] \qquad (7)$$

Пользуясь формулами

$$\int e^{\upsilon t}cos(\mu t)tdt=e^{\upsilon t}t\left[\frac{\upsilon}{\upsilon^2+\mu^2}cos(\mu t)+\frac{\mu}{\upsilon^2+\mu^2}sin(\mu t)\right]-$$

$$-e^{\upsilon t}\left\{\frac{\upsilon^2}{(\upsilon^2+\mu^2)^2}cos(\mu t)+\frac{2\upsilon\mu}{\upsilon^2+\mu^2}sin(\mu t)-\frac{\mu^2}{\upsilon^2+\mu^2}cos(\mu t)\right\},$$

$$\int e^{\upsilon t}sin(\mu t)tdt=e^{\upsilon t}t\left[\frac{\upsilon}{\upsilon^2+\mu^2}sin(\mu t)-\frac{\mu}{\upsilon^2+\mu^2}cos(\mu t)\right]-$$

$$-e^{\upsilon t}\left\{\frac{\upsilon^2}{(\upsilon^2+\mu^2)^2}sin(\mu t)-\frac{2\upsilon\mu}{\upsilon^2+\mu^2}cos(\mu t)-\frac{\mu^2}{\upsilon^2+\mu^2}sin(\mu t)\right\}$$

и проводя рассуждения, аналогичные для случая $p = 0$, получаем соотношения для определения неизвестных величин в (7)

$$B_{\upsilon+i\mu}(\bar{e}_0^1 + i\bar{e}_0^2) = 0$$

$$B_{\upsilon+i\mu}(\bar{e}_0^1 + i\bar{e}_0^2) + B'_{\upsilon+i\mu}(\bar{e}_0^1 + i\bar{e}_0^2) = 0.$$

Следовательно, $\upsilon + i\mu$ является характеристическим числом, а $\bar{e}_0^1 + i\bar{e}_0^2$ и $\bar{e}_1^1 + i\bar{e}_1^2$ являются соответственно собственным и присоединенным векторами операторного пучка B_υ. Если положить $\bar{e}_0^1 = e_0^1$, $\bar{e}_0^2 = e_0^2$, $\bar{e}_1^1 = e_1^1$, $\bar{e}_1^2 = e_1^2$ тогда $\upsilon_1(x)$ будет решением уравнения (1). Теорема доказана.

Аннотация. *Изучается интегральное уравнение Вольтерра I рода с особенностью и достаточно гладким ядром в пространстве суммируемых функций со значениями в банаховом пространстве, ведется построение многопараметрического семейства решений.*

Ключевые слова: *интегральное уравнение, банахово пространство, операторный пучок, спектр.*

Литература

[1] – Сапронов И. В., Зенина В. В., Нитченко А. В. Уравнения Вольтерра в банаховом пространстве в комплексном случае / Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. - 2019. - Т. 7. - № 1 (44).- С. 346-347.

[2] – Сапронов И. В., Спирина Н. М., Зенина В. В. Об одном классе решений интегрального уравнения в специальных банаховых пространствах / Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. - 2019. - Т. 7. -№ 1 (44). - С. 349-350.

[3] – Сапронов И. В., Зюкин П. Н., Зенина В. В. Решения уравнения Вольтерра I рода / Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. - 2018. - Т. 6. -№ 6 (42). - С. 312-313.

[4] – Сапронов И. В., Зюкин П. Н., Зенина В. В. Некоторые семейства решений уравнения Вольтерра I рода / Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. - 2018. - Т. 6. - № 6 (42).- С. 313-314.

[5] – Сапронов И. В., Зенина В. В., Ткачев Д. А. Интегральное уравнение Вольтерра второго рода произвольного порядка с регулярной особенностью в банаховом пространстве / Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. - 2017. - Т. 5. -№ 1 (27). - С. 245-249.

УДК 517

Волинцев О. М. (студ., 1 курс)
Лємєшев В. С. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Гадецька С. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ДЕЯКІ НЕСТАНДАРТНІ ПІДХОДИ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Задачі, пов'язані з границями функцій однієї змінної, пропонуються практично на усіх математичних змаганнях [1], оскільки дають можливість студентам продемонструвати як глибокі фундаментальні знання, так і навички нестандартного мислення. Метою роботи було дослідження деяких нестандартних прийомів розв'язання таких задач, пов'язаних з першою і другою визначними границями.

При обчисленні границь вказаного типу будемо спиратися на теорему про заміну нескінченно малих величин еквівалентними до них, згідно якій границя відношення двох нескінченно малих величин дорівнює границі відношення еквівалентних до них величин. В наступній задачі щодо обчислення границі $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, запропонованої на олімпіаді Білоруського державного університету у 2005 році, продемонструємо, як послідовні перетворення за допомогою тригонометричних формул приводять даний вираз до вигляду, який дозволяє застосувати першу визначну границю і, за наведеною теоремою, відповідну до неї еквівалентність.

Помножимо і поділимо вираз, який стоїть під знаком границі, на $2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}. \qquad (1)$$

Помножуючи послідовно $n-1$ разів чисельник і знаменник виразу (1) на 2 і застосовуючи формулу синуса подвійного кута, приходимо до відповіді:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{4}}{2^2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\ldots=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{2}{\pi}.$$

Особливу увагу звертаємо на те, що замінювати під знаком границі нескінченно малі величини на еквівалентні до них в сумі або різниці можна лише у випадку, якщо така сума (різниця) не дорівнюватиме нулю. Розуміння цього важливого факту допомагає уникнути грубих помилок. Наприклад, при знаходженні границі $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$ використання тригонометричних формул і відповідних еквівалентностей дозволяє швидко отримати результат: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$, в той час як неприпустиме використання в різниці чисельника еквівалентностей $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)\ \left(\alpha(x)\to 0\right)$, привело би, очевидно, до неправильної відповіді.

В наступному прикладі, навпаки, є можливість скористатися еквівалентностями в сумі нескінченно малих величин, тому що відповідні перетворення приводять до відмінного від нуля результату.

Задача [2]. Знайти a і b, якщо $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\beta x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2x\sin x\right)}{1-\sqrt[5]{1+5x^2}}$.

Використовуючи відповідні еквівалентності в лівій і правій частинах рівняння, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x+\frac{\beta^2x^2}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cdot x}{-\frac{1}{5}\cdot 5x^2},\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta^2}{2}\right)=2,$$

що можливо лише при $\alpha=0,\ \frac{\beta^2}{2}=2$, звідки $\beta=\pm 2$. Отже, $\alpha=0,\ \beta=\pm 2$.

Аналогічні міркування можна застосувати до наступної задачі, яку було запропоновано у 2010 році на олімпіаді Фінансового університету (РФ), де замінювання окремих доданків під знаком границі на еквівалентні до них нескінченно малі величини є припустимим.

Задача. Обчислити границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2010}-2009\right)^{n}$.

Скористаємося другою визначною границею:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1^{\frac{1}{n}}-1\right)+\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)+\ldots+\left(2010^{\frac{1}{n}}-1\right)+1\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln 2+\ldots+\frac{1}{n}\ln 2010+1\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\ln\left(2010!\right)+1\right)^{n}=e^{\ln\left(2010!\right)}=2010!.$$

Окремо відмітимо ще одну важливу теорему, згідно якої добуток нескінченно малої величини на величину обмежену є нескінченно малою величиною. Продемонструємо застосування цього твердження при обчисленні границі $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\ln\left(x+1\right)\right)-\cos\left(\ln x\right)\right)$.

Скориставшись послідовно формулою різниці косинусів, маємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-2\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^{2}+x\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x}\right)\right)=$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^{2}+x\right)\right)\cdot\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^{2}+x\right)\right)\right)=0,$$

оскільки функція $\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^{2}+x\right)\right)$ є обмеженою, а множник $\frac{1}{x}$ – нескінченно мала величина при $x\to+\infty$.

Анотація. *В роботі аналізуються деякі нестандартні прийоми обчислення границь, пов'язаних з першою і другою визначними границями. Фундаментальні твердження підкріплюються конкретними прикладами.*

***Ключові слова**: границя функції, визначні границі, еквівалентність.*

Література

[1] - Всеукраїнські олімпіади з математики серед студентів технічних, економічних та аграрних ВНЗ: 2005-2010 рр./ М. І. Деркач, Ю. Є. Обжерін, О. І. Песчанський. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2011. – 120 с.

[2] - Беркович Ф. Д. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями: учебное пособие / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий, В. И. Шлыков. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. – 171 с.

Горбунова А.(студ., 2 курс)
Науковий керівник – доц. Бобрицька Г. С.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ОЦІНКИ ВАРТОСТІ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

Середньоринкову вартість транспортного засобу можна розрахувати за допомогою онлайн калькулятора, що міститься на сайті Міністерства розвитку економіки, торгівлі та сільського господарства України. Для цього достатньо ввести марку, модель та рік випуску транспортного засобу. На жаль, для марки Peugeot немає моделі 405, тому обирали середнє значення між марками 307 та 507, які були присутніми у списку. При такому розрахунку видається наступна інформація: вартість нового транспортного засобу такої марки, строк експлуатації (32 роки) та коефіцієнт за строком експлуатації (4). Для двох вищезазначених марок вартість становила 20361,32 грн. та 31637,32 грн. Середнє значення:

$$P = \frac{20361{,}32 + 31637{,}32}{2} = 25999{,}32$$

Оцінити вартість транспортного засобу можна самостійно. Для цього, в будь-якому випадку, доведеться переглянути низку оголошень про продаж автомобілів, знайти кілька оголошень про продаж аналогічних машин – з аналогічним роком випуску і моделі, об’ємом двигуна і пробігом. І, виходячи з цього, вже визначити можливу ціну свого автомобіля. Важливим фактором при такій оцінці є перевірка дати виставлення оголошення та постійне відслідковування цих оголошень з метою виявлення оголошень з явно завищеною вартістю.

Оцінити реальну ринкову ціну можливо, проаналізувавши дані про продаж автомобілів цієї марки та відповідного стану на сайтах продажу автомобілів, найпопулярнішим з яких є сайт auto.ria.com.

На цьому сайті було 6 оголошень з продажу автомобілів Peugeot 405 1988 року випуску. Одне з цих оголошень було з явно завищеною або помилковою вартістю 56000 доларів США, що еквівалентно 1 354 080 грн. Для розрахунку вартості ми не враховували це оголошення. Пробіг цих автомобілів був різний від 200 тис. до 999 тис., причому прямої залежності між пробігом та вартістю не спостерігалось.

За даними цього сайту середня вартість автомобіля Peugeot 405:

$$\mathrm{P} = \frac{33794 + 53482 + 48360 + 48180 + 23920}{5} = 41547$$

Основним підходом до визначення ринкової вартості транспортних засобів є порівняльний підхід. *Порівняльний підхід* ґрунтується на аналізі цін продажу (пропозиції) транспортного засобу (ТЗ), ідентичних або аналогічних оцінюваному на первинному чи вторинному ринках ТЗ, з відповідним коригуванням, що враховує відмінності між об’єктом порівняння та об’єктом оцінки. Під первинним слід розуміти ринок нових ТЗ, під вторинним – ринок ТЗ, які були в користуванні. Для визначення вартості за порівняльним підходом використовуються статистично усереднені цінові дані ТЗ, які були відчужені в Україні, за умов, що вони відповідають змісту поняття «ринкова вартість», зокрема ґрунтуються на даних ринку ТЗ і зведені в довідниках, до яких висуваються вимоги щодо науковості, об’єктивності, об’ємності інформації.

Найбільш вірогідним методом порівняльного підходу до оцінки ТЗ є метод, заснований на аналізі цін ідентичних ТЗ. За цим методом вартість визначається на базі середньої ціни продажу (пропозиції) ідентичного ТЗ з відповідним строком експлуатації. Подальше коригування враховує різницю між пробігом, комплектністю, укомплектованістю, технічним станом об’єкта порівняння та об’єкта оцінки.

У разі неможливості визначення вартості КТЗ з урахуванням цін ідентичних ТЗ допускається використання методу, заснованого на аналізі цін аналогічних транспортних засобів. За цим методом вартість ТЗ визначається відповідно до цінових даних, аналогічних, але не ідентичних ТЗ, з належним або скоригованим строком експлуатації. Подальше коригування вартості здійснюється шляхом врахування різниці між пробігом, комплектністю, укомплектованістю, технічним станом об’єкта порівняння та об’єкта оцінки.

Коригування, які застосовуються в порівняльному підході, приймаються у вигляді коефіцієнта (відсотка) до середньої ціни ТЗ або у вигляді грошової суми, що додається або вираховується з цієї ціни, а також комбінування зазначених засобів. Коригування вартості ТЗ *з причин різниці в пробігу* здійснюється коефіцієнтом коригування ринкової вартості ТЗ за величиною пробігу; *з причин різниці технічного стану* – процентом додаткового збільшення (зменшення) ринкової вартості ТЗ залежно від умов догляду, зберігання, використання та ін.; *з причин функціонального зносу ТЗ* – коефіцієнтом функціонального зносу; *з причин особливостей економічного стану в різних регіонах України і різних країнах світу* – коефіцієнтом ринку регіону та коефіцієнтом коригування вартості ТЗ у країні придбання до його вартості в провідних країнах-експортерах. Вартість ТЗ коригується відповідною грошовою сумою, яка враховує його комплектність, укомплектованість, наявність пошкоджень, які потребують відновлювального ремонту, відновлення і (чи) оновлення складників.

Отже, підсумуємо вищезазначене. Узагальнено матеріал щодо діючої практики проведення оцінки транспортних засобів іноземного виробництва, які були у використанні, та поглиблено окремі теоретичні аспекти стосовно принципів визначення ринкової вартості та послідовності оцінки автомобілів марки Peugeot. Встановлено, що при проведенні оцінки дорожніх транспортних засобів іноземного виробництва, які були у використанні, найбільш оптимальним є порівняльний методичний підхід. За результатами проведеної оцінки дорожнього транспортного засобу встановлено ринкову вартість автомобіля Peugeot-405, державний реєстраційний номер 27-800СК, яка становила 28853 грн.

Література

[1] - Міністерство економіки, торгівлі та сільського господарства України. Електронний доступ: http://www.me.gov.ua/Vehicles/CalculatePrice

[2] - Онлайн магазин Auto Ria.
Електронний доступ: https://auto.ria.com/

[3] - Товарознавча експертиза та оцінка дорожніхтранспортних засобів: затвердж. МінюстомУкраїни від 24 лист. 2003 р. № 142/5/2092. –К. : МЮУ, 2003. – 20 с. – (Нормативний доку-мент Мінюста України. Методика)

[4] - Пахомова І. В., Губа Л. М. Сучасні підходи до визначення ринкової вартості транспортних засобів іноземного виробництва.
Електронний доступ: http://dspace.uccu.org.ua/bitstream/123456789/2582.pdf

УДК 37.016:51

Грищенко К. О. (студ., 5 курс)
Науковий керівник – ст. викл. Простакова Ю. С.
Харківський національний педагогічний ерситет імені Г. С. Сковороди (Харків, Україна)

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ЯК ЗАСІБ ПІДВИЩЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ

Згідно до сучасних тенденцій в освіті, однією із ключових задач навчання математики на сьогоднішній день є формування у здобувачів освіти математичної грамотності. Під математичною грамотністю розуміють уміння оперувати числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та в просторі; встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо); розв'язувати задачі, в тому числі прикладного (практичного) змісту; будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях. Саме таке тлумачення математичної грамотності закладено при проведенні дослідження PISA (Program for

International Student Assessment), до якого Україна долучилась у 2018 році. Результати українських учасників з математики, отримані під час проведення цього дослідження, спричинили підвищення уваги до проблем сучасної математичної освіти і пошуку найбільш ефективних методів і засобів навчання математики.

Тому мета цієї статті – розглянути засоби навчання математиці, спрямовані на підвищення рівня сформованості математичної грамотності здобувачів освіти.

Одним із дієвих та ефективних засобів реалізації прикладної спрямованості курсу математики є використання в навчальному процесі прикладних задач. Під прикладними задачами в даному контексті ми розуміємо задачі, які виникли у відповідь на потреби розв'язання певних проблем в інших предметних галузях, або в реальному житті, і при цьому потребують математичного розв'язання. Деякі задачі ілюструють запозичені у природи принцип оптимізації трудової діяльності, інші – розвивають здібності учнів до технічної творчості (геометричні задачі на побудову). Розв'язування прикладних задач сприяє ознайомленню учнів з роботою підприємств і галузей народного господарства, що є умовою орієнтації інтересу учнів до певних професій [1, с.90].

Використання прикладних задач дозволяє досліджувати проблемні ситуації на уроках математики (наприклад, чому вигідніше будувати одноповерхові будинки з квадратною основою, ніж з основою у вигляді іншого прямокутника з таким самим периметром). Такі задачі стимулюють учнів до здобуття нових знань, збагачують учнів теоретичними знаннями з технічних та інших дисциплін [1]. Розглянемо кілька прикладів таких задач.

Приклад 1: Прокат DVD [3, с.128]

Галина працює в магазині, де можна взяти напрокат DVD-диски та комп'ютерні ігри. З магазином можна укласти договір і брати напрокат диски та ігри за пільговими цінами. Вартість внеску за укладання договору на рік становить 10 зедів. Ціни на прокат DVD-дисків для клієнтів, що уклали договір складає 2,50 зеда, а для клієнтів що не уклали - 3,50 зеда Яку мінімальну кількість цих дисків треба взяти напрокат клієнтам, які уклали договір, щоб окупити ті кошти, які вони витратили на укладання договору?

Розв'язання:

Позначимо через x – мінімальну кількість DVD-дисків.

$3{,}20x = 2{,}50x + 10; \quad 0{,}7x = 10;$

$x = 10 : 0{,}7 = 14{,}285$ – округлимо до 15, бо відповідь має бути цілим числом.

Відповідь: 15 DVD-дисків.

Наведене завдання орієнтоване на оцінювання здатності людини проводити дослідження та підкріплювати висновки обчисленнями (фактично досліджується, чи дійсно вигідніше укладати договір з магазином, ніж брати диски напрокат на загальних підставах). Для успішного розв'язування завдання необхідно продемонструвати вміння виконувати наступні дії: розробляти й реалізовувати стратегії для знаходження математичних розв'язань; використовувати математичні інструменти для знаходження точних і наближених результатів; робити узагальнення на основі результатів застосування математичних процедур із метою знаходження розв'язань; осмислювати математичну аргументацію й пояснювати та підтверджувати математичні результати.

На жаль, подібних задач у підручниках з математики небагато. Більша частина задач сформульована у термінах, що не зустрічаються у реальному житті, і тому у учнів зазвичай невисока мотивація до вивчення математики. Щоб проілюструвати це твердження, наведемо приклад «традиційної» задачі з математики та прикладної задачі з такої ж теми.

Приклад 2 [2, с.15]**:**

Для функції $f(x) = cosx$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку М(0;3).

Розв'язання:

Користуючись таблицею первісних, отримуємо, що шукана первісна має вигляд $F(x) = sinx + c$. З умови випливає, що $sin0 + C = 3$. Враховуючи, що $sin0 = 0, C = 3$

Отже, шукана первісна має вигляд $F(x) = sinx + 3$

Відповідь: $F(x) = sinx + 3$

Приклад 3 [4, с. 58]**:**

Популяція, початкова чисельність якої дорівнює 90 особин, зростає зі швидкістю W(t)=20t особин у день. Знайдіть закон зміни чисельності P популяції в залежності від часу t, час виражено у днях.

Розв'язання:

Шуканий закон є функцією від часу t. Позначимо цю функцію через P(t) і пригадаємо, що W(t)= P(t), отже, згідно з означенням первісної приходимо до висновку, що P(t) є первісною для W(t). За основною властивістю первісної одержуємо P(t) = $20 * \frac{t^2}{2} + C = 10t^2 + C$.

Враховуючи, що P(0)=90, з рівняння $90 = 10 * 0^2 + \mathrm{C}, \mathrm{C} = 90$.

Отже, P(t) = $10t^2 + 90$.

Відповідь: P(t) = $10t^2 + 90$.

Отже, більшість з прикладних задач спрямовані на формування в здобувачів освіти вмінь і навичок використання математичних знань в реальному житті. При використанні на заняттях прикладних задач в учнів покращується уява, відбувається підвищення пізнавального інтересу та зосередження уваги на значенні математичних знань у реальному житті. А це в свою чергу приводить до кращого засвоєння навчального матеріалу. Тож, використання прикладних задач в процесі навчання математики є одним із засобів підвищення рівня сформованості математичної грамотності здобувачів освіти.

Анотація. *У статті розглянуто практичну спрямованість математики як засіб підвищення математичної грамотності здобувачів освіти та наведено деякі з прикладних задач.*

Ключові слова: *прикладна задача, математична грамотність, задачі PISA, прикладна спрямованість математики.*

Література

[1] - Фрідман Л. М. Психолого-педагогічні основи навчання математики в школі / Л. М. Фрідман. - М.: Просвещение, 1983. – 159 с.

[2] - Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г.Мерзляк, Д. А.Номіровський, В. Б.Полонський, М. С.Якір – Х.: Гімназія, 2019. – 208 с.

[3] - Програми міжнародного оцінювання учнів PISA [Електронний ресурс]- http://pisa.testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf

[4] - Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі з курсу алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

[5] - Терешин Н. А. Прикладная направленность школьного курса математики: Книга для учителя. - М.: Просвещение, 2005. - 96 с.

Дорошенко М. А. (студ., 3 курс)
Науковий керівник – доц. Фастовська Т. Б.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ТА АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ТЕРМОПРУЖНИХ ЗАДАЧ КОНТАКТУ БАЛОК ТИМОШЕНКА

1. Актуальність теми.

У роботі розглядається задача трансмісії тонких пружних балок Тимошенка,

Одна з яких піддана до впливу теплових ефектів, що описуються законом Фур'є. Задача зводиться від двовимірної до одномірної на підставі припущень Тимошенка на відміну від гіпотези Киргофа згідно якої прямі лінії, нормальні до серединної поверхні до деформації, залишаються прямими і нормальними до серединної поверхні і після деформації і не змінюють своєї довжини,гіпотеза Тимошенка враховує ефект поперечного зсуву, існуючий у ряду матеріалів, проте для тонких балок можливо зберегти лінійну апроксимацію. А саме,переміщення по осі x та мають вигляд $v_1 = u_1 + zv$,

$v_2 = w$,де w - поперечне переміщення точки, v - кут повороту поперечного перерізу, а u_1 - переміщення точки средньої лінії вздовж вісі x.

Дана модель, що описує коливання балок ґрунтована на узагальненому законі Гука для лінійно пружного ізотропного тіла. Крім того передбачається, що зміна температури в цій точці пластини має вигляд $\Theta = sin(\frac{\pi z}{h})\theta$, где h - товщина пластини,а θ – зміна температури точки средньої лінії ([7]). Після відомої процедури усереднення по товщині пластини ([5]), рівняння системи залежать тільки від v, w, θ, u, ω.

Дана модель містить нелінійні неконсервативні доданки виду δvw в рівняннях (2.1) і (2.4), а також нелінійні функції $f(v^2)$, $f_0(w)$, $g(u^2)$, $g_0(\omega)$, які означають щільність зовнішніх сил, що діють на частини балки, що займають інтервали $(0, l_0)$та(l_0, l).

Задачі подібного роду вивчалися в роботах [1],[2],[3],[4],[6]. У [4] розгляда-ється лінійна задача трансмісії термопружної пластини Міндліна-Тимошенка-Фур'є і пружної пластини Кіргофа-Гертина-Піпкіна. Доведено експоненціальну стійкість розв'язків. Лінійна задача трансмісії між двома термопружними матеріалами досліджувалася в [2]), в якій доводиться існування і регулярність радиально-симетричних розв'язків і досліджується їх асимптотична поведінка. У ([6]) вивчалася задача трансмісії для моделі Тимошенка у разі, коли частина балки піддана тертю, а енергія другої частини консервативна. Проте, експоненціальна стабілізація системи доведена за неприродних припущень на граничні умови. Задача для пластини Міндліна, що складається з двох в'язкопружних частин розглянута в роботі ([1]). До-ведена експоненціальна стійкість енергії. У роботі [3] вивчалася нелінійна задача коливань однорідної пружної пластини Міндліна-Тимошенка.

Було доведено існування глобального аттрактора для нелінійної неконсервативної системи коливань пластини Міндліна-Тимошенка і досліджені його граничні властивості при наближенні модуля поперечного зсуву до нескінченності.

Ця робота присвячена доведенню існування глобального аттрактора для нелінійної задачі трансмісії балки Тимошенка з термопружною частиною. При розгляді такої моделі виникають труднощі через непридатність класичного методу доведення диссипативності і асимптотичної компактності. Тому існування аттрактора було доведено за допомогою отримання стабілізаційної нерівності і градієнтності.

При δ_1, δ_2відмінних від нуля система не є градієнтною і не допускає побудови відповідної функції Ляпунова для доведення існування обмеженої поглинаючої множини, тому питання про існування аттрактора для такої системи залишається відкритим. До теперішнього часу задача трансмісії для балок або пластин Міндліна-Тимошенка, як у випадку консервативних нелінійних зовнішніх сил, так і у випадку неконсервативної системи, не було вивчено. Таким чином, розгляд цього питання представляється актуальним. Метою роботи є доведення існування глобального аттрактора для розв'язків початково-крайової задачі системи нелінійних рівнянь моделі трансмісії пружної і термопружної балки Тимошенка з теплопровідністю Фур'є. Для досягнення цієї мети передбачається вирішити наступні задачі: 1)довести коректну розв'язність нелінійної задачі трансмісії пружної балки Тимошенка.

2)довести існування глобального аттрактора нелінійної задачі.

2. Постановка задачі

Припустимо, що балка, що знаходиться в стані рівноваги займає

проміжок

$$\alpha_1 v_{tt} - \lambda_1 v_{xx} + \mu_1(v + w_x) + \beta\theta_x + f(v^2) + \delta_1 v w = 0 \tag{1}$$

$$\rho_1 w_{tt} - \mu_1(v + w_x)_x + f_0(w) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\gamma_1\theta_t - \theta_{xx} + \eta\theta + \beta v_{tx} = 0 \qquad (3)$$

На проміжку $\Omega_2 = (l_0, l)$:

$$\alpha_2 u_{tt} + \gamma u_t - \lambda_2 u_{xx} + \mu_2(u + \omega_x) + g(u^2) + \delta_2 u\omega = 0, \qquad (4)$$

$$\rho_2\omega_{tt} - \mu_2(u + \omega_x)_x + g_0(\omega) = 0, \quad t > 0, \qquad (5)$$

Константи$\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2, \gamma_1, \eta, \beta$ додатні. Рівняння

(1)-(5) розглядається з граничними умовами

$$\theta_x(t, 0) = 0, \qquad (6)$$

$$\begin{array}{lll} v(t,0) = w(t,0) = 0, & & \\ u(t,l) = \omega(t,l) = 0, & & \\ v = u, & x = l_0, & t > 0 \\ w = \omega & & \\ -\lambda_1 v_x + \beta\theta_x = -\lambda_2 u_x & & \\ \mu_1(v + w_x) = \mu_2(u + \omega_x) & & \end{array} \qquad (7)$$

та початковими умовами

$$\begin{array}{ll} v(x,0) = v_0(x), & u(x,0) = u_0(x) \\ w(x,0) = w_0(x), & \omega(x,0) = \omega_0(x) \\ v_t(x,0) = v_1(x), & u_t(x,0) = u_1(x) \\ w_t(x,0) = w_1(x), & \omega_t(x,0) = \omega_1(x) \\ \theta(x,0) = \theta_0(x). & \end{array} \qquad (8)$$

Функції $f(s), g(s), f_0(s), g_0(s)$задовільняють умовам:

1. $f(s), g(s), f_0(s), g_0\,(s) \in Liploc(\mathbb{R})$ (9)
2. Існують такі константи $C,\ r,\ r_0,\ q,\ q_0 > 0$, що виконуються нерівності $|f(s) - f(p)| \le C(1 + |s|^r + |p|^r)|s - p|$,

$$|g(s) - g(p)| \leq C(1 + |s|^q + |p|^q)|s - p|, \tag{10}$$

$$|f_0(s) - f_0(p)| \leq C(1 + |s|^{r_0} + |p|^{r_0})|s - p|,$$

$$|g_0(s) - g_0(p)| \leq C(1 + |s|^{q_0} + |p|^{q_0})|s - p|$$

3. Існує $C > 0$ така, що

$$F(s) \geq -C \qquad G(s) \geq -C \tag{11}$$

$$F_0(r) \geq -C \qquad G_0(r) \geq -C,$$

де

$$F(s) = \frac{1}{2}\int_0^s f\,(z)\,dz, \qquad G(s) = \frac{1}{2}\int_0^s g\,(z)\,dz$$

$$F_0(r) = \int_0^r f_0\,(z)\,dz, \qquad G_0(r) = \int_0^r g_0\,(z)\,dz$$

4. Існує константа $C_1 > 0$ така, що

$$F(s) + F_0(r) + \delta_1 sr \geq -C_1, \quad s \in \mathbb{R}_+, r \in \mathbb{R} \tag{12}$$

$$G(s) + G_0(r) + \delta_2 sr \geq -C_1$$

5. Існують константиC_2, C_3, C_4, $C_5 > 0$ такі, що

$$\delta_1 sr \leq C_2(r^2 + F(s)) + C_3, \tag{13}$$

$$\delta_2 sr \leq C_4(r^2 + G(s)) + C_5$$

Теорема 5. Нехай виконані умови (9)-(11). Тоді динамічна система(S_t, H) де $H = \mathcal{W} \times ([L_2(\Omega_1)]^2 \times [L_2(\Omega_2)]^2) \times L_2(\Omega_1)$, породжена задачою (1)-(8) має компактний глобальний аттрактор.

Література

[1] - M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera, C. A. Raposo, M. Sepúlveda and O. P. Vera Villagrán, Uniform stabilization for transmission problem for Timoshenko's system with memory, J. Math. Anal. Appl., 369 (2010), pp. 323–345.

[2] - M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera, M. Sepulveda, O. Vera Villagran, Transmission Problem in Thermoelasticity, Boundary Value Problems, 2011 (2011), 33 pp.

[3] - I. Chueshov, I. Lasiecka, Global attractors for Mindlin-Timoshenko plates and for their Kirchhoff limits, Milan J. Math., 74 (2006), pp. 117 -138.

[4] - T. Fastovska, Decay rates for Kirchhoff-Timoshenko transmission problems, Commun. Pure Appl. Anal., 12 (2013), 6, pp. 2645-2667.

[5] - J. Lagnese, Boundary stabilization of thing plates, Philadelphia: SIAM, 1989.

[6] - C. A. Raposo, W. D. Bastos, M. L. Santos, A transmission problem for the Timoshenko system, Comp. Appl. Math., **26** (2007), pp. 215–234.

[7] - Schiavone P, Trait R.I. Thermal effects in Mindlin-type plates,Q. Jl. Mech. Appl. Math. 46 (1993), pp. 27-39.

Колтунов М. І. (студ., 1 курс)
Науковий керівник – доц. Пташний О. Д.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ІМІТАЦІЯ РІШЕНЬ У РЕФЛЕКСИВНІЙ ГРІ

Конфлікт - ситуація, в якій кожна зі сторін займає позицію, несумісну і протилежну по відношенню до інтересів іншої сторони. Конфлікт - особлива взаємодія індивідів, груп, об'єднань, яка виникає при їх несумісних поглядах, позиціях і інтересах.

У конкретних задачах дослідження операцій діяльність конфліктуючих сторін не розглядається як особливий вид людської діяльності, і конфлікт як такий виступає лише як фон, на який проектуються дії сторін.

У математичній теорії ігор ми маємо справу з аналогічною постановкою завдання. Чи йде мова про реального противника, або сторона конфлікту представлена природою, предметом вивчення залишається вибір стратегії, вибір поведінки.

Рефлексивна гра - процес соціальної взаємодії, в ході якого кожен з учасників гри, виходячи зі своєї інформованості, здійснює рефлексивне управління іншими учасниками, намагаючись реалізувати наявну у нього стратегію для формування власного варіанту дійсності.

Рефлексивна гра відноситься до ігор відкритого типу, тобто вона являє собою процес соціальної взаємодії, в якому ролі, правила і сюжетні ходи генеруються учасниками прямо по ходу ігрової дії.

Як визначено вище, рефлексивною є гра, в якій інформованість гравців не є загальним знанням. І гравці приймають рішення на основі ієрархії своїх уявлень. З точки зору теорії ігор і рефлексивних моделей прийняття рішень доцільно розділяти стратегічну і інформаційну рефлексію.

Інформаційна рефлексія - процес і результат роздумів гравця про те, які значення невизначених параметрів, що про ці значеннях знають і думають його опоненти. При цьому власне «ігрова» компонента відсутня, так як ніяких рішень гравець не приймає. Стратегічна рефлексія - процес і результат роздумів гравця про те, які принципи прийняття рішень використовують його опоненти в рамках тієї інформованості, яку він їм приписує в результаті інформаційної рефлексії.

Надалі ми будемо розглядати саме стратегічну рефлексію.

Виявляється, що якщо припустити, що гравець, моделюючи поведінку опонентів, приписує їм і собі певні ранги рефлексії, то вихідна гра перетворюється в нову гру, в якій стратегією гравця є вибір рангу рефлексії.

Для опису логіки рефлексивних ігор скористаємося тим основним фактом, що конфліктуючі сторони відтворюють міркування один одного.

Позначимо гравців через X і Y. Нехай $\overleftarrow{X}$ означає «X думає» і $\overleftarrow{Y}$ - «Y думає». Якщо X може імітувати міркування Y або, що те ж саме, якщо його ранг рефлексії вище, то це можна записати як $\overleftarrow{Y}\overleftarrow{X}$ «X думає, що Y думає» (стрілка означає порядок читання). Якщо ж У може проімітувати X, який відтворює міркування У, то, очевидно, це може бути записано таким чином:

$\overleftarrow{X}\overleftarrow{Y}\overleftarrow{X}$ «Y думає, що X думає, що Y думає»

Зрозуміло, що такий ланцюжок може бути продовжена вліво і символ, що стоїть першим справа, вказує на потенційного переможця.

Запропонований тут спосіб записи є найбільш загальним і найбільш простим для опису самого факту рефлексії. Однак це не дуже зручно і недостатньо для нашої головної мети: описати процес прийняття рішення. Тому спробуємо інакше зобразити рефлексивне взаємодія сторін.

Розглянемо вихідну ситуацію, коли противники приймають рішення, не імітуючи міркування один одного. Цей випадок, коли ранги рефлексії дорівнюють нулю, нам знадобиться, щоб описати найпростішу процедуру прийняття рішення.

Уявімо собі об'єктивну обстановку як деякий плацдарм, на якому розгортаються події і який позначимо літерою П. Нехай це буде, наприклад, кілька населених пунктів, в які гравцеві Х потрібно завезти вантажі одним рейсом вантажівки, тобто перед Х стоїть завдання вибору оптимального маршруту. Плацдарм П відображається на особливий планшет Пх, яким володіє Х. Очевидно, що відображення плацдарму П може бути вироблено з різною точністю. Але Х оперує з Пх, а не з П; це треба запам'ятати, тому що рішення, яке він прийме, буде пов'язане з Пх і лише потім переведено на реальний плацдарм П. Гравець Х має мету - Мх. У нашому прикладі мета полягає в тому, щоб оптимально перевезти вантажі з вихідного пункту А в усі інші пункти. Щоб прийняти рішення, в результаті якого мета буде досягнута, Х повинен зробити певні операції на своєму планшеті.

Припустимо, що Х володіє яким-небудь методом вирішення завдання, наприклад спеціальною програмою. Цей метод ми назвемо доктриною і позначимо Дх. Використовуючи Дх, гравець Х знаходить найкоротший маршрут. Цей маршрут наноситься на планшет Пх і є рішенням задачі - Рх.

Процедура прийняття рішення гравцем Х може бути зображена наступним чином:

1) Реальна обстановка «перекладається» на планшет Пх.

2) Мета особливим чином співвідноситься з планшетом, можна сказати, що мета «наноситься» на планшет.

3) До планшету з нанесеною на нього метою застосовується доктрина Дх.

4) У результаті цієї операції виробляється рішення, віднесене до планшета Пх:

$$\frac{\text{Мх}}{\text{Пх}}\text{Дх} \rightarrow \frac{\text{Рх}}{\text{Пх}} \tag{1}$$

Вираз (1) є дуже загальним, і за описаною схемою приймаються рішення в найрізноманітніших конфліктних ситуаціях, коли гравці не імітують міркувань один одного.

Повернемося тепер до супротивника - гравця Y, і розглянемо процес прийняття рішення, коли Y може імітувати рішення X, тобто до схеми. У нашому прикладі Y бажає оволодіти вантажівкою, яка перевозить вантажі X, і повинен організувати засідку. Ніякої інформації про маршрут, обраний X, у Y немає. Для того, щоб прийняти рішення, що забезпечує успіх, Y повинен проімітувати міркування X і виконати процедуру (1).

Звернемо увагу на одну важливу обставину: Y не володіє Пх. Він володіє тим, що можна назвати «планшет Пх з точки зору Y». Це вже вторинне відображення реального плацдарму і при цьому, очевидно, можуть з'явитися істотні відмінності від Пх. Гравець Y не володіє також Мх і Дх; він має в своєму розпорядженні лише «Мх з точки зору Y» і «Дх з точки зору Y». Прийнявши відповідні позначення Пху, Мху, Дху і Рху, ми можемо записати імітацію Y міркування X наступним чином:

$$\frac{\text{Мху}}{\text{Пху}}\text{Дху} \rightarrow \frac{\text{Рху}}{\text{Пху}} \tag{2}$$

І тільки після р того як Y отримав $\frac{\text{Рху}}{\text{Пху}}$, він повинен перевести це рішення на свій власний планшет Пу:

$$\frac{\text{Рху}}{\text{Пху}} \rightarrow \frac{\text{Рху}}{\text{Пу}} \tag{3}$$

Тепер Y повинен нанести на свій планшет свою мету, застосувати свою доктрину і виробити рішення. Зображуючи цей процес в прийнятих позначеннях, одержимо:

$$\frac{\text{Рху}}{\text{Пу}} \to \frac{\text{Рху Му}}{\text{Пу}}\text{Ду} \to \frac{\text{Ру}}{\text{Пу}} \tag{4}$$

Об'єднавши вирази (2), (3) і (4), запишемо процес прийняття рішення з імітацією за схемою XY, як

$$\frac{\text{Мху}}{\text{Пху}}\text{Дху} \to \frac{\text{Рху}}{\text{Пху}} \to \frac{\text{Рху}}{\text{Пу}} \to \frac{\text{Рху Мху}}{\text{Пу}}\text{Ду} \to \frac{\text{Ру}}{\text{Пу}} \tag{5}$$

У цьому прикладі X зазнає поразки, оскільки Y вдалося проімітувати міркування X. Так як X не має Пху, Мху і Дху, а має «Пху з точки зору X», «Цху з точки зору X» і «Дху з точки зору X», то, прийнявши відповідні позначення Пхух, Мхух і Дхух, можна записати процес вирішення з подвійною імітацією (за схемою) наступним чином:

$$\frac{\text{Мхух}}{\text{Пхух}}\text{Дхух} \to \frac{\text{Рхух}}{\text{Пхух}} \to \frac{\text{Рхух}}{\text{Пхух}} \to \frac{\text{Рхух Мух}}{\text{Пух}}\text{Дух} \to \frac{\text{Рух}}{\text{Пух}} \to \frac{\text{Рух}}{\text{Пх}} \to \frac{\text{Рух Мх}}{\text{Пх}}\text{Дх} \to \frac{\text{Рх}}{\text{Пх}} \tag{6}$$

У виразі (6) легко проглядається загальний рекурентний закон, за яким можна отримувати формули для будь-яких рангів рефлексії.

Співвідношення (1) - (6) ми вивели, припускаючи, що мета незалежна від зображення плацдарму на планшеті. У багатьох випадках мета визначається в результаті оперування з планшетом. Тоді вираз (1) запишеться наступним чином:

$$\text{Пх} \to \text{Мх} \to \frac{\text{Мх}}{\text{Пх}}\text{Дх} \to \frac{\text{Рх}}{\text{Пх}} \tag{1$'$}$$

Уявімо тепер якогось зовнішнього спостерігача, перед яким розгортається рефлексивна гра. Чи може він уявити собі загальну картину цього конфлікту? Очевидно, для цієї мети потрібний логічний апарат, спеціально призначений для відображення рефлексивного взаємодії.

Покажемо, що незначний розвиток щойно розглянутого способу зображення імітованих рішень задовольняє цій вимозі.

Отже, наш спостерігач бачить перш за все двох гравців X і Y і реальний плацдарм з ударними силами гравців. На цьому плацдармі протікає фізична взаємодія гравців. Домовимося гравців X і Y зображати у вигляді наступних символічних сум:

$$X = П + (Пx, Mx, Дx, Px); \qquad Y = П + (Пy, My, Дy, Py); \qquad (7)$$

Безглуздо відривати гравця від реального плацдарму, навпаки, плацдарм П зручно представити у вигляді «тіла» гравця Т, вважаючи, що відображення тіла відбувається в його голові.

Позначивши П = Т, (Пх, Мх, Дх, Рх) = Тх і (Пу, Му, Ду, Ру) = Ту, ми спростимо символічні суми:

$$X = T + Tx ; \qquad У = T + Ty \qquad (8)$$

Загальна сума

$\Omega = T + Tx + Ty$

Тепер неважко збагнути, що якщо X імітує міркування Y, тобто приймає рішення по схемі, то йому необхідно додатково відобразити Ту.

Загальне правило формування рефлексивних елементів полягає в наступному: відображенню рангу *i* відповідає сума елементів, що знаходяться в рангу *i*-1, з доданим індексом гілки.

$\Omega = T + Tx + Ty + Tyx + Txx$

Описаний тут механізм дозволяє зображати які завгодно складні і заплутані рефлексивні структури за допомогою сум типу:

$$\Omega = T + \sum_{i}^{2} T_{xi} + \sum_{i}^{2}\sum_{j}^{2} T_{xjxi} + \sum_{i}^{2}\sum_{j}^{2}\sum_{k}^{2} T_{xkxjxi} + \ldots \qquad (9)$$

де x_1 = x, x_2 = y, причому будь-яка підмножина доданків може бути відсутньою за винятком доданка Т.

Виникає питання: як слід інтерпретувати елементи типу Тххх, Тухх, Тхх, тобто ті, в яких один індекс зустрічається поспіль два і більше разів в кінці послідовності індексів? Ці елементи можна інтерпретувати як такі, що керують процесом відображення нижчого рівня. У Тхх виробляються рішення, які реалізуються в Тх. Ми бачили вище, що в Тх виробляються рішення, реалізовані на реальному плацдармі. Природно випливає закон дистрибутивности щодо правого індексу:

$$Txxx + Tyxx = (Txx + Tyx)x = (Tx + Ty)xx \qquad (10)$$

В загальному випадку важко вказати формальні схеми процедур прийняття рішення для більш складних випадків, ніж

$$X=T+Tx+Tyx+\cdots+Tyx\ldots yx \quad (11)$$

Однак принципово можливо уявити будь-якого гравця у вигляді суми рефлексивних елементів і привести цю суму відповідно до правил цієї своєрідної алгебри до вигляду, зручного для аналізу. Це дозволяє характеризувати по суті ті рішення, які повинні бути прийняті в результаті оперування цими елементами.

Першою і найпростішою операцією над сумами виду (9) є операція *виділення підстав* для прийняття рішень. Нехай гравець X зображений у вигляді суми

$$X = T + Tx + Tyx + Txyx\text{, або } X = T + (T + Ty + Txy)x \quad (12)$$

Все, що знаходиться в дужках, усвідомлено X, і, аби уявити внутрішній світ гравця, ми повинні виділити

$T + Ty + Txy$.

Це досягається наступною операцією над виразом (12):

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T + Tx + Tyx + Txyx\right) = T + Ty + Txy \quad (13)$$

Зауважимо, що ми користуємося чисто зовнішніми аналогіями, вживаючи символіку математичного аналізу. Просто ті операції алгебри, які пов'язані з описом рефлексивних процесів, нагадують формули інтегрування і диференціювання многочленів. Ніякого «кількісного» сенсу ця символіка не має.

Вираз (13) являє собою символічний запис гравця Y з точки зору X. Цей вираз таким же чином може бути «продиференційовано» і можуть бути отримані підстави, якими користувався Y при ухваленні рішення (з точки зору X). Так як

$T + Ty + Txy = T + (T + T x) y$,

отримуємо:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} = T + Tx \qquad (14)$$

З позиції зовнішнього дослідника, вираз (14) може бути інтерпретовано як підставу для прийняття рішення гравцем Y з точки зору X:

$$(T + T\,x)yx \qquad (15)$$

Ми показали конфлікт у вигляді символічного многочлена. Домовимося тепер, що замість членів виду Txxx або Txxyy писатимемо і Tx^2y^2. Зауважимо, що в нашій алгебрі «множення" не коммутативно, тобто $Txy \neq Tyx$. Дійсно, лівий елемент інтерпретується як Tx з точки зору Y, а правий елемент - як Ty з точки зору X, і зміст, вкладений в ці члени, різний. Є ще одна істотна відмінність цієї алгебри від «звичайної». Один доданок може бути повторено довільне число разів, наприклад,

$T + T\,x + T\,x + T\,x = T + T\,x$

Це правило є природнім, оскільки при репродукування будь-якого «тексту» не виникає нової інформації. Байдуже, що має гравець - один елемент Tx або три.

Будь-яку суму, яка зображує рефлексивну взаємодію двох гравців, з позиції зовнішнього дослідника можна представити у вигляді

$$\Omega = T + \Omega x + \Omega y \qquad (16)$$

де Ωx і Ωy - деякі суми, які виражають відповідно підстави рішень гравця X і гравця Y. Загальне правило виявлення підстав таке:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \Omega x \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \Omega y \qquad (17)$$

За допомогою цих операцій дослідник як би витягає або запозичує картини, що лежать перед гравцями.

У загальному випадку многочлени Ωx і Ωy можуть бути приведені до вигляду (16) і в свою чергу піддані операції диференціювання. Другі похідні і похідні вищих порядків визначаються аналогічно правилу (17).

Це правило легко узагальнюється і переноситься на випадок багатьох гравців.

Виходячи з (11) та (12) , та використовуючи формули (16) та (17) ми можемо знайти деякі чисті та, в деякому сенсі, універсальні механізми мислення гравців.

Це дає відразу дві переваги: по-перше, стає зрозумілим логічне підгрунтя прийнятих рішень, по-друге, створюються сприятливі умови для самостійного дослідження конфлікту.

Рефлексивний аналіз дозволяє отримати також логічне обгрунтування деяких теоретико-ігрових принципів. Як відомо, велика частка результатів теорії ігор отримана на основі принципу максимина.

Цей принцип диктує вибір такого рішення, при якому забезпечується гарантований результат: вибирається стратегія, яка веде до *найкращого з найгірших результатів*.

Розглянемо гравця X, який представлений сумою виду:

$$X = T + (T + Ty)x + (Tx + Txy)x + (Tyx + Tyxy)x + \ldots + (T\alpha + T\alpha y)x \qquad (18)$$

де α - деяка послідовність індексів x і y. У кожному «кадрі», на які розбита сума (18), елемент, що належить X, відбивається в елементі, що належить гравцеві Y. Гравець має таку модель противника, що будь-яка думка X (з його точки зору) імітується Y, який, виходячи з результату імітації, і приймає рішення. Така модель, природно, віддає перевагу «найменш згубній думці». Гравець X буде керуватися тією стратегією, свідомо знаючи яку, і прийнявши найкраще рішення, гравець Y завдасть X найменшої шкоди. А це і є принцип максимина. Таким чином, вираз (18) являє собою вихідну логічну форму, яка породжує один з основних принципів теорії ігор.

Інша схема міркування, заснована на уявленні про домінування над противником, призводить до інших причин для прийняття рішення. Нехай гравець X зображується сумою

$$X = T + (T + Tx)x + (Ty + Tyx)x + (Txy + Txyx)x + \ldots + (T\alpha y + T\alpha yx)x \qquad (19)$$

У цьому виразі в кожному кадрі-доданку елемент, що належить Y, відбивається в елементі, що належить гравцеві X, а не навпаки, як у виразі (18). Будь-яка думка, яка прийшла в голову Y, імітується гравцем X (з точки зору X). В цьому випадку гравець X може прийняти оптимальне рішення, розглядаючи свого супротивника як своєрідну «інтелектуальну» природу, на яку X може впливати. Ця схема міркування породжує принцип, який можна назвати принципом переваги.

Для кінцевого числа елементів суми виду (18) і (19) не перекладається одна з одною. Це означає, що рефлексивне зображення гравців може бути використано для визначення того, який принцип використовується гравцем.

Можна визначити, яким принципом слід користуватися, якщо ми маємо загальну інформацію про розмірковування гравців, які можна схематизувати у вигляді кінцевої суми. Ці міркування можуть принести користь не лише теоретикам ігор, але й дослідникам операцій, економістам, психологам та іншим фахівцям, що мають справу з прийняттям рішень при рифлексивній поведінці.

Анотація. *У роботі розглядається моделювання процесу прийняття рішень у рефлексивній грі, де гравці відтворюють міркування один одного, та подається теоретичне обґрунтування рішень кожного з гравців виходячи з принципів вибору рішень.*

Ключові слова: *конфлікт, рефлексивна гра, стратегії, ранг рефлексії, рефлексивний аналіз, причини прийняття рішень*

Література

[1] - Смолян Г. Л. Исследование операций – инструмент эффективного управления / Г. Л. Смолян. - М.: Знание, 1967. – 62 с.

[2] - Льюс Р. Д. Игры и решения / Р. Д. Льюс, Х. Райфа. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. - 642 с.

[3] -- Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003. – 149 с.

[4] - Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.
Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука, 1970, - 707 с.

[5] - Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения: учебное пособие. СПб.: Лань, 2010. – 446 с.

Лівенцова Я.(студ., 2 курс)
Науковий керівник – доц. Бобрицька Г. С.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ОЦІНКА РИЗИКІВ ПРИ РОЗРАХУНКУ ЦІН ЗАСОБАМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Оцінити рівень економічного ризику без використання основ теорії ймовірностей і математичної статистики не є можливим.

Ризик у підприємництві – це ймовірність виникнення збитків або будь-яких втрат у результаті нездійснення події, що намічалася, передбаченої прогнозом, планом, проектом, програмою. Отже, ризик – імовірнісне поняття, він може бути і вивчений у термінах теорії ймовірностей та математичної статистики. Тому в більш-менш складних ситуаціях, що вимагають великих витрат, для оцінки ступеня ризику в заходах, що намічаються керівництвом підприємства, доцільно залучати математиків-фахівців, які знають теорію ймовірностей і математичну статистику.

Ймовірність події визначається як міра, число, що показує відношення числа наслідків, що сприяють цій події, до загального числа всіх єдиноможливих і рівноможливих елементарних наслідків у системі заходів, що намічаються.

У статистичних дослідженнях імовірність майбутньої події обчислюється як відносна частота події, що наступила, тобто відношення числа випробовувань, у якому дана подія з'явилася, до загального числа фактично зроблених випробовувань. Інакше кажучи, імовірність означає можливість отримання певного результату. Якщо ви визначили ціну на товар у розмірі 100 грн за штуку, то у разі, коли 80 % цього товару реалізується за цією ціною, ймовірність правильності визначення ціни дорівнює 0,8, а ризик за помилку становитиме 0,2, або 20 %.

Ризик у підприємництві – це ймовірність того, що підприємство понесе збитки, втрати, коли намічений захід не здійсниться. Тому ризик пов'язаний з імовірністю нездійснення заходу, із прорахунками або недообліком реальних подій у господарському житті. Це – протилежна подія відносно реалізованого заходу.

Ризик у підприємництві вимірюється абсолютною сумою – сумою збитків і втрат та ступенем ризику – мірою ймовірності нездійснення наміченого заходу або недосягнення рівня прибутку, доходу, ціни, що намічається. Ці два показники є необхідними і несуть відповідну інформацію – абсолютного або відносного ризику. Абсолютний ризик оцінюється в гривнях, доларах та ін. Відносний ризик – у частках одиниці або у відсотках.

Ринкова ціна за своєю природою є випадковою величиною, що в умовах кон'юнктури ринку внаслідок угоди купівлі-продажу отримає одне і тільки одне можливе значення, наперед точно невідоме і яке залежить від багатьох випадкових причин, що заздалегідь не можуть бути всі враховані учасниками угоди.

В умовах обмеженої інформації під час розрахунків цін буває важко обрати емпіричну функцію розподілу ймовірностей.

Аналізуючи ряди цін за певний період, варто враховувати, що максимальні й мінімальні відхилення можуть бути викликані якимись особливими чинниками, наприклад, різкою зміною цін на основну сировину, вихідні матеріали.

Абсолютне відхилення можливих випадкових значень економічного показника від математичного сподівання цього показника, тобто його середньозваженого по ймовірності значення. Воно характеризує амплітуду мінливості цього показника. Часто має сенс розрахувати максимальне абсолютне відхилення, а іноді й найменше абсолютне відхилення. Реалізуючи товар на різних ринках або різним замовникам, корисно зіставити абсолютне відхилення ціни від її середнього рівня. Великі абсолютні відхилення настроюють на можливість великого ризику. Однак екстремальні виняткові відхилення під час реалізації товару окремим замовникам можуть бути локалізовані загальною стратегією маркетингової політики. Тому необхідні більш загальні показники оцінки ризику. Математичне сподівання застосовується для усереднення досліджуваних величин, цін, що залежить від низки випадкових величин, коли інформація має відомий розкид. З математичним сподіванням звичайно пов'язують точку, біля якої ймовірність має найбільше значення. Тому в економічних розрахунках часто використовуються показники середніх цін, індекси середніх цін, середньої собівартості, середньої рентабельності, оскільки конкретні ціни навіть у межах одного ринку мають, як правило, деякий розкид.

Дисперсія дає більш загальну оцінку відхилень і являє собою середньозважене квадратів відхилень конкретних показників (варіацій) від математичного сподівання, тобто середнього очікуваного його значення. Середнє квадратичне відхилення, або стандартне відхилення, являє собою квадратний корінь із дисперсії. Ця ймовірна, статистична характеристика більше наближається до інтуїтивних уявлень про оцінку мінливості кон'юнктури ринку, ціннісних показників, оскільки зіставлення ведуться вже не з квадратами відхилень, а з квадратним коренем із суми квадратних відхилень. Інакше кажучи, ймовірні відхилення приводяться в реальну розмірність.

Коефіцієнт варіації випадкової величини являє собою виражене у відсотках відношення середнього квадратичного відхилення до математичного сподівання, або середньозважене значення цієї величини.

Дисперсія D(x), даючи загальну характеристику квадратів відхилень випадкової величини, дозволяє: по-перше, усунути відмінності в позитивних та негативних відхиленнях, тому що квадрат негативної величини є позитивною величиною, по-друге, при її обчисленні підсилюється значення великих відхилень і зменшується значення малих відхилень. Це відповідає закономірності квадратичної функції. Використання дисперсії в практичних розрахунках та її інтерпретація вимагають певних навичок. Мабуть, зручніше за все використовувати порівняння дисперсій при опрацюванні даних про конкретні однойменні показники за різні періоди або в різних сферах і сегментах ринку. Середнє квадратичне відхилення σ обчислюється на відміну від дисперсії в тій же розмірності, що й сама випадкова величина. Саме це послужило причиною його широкого застосування для характеристики відхилень та ймовірної оцінки поведінки випадкової величини. Принцип практичної впевненості можна сформулювати так: якщо ймовірність деякої події в даному досліді досить мала, то можна бути практично впевненим у тому, що за однократного виконання досліду Е подія А не відбудеться. Стосовно підприємницької діяльності принцип практичної впевненості, мабуть, можна сформулювати так: практично можна бути впевненим, що захід, який намічається, дія, прийняте рішення будуть здійснені, якщо ймовірність їх нездійснення, ризик досить малі.

У ціноутворенні можна зробити висновок про можливі відхилення ціни від прийнятої в розрахунках, про відхилення попиту у разі зміни ціни, відхилення можливих доходів, прибутку.

Література

[1] - Дугіна С. І. Маркетингова цінова політика. Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2005. – 393 с. Електронний доступ: https://buklib.net/books/26056/

[2] - Теорія ймовірності – основа при оцінюванні рівня ризику Електронний доступ: http://ukr.vipreshebnik.ru/upr-rizik/441-teoriya-jmovirnosti-osnova-pri-otsinyuvanni-rivnya-riziku.html

[3] - Вітлінський В. В та ін. Економічний ризик: ігрові моделі: Навч. посібник / В. В. Вітлінський та ін.. – К.:КНЕУ, 2002. – 446 с.

УДК 658.012.32

Луньов Д. Ю.(аспірант I курсу)

Науковий керівник – проф. Мартинюк О. А.

Міжнародний гуманітарний університет (Одеса, Україна)

РОЛЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У МЕНЕДЖМЕНТІ ПРИ ПРИЙНЯТТІ РІШЕННЯ ПРО ІТ-АУТСОРСИНГ

Однією із ключових рушійних сил глобалізації виступає конкуренція. Саме її кількісно-якісний розвиток у XX-XXI століттях, зумовив перехід на якісно новий рівень функціонування та розвитку економічних процесів.

Наукові здобутки останнього десятиліття доводять можливість керування визначеними надскладними процесами за допомогою таких систем управління, в яких інструменти, методи та моделі управління створюють економіко-технологічний континуум когерентних технологій управління. Поряд із низкою інших факторів, став причиною появи такої концепції менеджменту як аутсорсинг.

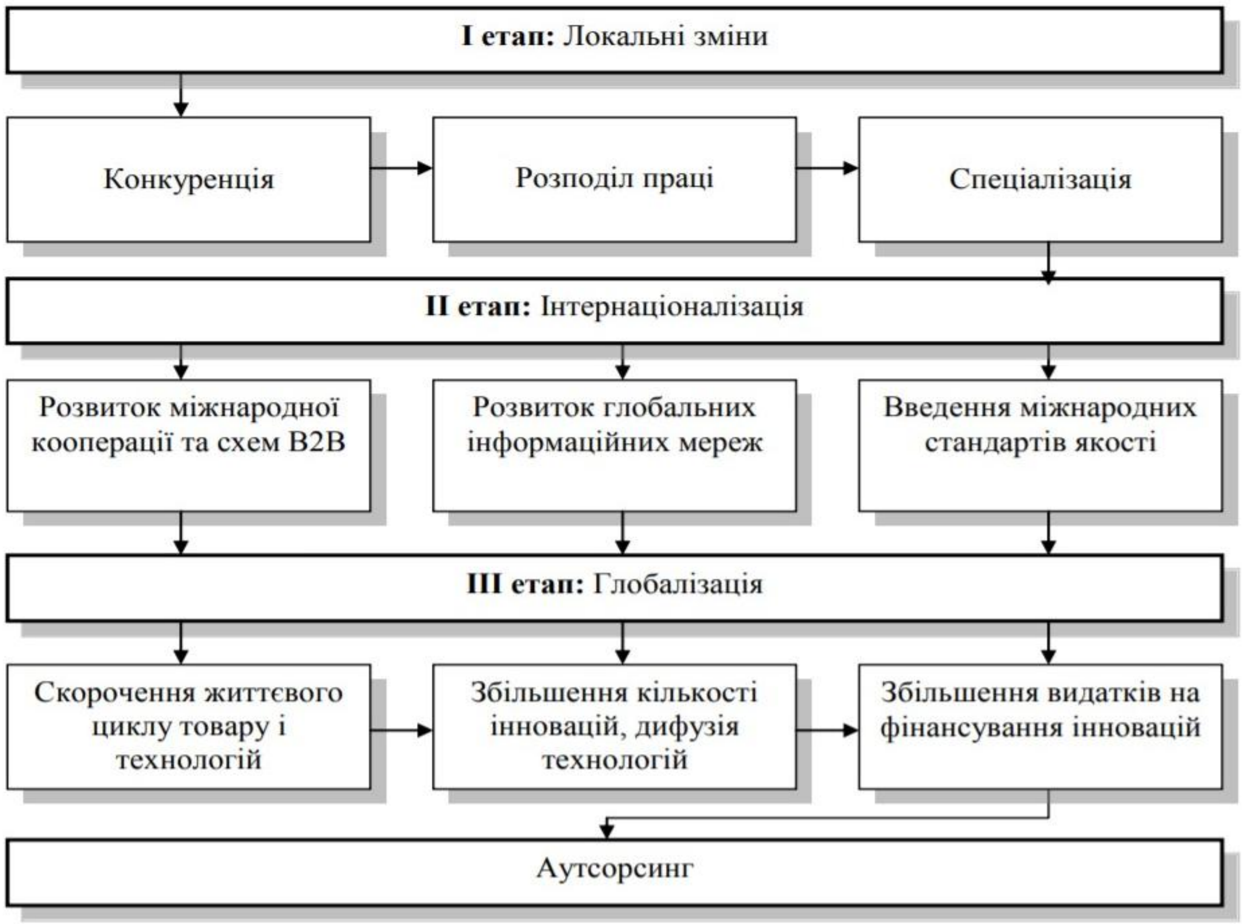


Рис. 1. Рушійні сили, що вплинули на розвиток аутсорсингу [1]

Сутність аутсорсингу полягає у тому щоб мінімізувати фінансові втрати від утримання ресурсів на непрофільні функції підприємства шляхом делегування їх підприємству-аутсорсеру або приватному підряднику (або, якщо підприємство використовує свої потужності/ресурси що «простоюють» це буде називатися «інсорсинг»). Для прийняття рішення про аутсорсинг широко використовують математичне моделювання.

Математичні моделі є універсальними і можуть бути використані в будь якій сфері життєдіяльності, при вирішенні безлічі задач, які є загальними по управлінській природі і є різними за економічним змістом.

Розглянемо класифікацію, що дозволяє ставити у відповідність завданням менеджменту необхідні для їх вирішення конкретні математичні моделі [2].

Перша підстава для класифікації визначає область прийняття управлінських рішень. Практичний менеджмент виділяє три основні області прийняття управлінських рішень - виробничу, інвестиційну та фінансову. Усередині кожної області визначені свої об'єкти управління для менеджменту.

Друга підстава для класифікації визначає клас завдань управління організацією, серед яких можна виділити статичні і динамічні задачі. Статичні завдання мають сенс завдань розподілу ресурсів, а динамічні - поточного управління (регулювання і прогнозування) або стратегічного планування.

Третя підстава для класифікації включає математичні моделі рішення задач управління - теорії дослідження операцій і теорії управління, які в свою чергу мають методичну конкретизацію.

Завдання менеджменту найчастіше пов'язані з перебуванням мінімуму або максимуму цільової функції при відомих обмеженнях, що накладаються на її змінні. В якості цільової функції при вирішенні різних оптимізаційних задач приймають кількість або вартість продукції, що випускається, витрати на виробництво, суму прибутку і т. п. Обмеження зазвичай - ресурси: людські, матеріальні, грошові [3, 5]. Застосування конкретного методу залежить від виду завдання. Приклади представлені в табл. 1.

Таблиця 1

Взаємозв’язок математичних моделей і прикладного використання

Математична модель	Приклад використання
Теоретичні моделі	Модель безперервного нарахування відсотків
Макроекономічні моделі	Модель міжфазоного балансу В.Леонт’єва
Мікроекономічні моделі	Модель «витрат-випуск» для конкретного економічного об’єкта
Прикладні моделі	Аналіз функцій затримка, випуск, спроба, пропозиції та інше
Стохастичні моделі	Визначення вірогідності надійності паперів, якості продукції
Статистичні моделі	Креслення кривої зростання, регресійних ліній

(складено автором на основі [3,5]

Ми наведемо приклад моделі взаємодії підприємства з аутсорсером, яку можна представити як взаємодію «малого та великого підприємства». Для неї було розроблено спеціальну математично модель на основі системи диференційних рівнянь [4]. Виробнича діяльність описується однофакторною виробничою функцією типу Леонтьєва, темп розвитку і випуск продукції (послуг) підприємств визначаються динамікою основних фондів. Ця модель дозволяє описувати взаємодію й спільний розвиток двох сторін (підприємства і аутсорсера). Розглянемо результати одного з таких процесів моделювання ефективності аутсорсингу на основі даної математичної моделі і подивимось, що вона дозволила дослідити (рис. 2).

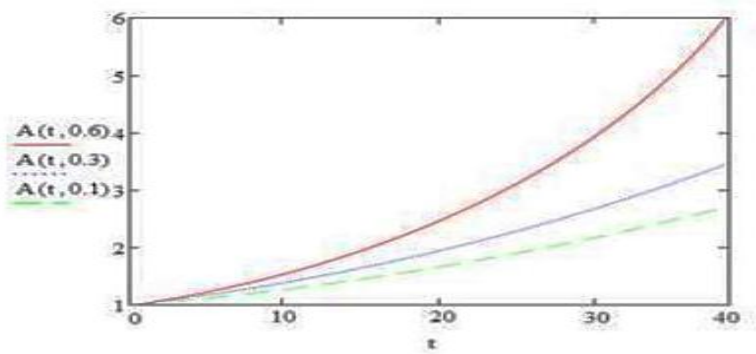


Рис. 2. Залежність вартості ОВФ аутсорсера від часу: суцільна лінія - ξ (коефіцієнт реінвестування) = 0,6; пунктирна лінія -ξ = 0,3; точкова лінія-ξ = 0,1

Модель показує, що рівень реінвестування підприємства має вельми істотний вплив на динаміку основних виробничих фондів (ОВФ) підприємства-аутсорсера. До числа факторів, що впливають на динаміку зміни ОВФ відносяться початковий їх рівень, обсяг виділених інвестицій. До числа факторів, які форсують динаміку процесу, відносяться змінні, що визначають ефективність виробництва, величину питомого прибутку підприємства і його фондовіддачу.

До числа факторів, що гальмують динаміку, відносяться змінні, що обмежують частку інвестування та характеризують податковий прес на підприємство. Це свідчить про економічну ефективність такої кооперації, адже темп розвитку підприємств визначався через ОВФ, а вони в свою чергу мають досить позитивну динаміку.

Анотація. *Стаття присвячена розгляду можливостей використання математичного моделювання у дослідженні ефективності процесів в області менеджменту підприємств, що використовують аутсорсингову модель управління. Представлено, що математичні моделі є універсальними і незалежно від області господарювання, можуть бути використані для вирішення широкого колу завдань. Наведено співвідношення математичних моделей, що використовуються, із сферами можливого їх застосування в економіці підприємств. Наведено прикладне застосування моделі на прикладі моделювання взаємодії підприємства з аутсорсером. Отримані результати підтверджують релевантність застосування такої моделі.*

Ключові слова: *Менеджмент, ІТ- аутсорсинг, математичні моделі, функція Леонтьева, реінвестування, ефективність.*

Література

[1] - Зозульов О. В. Аутсорсинг як інструмент підвищення конкуренто-спроможності вітчизняних підприємств в умовах глобалізації // *Економіка України*. - 2013. - Вип 8. - С. 573.

[2] - Глизуцин В. Е. Математические возможности практического менеджмента // Липецкий государственный технический университет. *Экономика и бизнес.* - 2003. - URL: https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskie-vozmozhnosti-prakticheskogo-menedzhmenta (дата звернення: 12.02.2020).

[3] - Серебрякова И. В. Современные задачи менеджмента в области математического моделирования // Уральський государственный университет физической культуры. *Образование. Педагогические науки*. - 2013. - Вып. 2. -С. 101.

[4] - Лазарєва Н. О., Фартушний І. Д. Моделювання ефективності використання ресурсів малого підприємства в структурі великого підприємства // *Актуальні проблеми економіки та управління: збірник наукових праць молодих вчених*. - 2016. - Вип. 10. - С. 3.

[5] - Мартинюк О. А. Діагностика рівня управлінсько-технологічної зрілості підприємств харчової промисловості // *Агросвіт*. - 2018. – № 3 – С. 25-31.

УДК 51:004

Майстрюк І. С. (студ., 5 курс)
Науковий керівник – проф. Гризун Л. Е.
Харківський національний педагогічний університет імені Г.С.Сковороди
(Харків, Україна)

ПРОЕКТУВАННЯ ЕЛЕКТРОННОГО ТРЕНАЖЕРУ ДЛЯ ШКОЛЯРІВ З РОЗВ'ЯЗАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ

З розвитком інформатики та інформаційних технологій арсенал дидактичних засобів для закладів загальної середньої освіти розширився. Для здійснення педагогічної підтримки учнів розробляється велика кількість електронних тренажерів, програм, комплексів тощо.

Дослідження з питань проектування електронних тренажерів висвітлено у працях М.І. Бєляєва, Л.І. Білоусової, Л.Е. Гризун, В.В. Гури, Н.В. Олефіренко, С.В. Шарова. Зокрема, роботи Т.М. Шалкіної, В.В. Запорожко, А.О. Ричкової, присвячені проектуванню електронних навчальних комплексів у професійній освіті.

Значна кількість робіт стосується саме розробці та проектуванню електронних тренажерів. Так, у працях І.О. Башмакова та О.І. Башмакова виділяють чотири стадії у проектуванні електронного тренажеру: загальне проектування, моделювання, реалізація та підготовка до апробації [1, с. 45].

Метою даної статті є: розглянути етапи проектування електронного тренажеру для школярів з розв'язання комбінаторних задач, обґрунтувати вимоги та його роль у закладах загальної середньої освіти.

Проектування електронного тренажеру здійснюється у вісім етапів: цільовий, аналітичний, етап створення структурної моделі, методично-інструментальний, конструювальний, етап попередньої апробації, апробація, корекційно-рефлексивний етап [2, с. 30].

На цільовому етапі визначають мету, що спрямована на досягнення пізнавальних, розвивальних та виховних цілей. Важливим елементом є точність, за допомогою якої буде досягнена основна мета у використанні електронного тренажеру.

На аналітичному етапі передбачається з'ясування традиційних складностей, що виникають у школярів при опануванні теми, у нашому випадку, з розв'язання комбінаторних задач. Окрім цього, необхідно передбачити проблеми та складнощі, що можуть виникнути в процесі роботи з електронним тренажером.

На етапі створення структурної моделі важливо враховувати індивідуальні особливості школярів (темперамент, темп роботи та опанування навчального матеріалу). При цьому необхідно залишити школярам свободу вибору, розв'язувати задачі різними способами та спроби змінити відповідь.

На методично-інструментальному етапі необхідно продумати зміст і об'єм інформації, яку школярі будуть бачити на комп'ютері. Важливим є підбір теоретичного матеріалу, практичних завдань, зміст самостійних та контрольних робіт і запитань.

Здійснена робота на попередніх етапах дозволяє вибрати інструментальний засіб, що надає можливості для створення електронного тренажеру.

На конструювальному етапі відбувається наповнення розробленої структури середовища заздалегідь підготовленими матеріалами. Конструювання потребує особливої уваги, адже для школярів важливо, щоб було комфорте середовище, наповнене кольоровими елементами та зручним інтерфейсом. Змістове наповнення потребує корекції матеріалів, особлива увага приділяється оформленню текстів, з урахуванням особливостей розвитку школярів. Тексти завдань повинні бути короткими, зрозумілими та не містити складних оборотів, адже втрачається увага.

На етапі попередньої апробації відбувається первинна експертиза. Значну увагу приділяють перевірці якості реалізації електронного тренажеру. Необхідно ретельно перевірити функціональні можливості всіх елементів та завершення роботи школярами у будь-який час.

На етапі апробації електронного тренажеру необхідно з'ясувати, чи потрібно встановлювати на комп'ютери школярів додаткове програмне забезпечення. Маємо змогу визначити досягнення поставленої мети та подолання труднощів, що виникали у школярів в опануванні даної теми.

На корекційно-рефлексивному етапі відбувається аналіз виконаної роботи з урахуванням апробації електронного тренажеру.

Сформулюємо вимоги до електронного тренажеру з розв'язання комбінаторних задач:

1. Зручний інтерфейс, кольорова гамма та шрифт тексту;
2. Можливість переміщувати об'єкти, робити комбінації та сполуки;
3. Можливість розв'язувати комбінаторні задачі з візуалізацією;
4. Можливість повернутися та повторити теоретичні аспекти для розв'язання задач;
5. Розв'язання «змішаних» задач;
6. Наявність достатньої кількості теоретичного матеріалу та прикладів розв'язання комбінаторних задач.

Отже, якщо розробити електронний тренажер з розв'язання комбінаторних задач, постійно його удосконалювати та пропонувати його школярам, то можна подолати труднощі в опануванні навчального матеріалу. Крім того, на відміну від використання готового електронного ресурсу, значно скорочується термін, що необхідний для завантаження та встановлення на комп'ютер, пошуки оновлених версій тощо.

__Анотація.__ У статті розглядаються етапи проектування електронного тренажеру для школярів. Обґрунтовано вимоги та його роль у закладах загальної середньої освіти. Проаналізовано наукові дослідження, що присвячені проектуванню електронних тренажерів.

Ключові слова: *проектування, електронний тренажер, комбінаторні задачі, розробка, етапи проектування, вимоги, роль, наукові дослідження.*

Література

[1] - Башмаков А. И. Разработка компьютерных учебников и обучающих систем/ А. И. Башмаков, И. А. Башмаков – М.: Информационно-издательский дом «Филин», 2003. – 616 с.

[2] - Білоусова Л. І. Дидактичні функції електронних навчальних ресурсів/ Білоусова Л. І., Олефіренко Н. В.// Інформаційні технології і засоби навчання: наукове фахове видання, 2012. – 96 с.

УДК 629.113

Максимчук О. В. (студ., 5 курс)
Науковий керівник – доц. Л. М. Трасковецька
Національна академія Державної прикордонної служби України,
науковий керівник – доц.О. Ю. Рудик
Хмельницький національний університет
(Хмельницький, Україна)

3D-МОДЕЛЮВАННЯ РЕДУКТОРІВ АВТОКРАНІВ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Редуктором називають пристрій, який перетворює високу кутову швидкість обертання вхідного вала у меншу на вихідному валі, підвищуючи при цьому крутний момент [1].

Циліндричні редуктори використовуються для передавання обертального руху між паралельними або співвісними валами за допомогою циліндричних зубчастих передач. Вони мають високий ККД (0,94-0,98 на один ступінь) і великий ресурс роботи (36 000-50 000 год.). Недоліки цих редукторів: підвищені вібрації, які знижуються використанням косозубих та шевронних передач.

Широке застосування редукторів у різних галузях техніки стало можливо завдяки зміні передаточного числа у великому діапазоні. Практично усі крани, кранбалки тощо мають у своєму складі редуктор [2].

Практичне промислове проектування циліндричних редукторів передбачає виконання багатьох видів розрахунків: кінематичних, габаритних та розрахунків на міцність усіх його елементів: приводу, зубчастих коліс, валів, підшипників, шпонок тощо.

3D-моделювання циліндричного косозубого редуктора (рис. 1) розглянемо на прикладі застосування системи автоматизованого проектування SolidWorks [3]. У даний момент структуру пакета SolidWorks можна представити базовим розв'язком і додатковими модулями. Базовий розв'язок – це система гібридного параметричного моделювання, яка призначена для проектування деталей і складань у тривимірному просторі з можливістю проведення різних видів експрес-аналізу, а також оформлення конструкторської документації відповідно до вимог ЄСКД.

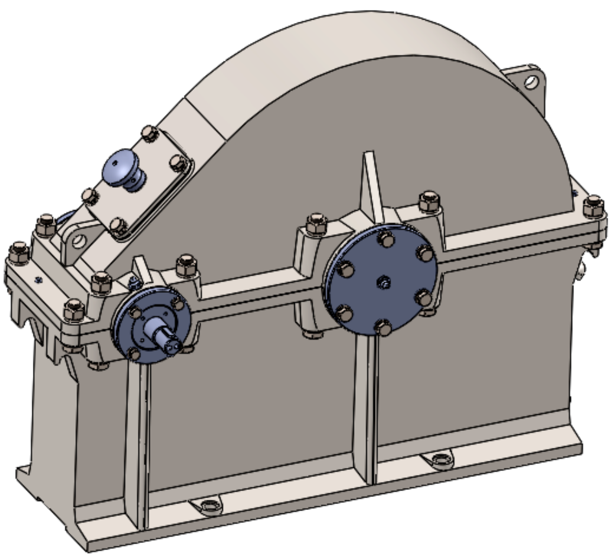


Рис. 1. 3D-модель циліндричного косозубого редуктора

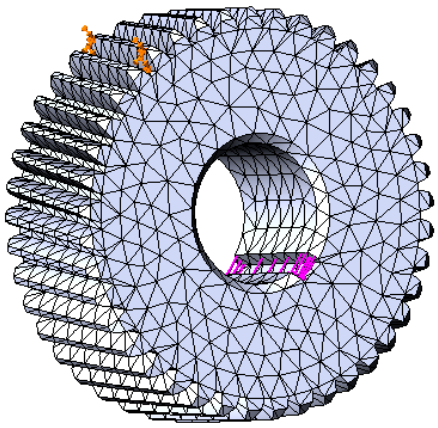
В SolidWorks можна працювати як з твердими тілами, так і з поверхнями. Як правило, деталь є твердим тілом, поверхнею, або комбінацією твердого тіла й набору поверхонь. Процес побудови 3D-моделі ґрунтується на створенні елементарних геометричних примітивів і виконанні різних операцій між ними. 3D-модель несе в собі повний опис фізичних властивостей об'єкта й дає проектувальникові можливість роботи у віртуальному 3D-просторі, що дозволяє наблизити комп'ютерну модель до наочного представлення спроектованого виробу.

Для перевірної оцінки міцності ведучої шестерні циліндричного косозубого редуктора застосовано метод скінченних елементів (МСЕ), реалізований у системі SolidWorks Simulation [4]: при моделюванні у SolidWorks створювалася його геометрична модель, потім у SolidWorks Simulation вводилися властивості матеріалу, з якого рекомендовано його виготовлення (сталь 30ХГС ГОСТ 4543-71 – отримана шляхом розрахунків за методикою дисципліни "Деталі машин"). Після цього до шестерні прикладався крутний момент M = 35 Нм (моделювався найбільш небезпечний з точки зору запасу міцності випадок), визначалися контактні взаємодії, створювалася скінченно-елементна модель системи (рис. 2). Наступний етап – рішення поставленої задачі (статичний аналіз).

Сетка Детализация

Имя исследования	Статический 1 (-По умолчанию-)
Тип сетки	Сетка на твердом теле
Используемое разбиение	Стандартная сетка
Автоматическое уплотнение сетки	Выкл
Включить автоциклы сетки	Выкл
Точки Якобиана	4 точек
Размер элемента	5.41727 mm
Допуск	0.270863 mm
Качество сетки	Высокая
Всего узлов	20427
Всего элементов	12451
Максимальное соотношение сторон	7.686
Процент элементов с соотношением сторон < 3	86.8
Процент элементов с соотношением сторон > 10	0
% искаженных элементов (якобиан)	0
Время для завершения сетки (hh:mm:ss)	00:00:15

а

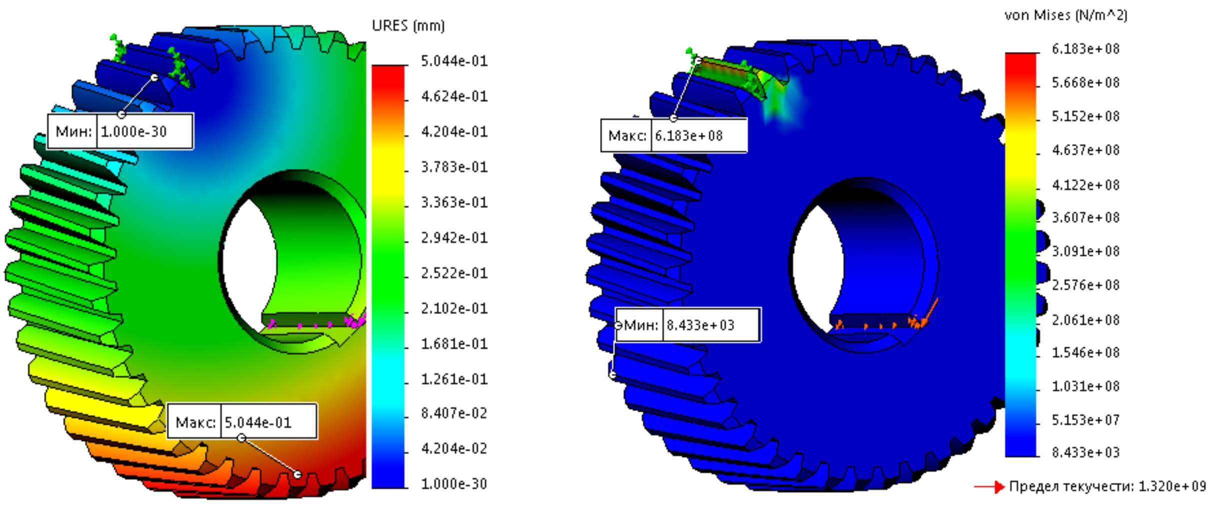


б

Рис. 2. Параметри скінченно-елементної сітки шестерні (а) та її відображення на твердому тілі (б)

При аналізі результатів моделювання встановлено, що при шкалі деформації 17.6534 мінімальний коефіцієнт запасу міцності шестерні знаходиться у вузлі № 984 і становить $n_{мін}$ = 1.422, що менше допустимого $[n]$ = 1.5. Таким чином, потрібно або змінювати геометричні параметри спроектованого редуктора, або (що простіше) – замінити матеріал шестерні на міцніший, наприклад, сталь 45ХН2МФА ГОСТ 4543-71.

Повторними розрахунками встановлено: напруження, яке виникає у шестерні, $\sigma_{макс}$ = 6.183e+08 N/m^2 (вузол 984 – рис. 3, а); результуюче переміщення $h_{макс}$ = 5.044e-01 mm (вузол 1291 – рис. 3, б); еквівалентна деформація $\delta_{макс}$ = 1.966e-03 (елемент 4455). При цьому мінімальний запас міцності $n_{мін}$ = 2.135 (вузол 984), що більше допустимого [n]. Таким чином, заміна матеріалу шестерні гарантує її міцність, а використання МСЕ у навчальному процесі збільшує можливості постановки навчальних задач.



а б

Рис. 3. Контурні графіки сумарних напружень von Mises (а) та переміщень URES (б) шестерні

***Анотація**. За допомогою SolidWorks проведений перевірний розрахунок ведучої шестерні циліндричного косозубого редуктора.*

***Ключові слова**: автокран, редуктор, ведуча шестерня, SolidWorks, МСЕ, заміна матеріалу.*

Література

[1] – Механічний редуктор [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Механічний_редуктор

[2] – Бідніченко О. Об’ємне моделювання одноступінчастого косозубого редуктора в AutoCAD [Електронний ресурс] / О. Бідніченко, Ю. Євстигнеєв. – Режим доступу:

http://nbuv.gov.ua/node/554
[3] – Рудик О. Ю. SolidWorks – CAD/CAE-система технічних вузів [Електронний ресурс] / О. Ю. Рудик, П. В. Каплун. – Режим доступу: http://elar.khnu.km.ua/jspui/handle/123456789/8631
[4] – Rudyk O. Yu. The impact of the SolidWorks Simulation network quality on the accuracy of the calculations [Electronic resource] / O. Yu. Rudyk, V. A. Gonchar. – Access mode: http://sci-conf.com.ua/i-mezhdunarodnaya-nauchno-prakticheskaya-konferencziya-eurasian-scientific-congress-27-28-yanvarya-2020-goda-barselona-ispaniya-arhiv/

УДК 616-71

Малахова О. Ю.(студ., 1 курс)
Наукові керівники – доц. Носова Т. В., доц. Жемчужкіна Т. В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(Харків, Україна)

ПРО НЕОБХІДНІСТЬ РОЗРОБКИ СИСТЕМИ РЕАБІЛІТАЦІЇ ОРА

З огляду на статистичні показники, понад 10% населення України щорічно потрапляють в число людей, які потребують реабілітації.

За визначенням ВООЗ, реабілітація – сукупність заходів, покликаних забезпечити особам з порушеними функціями внаслідок хвороб, травм і вроджених дефектів пристосування до нових умов життя в суспільстві. Вона дозволяє особам різного віку не припиняти або ж відновлювати повсякденну діяльність. Реабілітація є процесом, направленим на всебічну допомогу хворим та інвалідам для досягнення ними максимально можливої при даному захворюванні фізичної, психічної, професійної, соціальної та економічної повноцінності. Перший і основний напрям реабілітації (медичної та фізичної) – відновлення здоров’я хворого за умов комплексного використання різноманітних засобів, направлених на максимальне відновлення порушених фізіологічних функцій організму, а у випадку неможливості досягнення цього – розвиток компенсаторних і замісних пристосувань. Фізична реабілітація – складова частина медичної, соціальної та професійної реабілітації, що використовує засоби та методи фізичної культури, масаж та фізичні фактори [1]. Цей вид відновлення діяльності є цілком індивідуальним та вимагає постійного контролю стану опорно-рухового апарату (ОРА) під час виконання тих чи інших вправ. Так, розробка єдиної системи діагностики ОРА в процесі ходьби необхідна і є однією з головних задач нашого дослідження.

Опорно-руховий апарат – складний комплекс, що забезпечує тілу опір, рухову активність всіх частин тіла і можливість пересування в просторі. Основні методи дослідження в анатомії ОРА – візуальне дослідження, антропометричні дослідження, препарування, макро-, мікроскопічні дослідження, мікроскопічні дослідження. Сучасні методи дослідження в анатомії опорно-рухового апарату: рентгенанатомічні методи, комп'ютерна томографія (КТ), магнітно-резонансна томографія (МРТ), ультразвукове дослідження (УЗД), ендоскопія та ін.

Для діагностики стану ОРА вже використовуються наступні апаратно-програмні комплекси (АПК) [5] – [7]: АПК на базі вібродатчиків (дозволяє оцінити параметри природної ходи людини шляхом обробки сигналів вібрації опори, по якій він проходить); комплекс БОС кінезис ТОВ НМФ «Нейротех»; опорно-руховий комплекс Амалтея «Тонус» (дозволяють проводити тренінги ОРА і м'язової активності на основі реєстрації та аналізу електроміограми).

Істотним недоліком представлених АПК діагностики стану ОРА є використання лише одного методу дослідження. У систему діагностики стану ОРА під час ходьби важливо включити різні методи дослідження для отримання найбільш повної оцінки результату реабілітаційного процесу.

До таких методів можна віднести:

- гоніометрію (метод вимірювання і реєстрації кутових рухів суглобів; дозволяє виявити порушення функціонування суглобів);

- подографію (метод оцінки м'язової сили і тонусу; дає можливість реєстрації прихованих рушійних реакцій і провести оцінку параметрів м'язового руху);

- електроміографію (метод реєстрації біоелектричних потенціалів; широко використовується для діагностики нервово-м'язових захворювань, відображаючи на електроміограмі активність м'язових волокон) [2] – [4];

- 3D сканування (метод реєстрації просторового положення хребта, тазового, плечового пояса і нижніх кінцівок та інших частин і сегментів тіла);

- вимір частоти серцевих скорочень (метод для визначення навантаження на організм, зокрема, серцево-судинну систему під час ходьби).

Загальна схема діагностики опорно-рухового апарату з використанням всіх запропонованих методів дослідження представлено на рис.1.

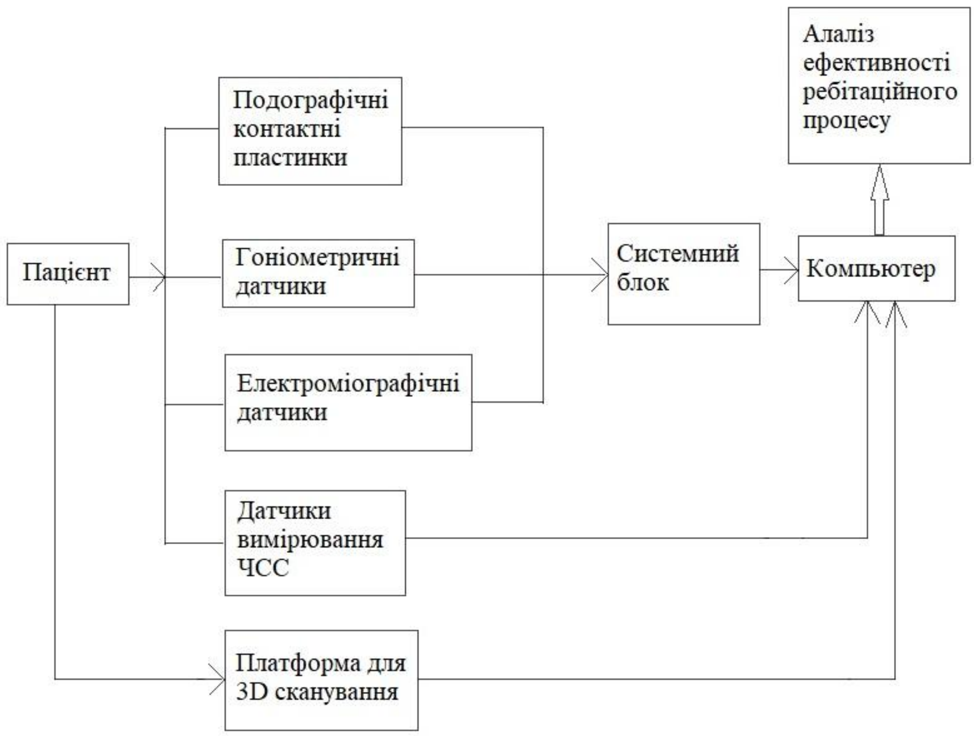


Рис. 1. Схема комплексної діагностики ОДА під час ходьби

Є необхідним розробити систему діагностики ОРА під час ходьби, яка дозволить детально і всебічно вивчити порушення в його роботі і знайти оптимальні шляхи для вирішення проблем, що виникають в процесі реабілітації шляхом використання розглянутих методів діагностики.

Анотація. *З огляду на статистичні показники, високий відсоток людей щорічно зазнають проблем з руховою активністю через травмування, спричинені різноманітними факторами. Опорно-руховий апарат, як основний об'єкт реабілітації для відновлення повсякденної діяльності, має знаходитися під постійним наглядом під час усього періоду реабілітації. Оскільки існуючі апаратно-програмні комплекси діагностики опорно-рухового апарату зазвичай базуються на одному з методів досліджень, є необхідним розробити систему діагностики опорно-рухового апарату під час ходьби для всебічного вивчення порушення його роботи та вирішення виникаючих у процесі реабілітації проблем.*

Ключові слова: *реабілітація, опорно-руховий апарат, апаратно-програмний комплекс, гоніометрія, подографія, електроміографія.*

Література

[1] - Анатомія людини / [Бобрик І. І., Ковешніков В. Г., Лузін В. І., Роменський О.Ю.]; за ред. В.Г.Ковешнікова – Луганськ: Віртуальна реальність, 2005. – 328с.

[2] - Статистический анализ спектральных характеристик ЭМГ-сигнала с целью дифференцирования поясничных болей / Т. В. Жемчужкина, Т. В. Носова, Я. В. Носова [и др.]. // Бионика интеллекта. – 2015. – №2 (85). – С. 105-108.

[3] - Анализ электромиографического сигнала для контроля усталости мышц в режиме реального времени / В. С. Чумак, Е. А. Чугуй, Т. В. Носова, Т. В. Жемчужкина // Матеріали 23 Міжнародного молодіжного форуму. Т.1. – Харків: ХНУРЕ, 2019. – С. 243 – 244.

[4] - Tatyana V. Zhemchuzhkina, Sergii M. Zlepko, Tatyana V. Nosova, Valerii V. Semenets, Oleksii V. Kirichek, Marcin Maciejewski, and Ainur Ormanbekova "Application of EMG-signal phase portraits for differentiation of musculoskeletal system diseases", Proc. SPIE 11176, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments 2019, 1117632 (6 November 2019).

[5] - Пат. № 86847, Україна, Ф61И 5/0488. Система для комплексного обстеження опорно-рухового апарату нижніх кінцівок / Аврунін О. Г., Носова Т. В., Семенець В. В.; заявник та патентовласник Харківський національний університет радіоелектроніки; заявл. 11.06.2007; опубл. 25.05.2009, Бюл. № 10

[6] - Компьютерная система анализа состояния опорно-двигательного аппарата на основе фазових портретов ЭМГ / В. С. Топчий, Т. В. Жемчужкина, Т. В. Носова // Физические процессы и поля технических и биологических объектов: материалы XVI Международной научно-технической конференции, 3-5 ноя. 2017 г. – Кременчуг: КрНУ, 2017. – С. 87-89

[7] - Жемчужкіна Т. В. Система контролю стомлення м'язів водія перед рейсом / Т. В. Жемчужкіна, Т. В. Носова, О. Ю. Малахова // Наукові праці IV Міжнародної науково-практичної конференції «Безпека на транспорті – основа ефективної інфраструктури: проблеми та перспективи». – Харків, ХНАДУ, 2019. – С.176-179.

Михайленко М. В.(студ., 2 курс)
Науковий керівник – ст. викл. Нестеренко В. О.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ЛІНІЙНИЙ РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ ТА КОНСТРУКЦІЙ

Більшість задач, які пов'язані з аналізом характеристик механічних властивостей матеріалів та елементів конструкцій, вирішують в межах лінійної залежності між величинами, що вивчаються. При цьому вважаємо, що Y є випадковою величиною, яка має нормальний розподіл, а X може бути як випадковою так і невипадковою величиною.

Якщо величин, які ми розглядаємо, залежні, то зі зміною величини X у загальному випадку можуть змінюватись обидва параметра нормального розподілу випадкової величини Y (a - математичне сподівання, σ - середнє квадратичне відхилення), тобто

$$a_{y/x} = f_1(x) \quad (1)$$

$$\sigma^2_{e/x} = f_2(x) \quad (2)$$

Першу залежність називають рівнянням регресії, а другу скедастичною залежністю.

Регресійний аналіз результатів випродувань передбачає оцінку параметрів рівняння лінії регресії з урахуванням скедастичної залежності, а також перевірку гіпотези про відповідність обраної функції (1) даним спостережень, тобто перевірку гіпотези про адекватність обраної математичної моделі.

Ми розглянемо схему регресійного аналізу у випадку, коли обидві величини X та Y є незалежними випадковими величинами. В цьому випадку регресійному аналізу передує кореляційний аналіз,на основі якого проводять оцінку середніх значень, дисперсій та коефіцієнта кореляції: $\bar{x}, \bar{y}, s^2_x, s^2_y, r_{xy}$ Тоді рівняння теоретичної лінії регресії записуємо у вигляді

$$M(Y/x) = a_{y/x} = \alpha + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}), \quad (3)$$

де $M(Y/x)$ - умовне математичне сподівання величини Y при фіксованому значенні $X = x$.

Оцінкою теоретичної лінії є емпірична лінія регресії , рівняння якої має вигляд

$$Y = \bar{y} + r_{xy}\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}) \quad (4)$$

або $$y = a + bx \quad (5)$$

де $b = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}$, $a = \bar{y} - bx$.

Параметр b називають коефіцієнтом регресії.

Для більшості задач можна прийняти, що умовна дисперсія величини Y не залежить від x , тобто рівняння (2) має вигляд

$$f_2(x) = \sigma^2_{y/x} = const \quad (6)$$

Для оцінки умовної дисперсії $\sigma^2_{y/x}$ використовують вибіркову дисперсію $s^2_{y/x}$, яку обчислюємо за формулою

$$s^2_{y/x} = \frac{1}{n_{i\cdot} - m}\sum_{i=1}^{i=m}(n_{i\cdot} - 1)s^2_{y/x_i} \quad (7)$$

де $n = \sum_{i=1}^{i=m} n_{i\cdot}$ - загальне число випробувань, та вибіркові умовні дисперсії

$$s^2_{y/x_i} = \frac{1}{n_{i\cdot} - 1}\left(\sum_{j=1}^{i=k} n_{ij}\left(y_j - \bar{y_i}\right)^2\right. \quad (8)$$

Прийняттю умови (6) і, отже, використанню формул (7) повинна передувати перевірка однорідності умовних дисперсій (8). Для цього доцільно застосовувати критерій Бартлета.

Величина $s_{y/x} = \sqrt{s^2_{y/x}}$ використовується також як міра індивідуального розсіяння результатів спостережень навколо лінії регресії, тобто в якості основної похибки визначення випадкової величини по рівнянню емпіричної лінії регресії. Цю похибку позначають через $\delta_e = s_{y/x}$ і знаходимо за формулою

$$\delta_y = \sqrt{s^2_{y/x}} = s_y\sqrt{(1 - r_{xy})^2\frac{n-1}{n-2}} \quad (9)$$

У загальному випадку при аналізі залежності між двома випадковими величинами може бути дві лінії регресії − регресії Y на X (1) та регресії X на Y , при цьому в усіх формулах замінімо X на Y та Y на X .

Лінія регресії Y на X не співпадають з лінією X на Y . Обидві лінії перетинаються в точці $(\bar{x};\bar{y})$, а кут між ними тім більше, чим більше абсолютне значення коефіцієнта кореляції відрізняється від одиниці. Коли $|r_{xy}| = 1$, то лінії регресії співпадають.

Важливим елементом регресійного аналізу є перевірка лінійності залежності між величинами, які ми досліджуємо. Це особливо актуально у випадках, коли виникає необхідність екстраполяції лінії регресії за область експериментальних значень.

Критерій лінійності при аналізі залежності між двома випадковими величинами будується за допомогою кореляційних відношень:

$$\eta_{Y/x} = \frac{\sigma_{\bar{y}/x}}{\sigma_y} \quad \text{та} \quad \eta_{X/y} = \frac{\sigma_{\bar{x}/y}}{\sigma_x} \qquad (10)$$

де σ_x, σ_y − середні квадратичні відхилення відносно загальних умовних значень; $\sigma_{\bar{x}/y}, \sigma_{\bar{y}/x}$ − середні квадратичні відхилення умовних середніх відносно загальних середніх.

Кореляційне відношення при криволінійній регресії, як і коефіцієнт кореляції при лінійній регресії, характеризує щільність групування даних навколо лінії регресії. Кореляційне відношення знаходиться в межах від нуля до одиниці. Для некорелірованих величин $\eta_{X/y} = \eta_{Y/x} = 0$, а у випадку функціональної залежності $\eta_{X/y} = \eta_{Y/x} = 1$. Якщо кореляційна залежність між двома випадковими величинами лінійна, то кореляційні відношення рівні абсолютному значенню коефіцієнта кореляції:

$$\eta_{X/y} = \eta_{Y/x} = |\rho| \qquad (11)$$

Умова (11) використовується в якості критерію лінійності кореляційної залежності.

Критерій лінійності за даними вибірки перевіряють шляхом порівняння емпіричних кореляційних відношень з вибірковим коефіцієнтом кореляції. Якщо надійний інтервал для абсолютного значення коефіцієнта кореляції містить емпіричне значення кореляційних відношень, то лінійність регресії потверджується. Лінійність кореляційної залежності між двома випадковими величинами потверджується в тому випадку, якщо різниця між емпіричними кореляційними відношеннями та абсолютним значенням вибіркового коефіцієнта кореляції не перевищує двох – трьох величин середнього квадратичного відхилення коефіцієнта кореляції, тобто

$$\eta^*_{Y/x} - \left|r_{xy}\right| \leq l s_r, \text{ або } \eta^*_{X/y} - \left|r_{xy}\right| \leq l s_r, \quad l = 2{,}3 \tag{12}$$

Емпіричні кореляційні відношення обчислюємо за формулами

$$\eta^*_{Y/x} = \frac{s_{\bar{y}/x}}{s_y}, \quad \eta^*_{X/y} = \frac{s_{\bar{x}/y}}{s_x}, \tag{13}$$

де s_x та s_y вибіркові середнє квадратичні відхилення величин X та Y відносно загальних середніх; $s_{\bar{x}/y}$ та $s_{\bar{y}/x}$ - вибіркові середнє квадратичні відхилення умовних середніх відносно загальних середніх. Вони обчислюються за формулами

$$s_{\bar{x}/y} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{j=k} n_{\cdot j}(\bar{x_j} - \bar{x})^2} \tag{14}$$

$$s_{\bar{y}/x} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{i=m} n_{i\cdot}(\bar{y_i} - \bar{y})^2} \tag{15}$$

Для оцінки теоретичної лінії регресії (3) можна побудувати надійну область. Для цього візьмемо декілька значень x та за формулами (4) і (5) знаходимо Y , а також оцінку її дисперсії

$$s^2_{Y/x} = s^2_{y/x}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}\right) \tag{16}$$

Далі знаходимо надійний інтервал для $a_y = M(Y)$

$$Y - s_{Y/x}t_{\alpha,k} < a_y < Y + s_{Y/x}t_{\alpha,k} \tag{17}$$

де $k = n - 2$, а $t_{\alpha,k}$ - коефіцієнти Стьюдента.

Міру індивідуального розсіяння навколо лінії регресії, тобто похибку визначення Y за рівнянням (4), знаходимо за формулою (9).

При малому об'ємі експериментальних даних, які не дозволяють їх групування, лінійність кривої регресії перевіряємо графічно. У зв'язку з тим, що в цьому випадку кожному значенню незалежній випадковій величині відповідає тільки одне значення залежної величини, перевірка сталості умовних дисперсій (6) при малому об'ємі спостережень неможлива

В якості оцінки умовної дисперсії $Y.$, коли маємо n пар спостережень $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, може бути використана дисперсія спостережень навколо лінії регресії

$$s_{y/x}^2 = \frac{1}{n=2} \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - Y_i)^2 \quad ,$$

що рівносильне співвідношенню

$$s_{y/x}^2 = s_y^2 \left(1 - r_{xy}\right) \frac{n-1}{n-2}. \tag{18}$$

Анотація. *В роботі розглядається схема регресійного аналізу характеристик механічних властивостей матеріалів та елементів конструкцій, наведені основні формули аналізу, критерії лінійності регресії, міру індивідуального розсіяння навколо лінії регресії.*

Література

[1] -.Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / Учебное пособие. М. Высш. Школа, 1988. – 476 с.

[2] - Соколенко О. І. Вища математика / Підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 432 с.

УДК 657.631.6

Нежива М. О.(доцент)

Київський національний торговельно-економічний університет

(Київ, Україна)

АУДИТ ЕФЕКТИВНОСТІ ЯК СТРАТЕГІЧНИЙ ВЕКТОР РОЗВИТКУ ВІДКРИТОЇ ЕКОНОМІКИ

Проблема застосування аудиту ефективності в нинішніх реаліях постає доволі гостро, адже на даний момент цей вид аудиту застосовується лише в секторі державного аудиту, що не є вірним з позиції необхідності його використання по відношенню до підприємств, які не відносяться до державного сектору. На даному етапі розвитку економіки перед кожним підприємством постає питання визначення його ефективності на ринку. В сучасних ринкових умовах для забезпечення економічного розвитку підприємства змушені постійно контролювати та підвищувати ефективність своєї діяльності. Даний крок зумовлений, перш за все, бажанням підприємців освоювати нові ринки збуту та залучати нових інвесторів задля збільшення промислових оборотів і в майбутньому – збільшенням прибутку. З плином часу поняття «ефективність господарювання» набуло нових форм та перетворилось з простого збільшення потужності підприємства до аналізу показників, спроможних визначити картину діяльності підприємства.

Задля досягнення зростання ефективності діяльності підприємства потрібен детальний аналіз показників на підприємстві, адже, в залежності від підприємства, напрямки використання зовнішніх та внутрішніх чинників для підвищення ефективності можуть бути не однаковими за впливом, контролем та ступенем використання. Тому для менеджерів та керівників на різних ланках управління підприємством важливим є розуміння масштабів дій та спроможність використання зовнішніх та внутрішніх чинників задля управління діяльністю трудового колективу.

Аудит ефективності в Україні розглядають, як перевірку бюджетних програм чи доцільності використання бюджетних коштів, а не як перевірку ефективності діяльності підприємств оптової, роздрібної торгівель чи громадських, або інших нерелігійних організацій. Потреба перевірки ефективності використання коштів громадських організацій потребує велику кількість спеціалістів, які спроможні виконати дане завдання, а видати коректний по всім стандартам висновок може не кожна компанія, що показує в необхідності зміни ринку аудиторських послуг.

Головною метою аудиту ефективності є оцінка результативності діяльності підприємства на основі визначення показників ефективності діяльності підприємства. Основні цілі, які необхідно проаналізувати при роботі з підприємствами при здійсненні аудиту ефективності діяльності підприємства:

1) ефективність організаційної системи управління підприємства:

- ефективності організації структури управління та її функцій;
- професійного рівня управління підприємства;
- встановлення рівня організаційної культури управлінців вищої та середньої ланки;
- якості професійного спілкування між управлінцями різних підрозділів підприємства;
- порядку прийняття та реалізації управлінських рішень;
- системи внутрішнього контролю;
- використання сучасних методів управління;

2) ефективність ведення господарської діяльності підприємства:

- практичної діяльності підприємства;
- позиції на ринку та можливості конкуренції;
- тенденцій розвитку підприємства;
- рівня ефективності та можливості її підвищення.

На відміну від аудиту господарської діяльності підприємства, аудит ефективності цікавить саме ефективність задіяння потенціалу підприємства, тому його завданнями є:

- ефективність управління: повнота виконання функцій; якість виконання функцій; своєчасність виконання функцій;
- ефективність використання ресурсів: використання оптимальної кількості ресурсів; оцінка ефективності використання ресурсів;
- ефективність використання коштів: обґрунтування напрямів витрат; аналіз ефективності використання коштів.

Завершальною особливістю кожної з перевірок є надання висновку. Що в фінансовому аудиті, що в аудиті ефективності, кінцеві етапи перевірки проходять однаково. Адже перед наданням висновку йде етап обговорення з клієнтом виявлених помилок та надання рекомендацій, які підприємство може усунути в ході аудиту, що може підвищити ефективність діяльності підприємства ще на етапі проведення аудиту. В цьому випадку в звіті про результати аудиту доцільно включити пункт, що в процесі проведення перевірки група з завдання звернула увагу на дану проблему, а організація оперативно вжила відповідні заходи для її вирішення. Складання звіту є завершальним етапом безпосередньої аудиторської перевірки. Назва звіту визначається вибраною темою аудиту ефективності.

Таким чином, використання аудиту ефективності діяльності підприємств в умовах відкритої економіки, передбачає його виділення як самостійного виду аудиту, який зможе висвітлити ефективність діяльності підприємства в усіх суттєвих аспектах, виходячи з його особливостей діяльності, становища на ринку та рівня конкуренції на ньому.

Анотація. *В статті розглянуто доцільність використання аудиту ефективності не лише в державному секторі економіки. Обґрунтовано доцільність використання аудиту ефективності по відношенню до приватних підприємств, виходячи з економічних реалій української економіки. Метою порівняння аудиту ефективності з фінансовим аудитом було виявлення спільних особливостей, задля обґрунтування необхідності та можливості використання аудиту ефективності діяльності.*

Ключові слова: *аудит ефективності, стратегія, відкрита економіка.*

Окушко О. (студ., 2 курс),
Коваленко Д. (студ., 2 курс)
Науковий керівник - доц. Бобрицька Г.С.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ТИПУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ (ЛІНІЙНЕ, ОДНОРІДНЕ, З ВІДОКРЕМЛЕНИМИ ЗМІННИМИ)

При вивченні вищої в університеті один із розділів, в якому виникає значна кількість труднощів, - це розділ, присвячений вивченню диференціальних рівнянь, їх побудові та розв’язку.

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що містить похідні невідомої функції (або декількох невідомих функцій). Замість похідних можуть бути використані диференціали.

Якщо невідомі функції залежать від одного аргументу, то диференціальне рівняння називається звичайним, якщо від декількох, то рівняння називається диференціальним рівнянням з частинними похідними.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої з похідних, які входять в це рівняння.

Основним завданням теорії диференціальних рівнянь є пошук усіх розв'язків даного диференціального рівняння. В найпростіших випадках ця задача зводиться до обчислення інтеграла. Тому розв'язок диференціального рівняння називають також його інтегралом, а розв'язування – інтегруванням.

Серед диференціальних рівнянь першого порядку виділяють три основні типи: рівняння з відокремленими змінними, однорідні рівняння та лінійні рівняння.

Рівняння з відокремленими змінними. Якщо рівняння має вигляд $P(x)dx + Q(y)dy = 0$, то кажуть, що змінні відокремлені.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку – це рівняння виду

$$y' = P(x)y + Q(x),$$

де *P(x), Q(x)* – функції від *x*. Такі рівняння розв'язуються заміною.

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку – це рівняння, в яких після підстановки замість *x* і *y* виразів *kx* і *ky* після виконання елементарних перетворень рівняння не змінюється. Такий тип рівнянь також розв'язується за допомогою заміни, але відмінної від заміни в лінійних диференціальних рівняннях.

Отже, від вибору типу рівняння залежить вибір алгоритму його розв'язування. Саме тому була поставлена задача: створити програмний код, який може визначити тип диференціального рівняння.

Основний блок:

using System; using System.Collections.Generic; using System.Linq;

```
using System.Text; using System.Threading.Tasks;
namespace MatanPreAlphaVersion
{class Program
  {public static void Display(int method)
    {switch (method)
      {case 1: Console.WriteLine(" Ви ввели однорідне диференціальне
рівняння."); break;
        case 2: Console.WriteLine(" Ви ввели диференціальне рівняння з
відокремленими змінними.");     break;
        case 3: Console.WriteLine(" Ви ввели лінійне диференціальне рівняння.");
                    break;
        default: Console.WriteLine(" Введено невірне диференціальне рівняння.");
                    break;            }        }
        static void Main(string[] args)
        {      Console.Title = "MatanPreAlphaVersion";
            int method = 0;
            Console.Write("Введіть диференціальне рівняння: ");
            string arr = Console.ReadLine();
            string[] firstarr = arr.Split(new char[] { '+', '-', '=', '/' },
StringSplitOptions.RemoveEmptyEntries);
            SplitText txt = new SplitText(firstarr);
            char[][] secondarr = txt.GetCH();
            #region Однорідне диференціальне рівняння
            int[] temp = new int[secondarr.Length];
            for (int i = 0; i < secondarr.Length; i++)
                for (int j = 0; j < secondarr[i].Length; j++)
              { if ((secondarr[i][j] == 'x') | (secondarr[i][j] == 'y')) temp[i] += 1; // A-Z
                   if (secondarr[i][j] == '^')
                    { j++; temp[i] += (-1 + (int)char.GetNumericValue(secondarr[i][j]));}
                    if (secondarr[i][j] == '\'') temp[i] -= 1;           }
```

```
int iter = 0;
while ((iter < temp.Length) && (temp[iter] == 0) | (temp[iter] == temp[1]))
{               iter++;           }
if (iter == temp.Length) { method = 1; }
#endregion
#region Диференціальні рівняння з відокремленими змінними
if (method == 0)
{               firstarr = arr.Split(new char[] { '+', '-', '/' },
StringSplitOptions.RemoveEmptyEntries);
    txt = new SplitText(firstarr);
    secondarr = txt.GetCH();
    for (int i = 0; i < secondarr.Length; i++)
        for (int j = 0; j < secondarr[i].Length; j++)
        { if (secondarr[i][j] == '\'' && (j < secondarr[i].Length - 1))
            {if (secondarr[i][j + 1] == '=') { method = 2; }                    }
            else if (secondarr[i][j] == '=' && (j < secondarr[i].Length - 2))
            {    if (secondarr[i][j + 2] == '\'') { method = 2; } } }   }
#endregion
#region Лінійне диференціальне рівняння
if (method == 0)
    for (int i = 0; i < secondarr.Length; i++)
        for (int j = 0; j < secondarr[i].Length; j++)
        {if ((j < secondarr[i].Length - 2) && secondarr[i][j] == 'y')
            {if (secondarr[i][j + 1] == '^' && secondarr[i][j + 2] == '2')
break;}
            if (secondarr[i][j] == '0' && (j < secondarr[i].Length - 1))
            { if (secondarr[i][j + 1] == '=') { method = 3; }  }
            else if (secondarr[i][j] == '=' && (j < secondarr[i].Length - 1))
            {if (secondarr[i][j + 1] == '0') { method = 3; }}}
#endregion
```

```
        Display(method);
        Console.ReadLine();        }    }}
```

Допоміжний блок:

```
using System; using System.Collections.Generic; using System.Linq; using
System.Text; using System.Threading.Tasks;
namespace MatanPreAlphaVersion
{    class SplitText
   { char[][] charArray;
       public char[][] GetCH() { return charArray; }
       public SplitText(string[] stringArray)
       {            charArray = new char[stringArray.Length][];
          for (int i = 0; i < stringArray.Length; i++)
          {   charArray[i] = stringArray[i].ToCharArray();        }      }    }}
```

Література

[1] - Вишневецький О.Л. Диференціальні рівняння: конспект лекцій / О.Л. Вишневецький. – Х.: ХНАДУ, 2009. – 56 с.

Петренко М. Г. (студ., курс)
Науковий керівник – ст. викл. Михайленко І. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет (Харків, Україна)

ВИКОРИСТАННЯ ВХІДНИХ ДАННИХ ЯК ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ ОТРИМАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ МЕТОДОМ НЕЙРОМЕРЕЖ

На даному етапі розвитку людства усі прагнуть до того щоб швидкість рішення та результат були на високому рівні не виключаючи один одного. Так що тепер рішення як планових побудов доріг так і складних математичних обчислень доручають нейронним мережам, які самонавчаючись за короткі проміжки часу, перебравши всі можливі варіанті, видають оптимальне рішення проблеми . Таке диво цифрового світу можна описати вдалим симбіозом математики та інформаційних технологій у вигляді задач з параметрами.

Метою статті є наведення прикладів використання параметрів для отримання оптимальних рішень задач методом нейронних мереж.

Нейрон - це обчислювальна одиниця, яка отримує інформацію, робить над нею прості обчислення і передає її далі [1]. Вони діляться на три основні типи: вхідний (синій), прихований (червоний) і вихідний (зелений) (див. Додаток 1). Зазвичай існує вхідний шар, який отримує інформацію, n прихованих шарів (зазвичай їх не більше 3), які її обробляють і вихідний шар, який виводить результат. У кожного нейрона існує два параметри: вхідний(input) та вихідний (output) [2].

Нейрони оперують числами в діапазоні [0,1] чи [- 1,1], але найчастіше вхідні дані не входять у цей діапазон і для того ,щоб можливо отримати результат необхідно нормалізувати дані. Для цього 1 ділять на вхідний параметр.

Зв'язок між двома нейронами називається синапсом [3]. У синапсів є 1 параметр - вага. Завдяки ньому, вхідна інформація змінюється, коли передається від одного нейрона до іншого. Припустимо, є 3 нейрони, які передають інформацію наступному. Тоді у нас є 3 ваги, що відповідають кожному з цих нейронів. У того нейрона, у якого вага буде більше, та інформація і буде домінуючою в наступному нейроні (приклад - змішення кольорів). Насправді, сукупність вагів нейронної мережі або матриця вагів - це своєрідний мозок усієї системи. Саме завдяки цим вагам, вхідна інформація обробляється і перетворюється на результат.

Вхідна інформація - це сума усіх вхідних даних, помножених на ті, що відповідають їм ваги [1]. Після цього можна отримати вихідні дані, підставивши вхідне значення у функцію активації (детальніше про неї далі). Тепер, коли є вихідні дані, після цього вони передаються далі. І так, це відбувається доки дані не дійдуть до вихідного нейрона. Запустивши таку мережу вперше відповідь не буде одразу вірною, тому що мережа не натренована. Щоб поліпшити результати її необхідно тренувати.

Функція активації - це спосіб нормалізації вхідних даних. Тобто, якщо на вході буде велике число, пропустивши його через функцію активації, буде вихід в потрібному діапазоні. Основні функцій активації: Лінійна, Сигмоід (Логістична) і Гіперболічний тангенс. Головні їх відмінності - це діапазон значень [1].

Лінійна функція: майже не використовується

$$f(x) = x$$

Сигмоід: найпоширеніша функція с діапазоном [0,1]

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-1}}$$

Гіперболічний тангенс: при можливості від'ємних значень, діапазон [-1,1]

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Послідовність даних, якими оперує нейронна мережа називається тренувальним сетом. У цьому випадку представлена система, що виключає або іншими словами (xor) і всього буде 4 різні результати тобто буде 4 тренувальні сети: 0xor0=0, 0xor1=1, 1xor0=1,1xor1=0.

Загальна кількість тренувальних сетів пройдених нейронною мережею називається ітерацією.

Епоха. При ініціалізації нейронної мережі ця величина встановлюється в 0 і має стелю, що задається вручну. Чим більше епохи, тим краще натренована мережа і відповідно, її результат. Епоха збільшується кожного разу, коли проходить увесь набір тренувальних сетів, в цьому випадку, 4 сетів або 4 ітерацій.

Помилка - це величина, що відбиває розбіжність між очікуваним і отриманим відповідями. Помилка формується кожну епоху і повинна йти на спад. Для обчислення помилки існує три основні способи: Mean Squared Error (далі MSE), Root MSE і Arctan. Тут немає якого-небудь обмеження на використання, кожен метод рахує помилки по різному. У Arctan, помилка, майже завжди, буде більше, оскільки він працює за принципом: чим більше різниці, тим більше помилки. У Root MSE буде найменша помилка, тому, найчастіше, використовують MSE, яка зберігає баланс в обчисленні помилки [4].

Mean Squared Error:

$$\frac{(i_1 - a_1)^2 + (i_2 - a_2)^2 + \ldots + (i_n - a_n)^2}{n}$$

Root MSE:

$$\sqrt{\frac{(i_1 - a_1)^2 + (i_2 - a_2)^2 + \ldots + (i_n - a_n)^2}{n}}$$

Arctan:

$$\frac{arctan^2(i_1 - a_1) + \ldots + arctan^2(i_n - a_n)}{n}$$

Принцип підрахунку помилки в усіх випадках однаковий. За кожен сет, підраховується помилка, віднявши від ідеальної відповіді, отриманий. Далі, або підвести в квадрат, або обчислити квадратний тангенс з цієї різниці, після чого отримане число ділиться на кількість сетів [5].

Метод нейронних мереж для отримання оптимальних рішень використовують у багатьох сферах економіки. Вони є невід'ємною частиною індустрії інформаційних технологій по плануванню господарської діяльності.

Анотація. *У цій статті розглянуто використання параметрів на прикладі нейромереж. Були розібрані функцій та параметрів, що беруть участь в подібних процесах.*

Ключові слова: *параметри, нейронні мережі, вага, дані, нейрон.*

Література

[1] - https://habr.com/ru/post/307004/
[2] - http://statsoft.ru/home/textbook/modules/stneunet.html
[3] - http://psyfactor.org/lib/dorrer-2.htm
[4] - https://basegroup.ru/community/articles/math
[5] - https://proglib.io/p/neural-network-course
[6] - https://ru.wikipedia.org/wiki/
[7] - https://moluch.ru/archive/265/61441/
[8] - https://tproger.ru/translations/ltarning-neural-networks/

Пенкіна Н. П. (аспірант, 1 рік навчання)
Науковий керівник – д. пед. н., к.т.н, доцент Ярхо Т. О.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ У РОЗВ’ЯЗАННІ ЗАДАЧ ОЦІНКИ СТАНІВ ТЕХНІЧНИХ ОБ’ЄКТІВ

Стан технічних об’єктів характеризується ступенем відповідності їхніх характеристик заданим вимогам, викладеним у нормативно-технічній документації [1, с.34]. Стани об’єктів розрізняють кількістю та видом параметрів, що знаходяться у встановлених межах. Процес визначення станів технічного об’єкта має такі складові:

- отримання інформації про характеристики досліджуваного об’єкта;
- перетворення і обробка отриманої інформації з метою складання регламентованих характеристик об’єкта;
- порівняння отриманих характеристик з нормативними;
- прийняття рішень, за результатами порівняння, про справжній стан досліджуваного об’єкта [1, с.34 – 35].

У роботі [2, с.90], зокрема, наголошено, що завершальним етапом виробництва машинобудівних виробів є випробування, в ході яких перевіряють відповідність параметрів виробів технічним умовам. Оскільки основна інформація в процесі випробувань формується за результатами послідовних вимірювань діагностичних параметрів та має вигляд випадкових вибірок, то одним з найбільш розповсюджених методів оцінки станів готових до експлуатації виробів є статистичний контроль.

Ймовірнісний підхід складає основу математичного забезпечення моніторингу стану об’єктів транспортних систем. Моніторинг визначено як спеціально організоване систематичне спостереження за станом об’єктів, які досліджуються, мета якого полягає у зборі, накопиченні та обробці інформації, а також у оцінці на їх основі класу станів об’єкта [3, с.52].

У задачах визначення станів технічних об’єктів кожна з досліджуваних реалізацій характеристик технічного об’єкту, з точки зору математичної статистики, являє собою вибірку вимірювань деякої генеральної випадкової величини X, розподіленої за законом $f(x)$ з певними параметрами. Нормативні параметри, з якими порівнюються обчислені за експериментальними даними вибіркові значення характеристик, вважаються параметрами генеральної сукупності. Отже, у загальному випадку оцінка стану технічного об’єкта передбачає розв’язання двох ґрунтовних задач [1, с. 35]:

- отримання повної та достовірної інформації щодо характеристик досліджуваного об’єкта;
- порівняння отриманих характеристик з нормативними.

Розв’язання другої задачі полягає у перевірці непараметричних і параметричних статистичних гіпотез.

Нагадаємо, що статистичною гіпотезою називається будь – яке припущення про вид або параметри невідомого закону розподілу ймовірностей. Зокрема:

- статистична гіпотеза називається непараметричною, якщо в ній сформульовано припущення стосовно виду закону розподілу;
- статистична гіпотеза називається параметричною, якщо в ній сформульовано припущення стосовно значень параметрів закону розподілу відомого виду [4, с. 245].

Перевірка гіпотез про модельний вид закону розподілу ймовірностей здійснюється за допомогою непараметричних критеріїв узгодженості. Критичні статистики критеріїв узгодженості ґрунтуються на різних мірах відстаней між емпіричною функцією розподілу, що аналізується, та гіпотетичним сімейством [5, с. 301].

Одним з найбільш універсальних методів статистичної перевірки гіпотез про вид закону розподілу є критерій узгодженості χ^2, запропонований основоположником математичної статистики, англійським математиком Карлом Пірсоном у 1900 році. У якості міри відстані між емпіричною та гіпотетичною функціями розподілу при застосуванні критерія χ^2 використовується сума квадратів відхилень статистичних ймовірностей p_i^* від гіпотетичних p_i, взятих з певними вагами $c_i = \frac{n}{p_i}$, а статистика K має χ^2 розподіл з $\nu = m - r - 1$ ступенями свободи.

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i} \cdot \left(p_i^* - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n \cdot p_i\right)^2}{n \cdot p_i},$$

де m – кількість різних варіант дискретного статистичного ряду або кількість інтервалів інтегрального статистичного ряду;

r – число параметрів теоретичного розподілу, які обчислено за експериментальними даними;

$n_i = n \cdot p_i^*$ – емпіричні частоти;

$n \cdot p_i$ – теоретичні частоти [6, с. 61, 62].

Зауважимо, що на практиці за допомогою критеріїв узгодженості (зокрема, критерія Пірсона χ^2), особливо часто перевіряється нульова гіпотеза про те, що генеральна сукупність має нормальний закон розподілу. Дійсно, нормальний закон розподілу ймовірностей випадкових величин займає центральне місце як у класичній математичній статистиці, так і у практичних застосуваннях. Адже в самих різних областях спостерігається сумарний адитивний ефект великої кількості незалежних факторів, який призводить до нормального закону відгуку [7, с. 82].

Пояснимо значення теоретичних частот $n \cdot p_i$ при перевірці гіпотез про нормальний закон розподілу ймовірностей за критерієм Пірсона χ^2 у випадках, коли вибірку задано у вигляді:

- послідовності рівновіддалених варіантів і відповідних їм частот;

- послідовності інтервалів однакової довжини і відповідних їм частот.

У першому випадку завдання вибірки

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

$$h = x_{i+1} - x_i,\ (i = 1, ..., m-1)$$

Знаходять точкові незміщені оцінки параметрів нормального розподілу

$$a^* = \bar{x}_B; (\sigma^*)^2 = s^2$$

Спираючись на наближене співвідношення

$$P\{x < X < x + \Delta x\} \approx f(x) \cdot \Delta x,$$

що випливає з ймовірнісного сенсу густини розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини, переходять до нормованої нормальної випадкової величини

$$U = \frac{X - \overline{x_B}}{s}$$

та отримують

$$p_i = P\{x_i \le X < x_{i+1}\} = P\{u_i \le U < u_{i+1}\} \approx \frac{h}{s} \cdot \varphi(u_i),$$

де $\varphi(u_i)$ – значення функції Гаусса,

$$\varphi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u_i^2}{2}}.$$

Тоді

$$np_i = \frac{nh}{s} \varphi(u_i), (i = 1, ..., m).$$

У другому випадку завдання вибірки

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

за серединами інтервалів $\hat{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}, (i = 1,...,m)$ знаходять точкові незміщені оцінки параметрів нормального розподілу

$$a^* = \overline{x}_B; (\sigma^*)^2 = s^2.$$

Переходять до нормованої випадкової величини $U = \frac{X - \overline{x_B}}{s}$ і розглядають інтервали (u_1, u_2), (u_2, u_3), … , (u_m, u_{m+1})

Тут $u_1 = -\infty$; $u_i = \frac{x_i - \overline{x_B}}{s}$ $(i = \overline{2,\mathrm{m}})$; $u_{m+1} = +\infty$.

$$p_i = P\{x_i \le X < x_{i+1}\} = P\{u_i < U < u_{i+1}\} = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i),$$

де $\Phi(u)$ – функція Лапласа,

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Звідси

$$n \cdot p_i = n \cdot \left(\Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)\right), \left(i = \overline{1,m}\right)..$$

Якщо гіпотеза про нормальний закон розподілу випадкової величини Х не відхиляється, то заключним етапом оцінки стану технічного об’єкта є розв’язання задачі порівняння розрахункових і нормативних параметрів характеристик, які досліджуються, шляхом перевірки параметричних гіпотез.

На наш погляд, заслуговують на увагу рекомендації авторів [7] щодо застосування низки критеріїв перевірки відхилення розподілу ймовірностей від нормального закону в практиці інженерного статистичного аналізу. У роботі [7, с. 83] наголошено, що, взагалі кажучи, всі критерії узгодженості , що дозволяють досліджувати вид розподілу ймовірностей, можуть бути використані для перевірки нормальності. Проте, існують критерії, спеціально пристосовані для цього окремого випадку. Ці критерії мають найбільшу потужність у порівнянні з універсальними критеріями узгодженості.

З множини проаналізованих критеріїв автори [7], зокрема, виділяють:

- параметричний критерій Гірі, заснований на використанні властивостей оцінок моментів розподілів;
- критерій Шапіро – Уілка, заснований на порівнянні параметричних і непараметричних вибіркових статистик.

Наведемо загальні принципи, що є підґрунтям усіх критеріїв узгодженості і зазначених критеріїв перевірки відхилення розподілів від нормального закону (як критеріїв значущості) [7, с. 85]:

- вибір, статистики, що досліджується;
- визначення теоретичного розподілу обраної статистики, що відповідає нульовій гіпотезі (у нашому випадку – гіпотезі про нормальність);
- вибір рівня значущості (малих значень ймовірностей, що обмежують критичну область);
- перевірка експериментального значення статистики стосовно приналежності критичній області:
    - у випадку приналежності – відхилення нульової гіпотези (відповідно до принципу практичної неможливості здійснення малоймовірних подій);
    - у протилежному випадку – висновок про те, що експериментальні дані не суперечать нульовій гіпотезі.

Висновок. У роботі наведено формулювання двох ґрунтовних задач статистичного дослідження стану технічних об’єктів, друга з яких полягає у перевірці непараметричних і параметричних гіпотез. Наголошено на важливість перевірки непараметричної гіпотези про нормальний закон розподілу генеральної сукупності. Роз’яснено значення теоретичних частот при перевірці зазначеної гіпотези за критерієм узгодженості Пірсона χ^2. Оголошено підсумки рекомендацій дослідників щодо використання в практиці інженерного статистичного аналізу спеціально пристосованих для перевірки нормальності розподілу критеріїв значущості.

Вважаємо доцільним продовження дослідження в частині впровадження рекомендованих критеріїв у розв’язанні конкретних задач оцінки станів технічних об’єктів.

Література

[1] - Тихий И. И. Методология оценки состояния технических объектов на основе статистической обработки информации / И. И. Тихий // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2009. – № 1. – С. 34–40.

[2] - Голикова В. В. Статистический контроль технического состояния машиностроительных изделий на стадии производственных испытаний / В. В. Голикова, Е. Л. Первухина// Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2009. – № 6. - С. 90 – 92.

[3] - Узунов В. Г. Математическое обеспечение мониторинга состояния транспортной системы и ее объектов на основе вероятностного подхода / В. Г. Узунов, А. А. Дьяченко, М. А. Спорыхин, И. А. Белов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2008. – № S. – С. 52–59

[4] - Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис Пресс, 2008. – 287 с.

[5] - Айвазян С. А. Теория вероятностей и прикладная статистика / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – Москва: ЮНИТИ – ДАНА, 2001. – 656с.

[6] - Процеров Ю. С. Математическая статистика. Учебно-методическое пособие / Ю. С. Процеров. – Одесса, 2016 – 87с.

[7] - Александровская Л. Н. Рекомендации по применению ряда критериев проверки отклонения распределения вероятностей от нормального закона в практике инженерного статистического анализа / Л. Н. Александровская, А. В. Кириллин // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2017 – Т.19, № 1. – С. 82 – 90.

УДК 517

Секеда М.С. (студ., 3 курс)
Науковий керівник – доц. Гадецька С.В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
Харків, Україна

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ МАЛОГО АВТОТРАНСПОРТНОГО ПІДПРИЄМСТВА

В роботі [1] розглянуто модель динаміки малого підприємства за участю зовнішніх інвестицій, яка зводиться до задачі Коші

$$\begin{cases} A'(t) = a(t)A(t) + I(t), & (1) \\ A(0) = A_0, & (2) \end{cases}$$

де t – час ($0 \le t \le T$), A(t) – вартість основних виробничих фондів, I(t) – зовнішні інвестиції, отримані малим підприємством на безоплатній основі, $a(t) = f \cdot \hat{a}$, f – показник фондовіддачі, $\hat{a} = \dfrac{(1-c-\tau_1)\xi}{1+\tau_2\kappa(1-\xi)}$, де c – питома собівартість випуску продукції в вартісному вираженні; τ_1, τ_2 - податкові ставки на обсяги випуску і прибутку відповідно; ξ - доля чистого прибутку, яка відраховується на реінвестування ($0 \le \xi \le 1$); κ - коефіцієнт, який відображає долю реінвестованих засобів прибутку, що не мають пільг на сплату податків ($0 \le \kappa \le 1$). Таким чином,

$$a(t) = f\frac{(1-c-\tau_1)\xi}{1+\tau_2\kappa(1-\xi)} \tag{3}$$

І. В даній роботі вказана модель вивчена при умовах, коли доля чистого прибутку, що відраховується на реінвестування, є змінною величиною і зростає пропорційно часу (що відповідає ситуації поліпшення інвестиційного клімату та активізації процесу самофінансування малого підприємства), тобто $\xi(t) = \gamma t$, де γ – деяке задане число, що характеризує темп «нарощування» процесу реінвестування засобів малого підприємства. При цих умовах a(t) приймає вигляд:

$$a(t)=\frac{Bt}{D - Mt}, \text{ де } B=f\gamma(1-c-\tau_1),$$

$$0<B<1;\ D = 1+ \tau_2\kappa,\ 1 < D < 2;\ M = \tau_2\kappa\,\gamma,\ 0 < M < 1.$$

Для аналізу розв’язку задачі (1)-(2) за допомогою леми Гронуолла - Беллмана [2] одержано верхню оцінку A^T функції A(T) при t=T:

$$A(T) \le A^T, \tag{4}$$

де $A^T = (A_0 + I^T)\cdot(\dfrac{D}{D-MT})^{\frac{BD}{M^2}} \cdot e^{\frac{-BT}{M}}$, $I^T = \int\limits_0^T I(t)dt$.

Докладний аналіз (4) показав, що величина верхньої границі динаміки основних фондів залежить від початкового рівня A_0, загального обсягу інвестицій I^T та ряду інших факторів. Вкажемо на окремі з них.

1. При виконанні співвідношення

$$\left(\frac{D}{D-MT}\right)^{\frac{D}{M^2}} \cdot e^{-\frac{T}{M}} < 1$$

при збільшенні B (фактор, що відвідає за «форсування» процесу) маємо зменшення величини верхньої границі динаміки виробничих фондів, що може бути сигналом про «невдалий» набір наявних економічних показників і про можливу потребу цей набір переглянути та виправити ситуацію, що склалася.

2. Підозра на «невдалий» набір економічних показників виникає також при виконанні співвідношення

$$\frac{D\text{-}MT}{D} \cdot e^{\frac{TM}{D\text{-}TM}} > 1,$$

яке при збільшенні значення D (що означає підвищення податкового тиску) приводить до зменшення величини верхньої границі динаміки виробничих фондів.

3. При малих значеннях M (це може бути пов'язано, наприклад, з малими значеннями τ_2, що свідчить про покращення податкових умов) маємо в (4):

$$A^T \approx \left(A_0 + I^T\right) \cdot e^{\frac{BT^2}{D}},$$

що спрощує дослідження відповідної ситуації.

II. Модель (1)-(2) вивчено також у випадку, коли $\xi(t) \equiv \xi = \text{const}$, але фондовіддача змінюється (лінійно) з часом, що може бути пов'язано із впровадженням нових технологій виробництва: $f(t) = \gamma_1 \cdot t$, $\gamma_1 > 0$. Тоді з (3) маємо, що $a(t) = N \cdot t$, де $N \in (0;1)$ - відомий коефіцієнт, який має певний економічний зміст. У виразі (4) у даному випадку маємо

$$A^T = (A_0 + I^T) \cdot e^{\frac{NT^2}{2}},$$

що вказує на залежність верхньої оцінки значення A(T) від A_0, I^T, від значень f, γ, які «форсують» динаміку процесу, та від c, τ_1, τ_2, які її «гальмують», що повністю узгоджується з економічним змістом вказаних параметрів.

III. У випадку лінійного змінювання за часом як фондовіддачі, так і долі чистого прибутку, який відраховувався на інвестування, розглянуто задачу (1)-(2), де функція $a(t)$ має вигляд:

$$a(t)=\frac{B_1 t^2}{D-Mt},\ B_1>0,\ D>0,\ M>0.$$

Тоді

$$A(T)\le (A_0+I^T)\cdot\left(\frac{D}{D-MT}\right)^{\frac{B_1 D}{M^3}}\cdot e^{-\frac{B_1 T^2}{2M}-\frac{B_1 DT}{M^2}}.$$

Анотація. *У роботі розглянуто задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку із змінними коефіцієнтами, яка може бути інтерпретована як модель динаміки малого автотранспортного підприємства. Здійснений аналіз моделі при різних змістовних умовах розвитку підприємства.*

Ключові слова*: диференціальне рівняння, задача Коші, модель динаміки малого підприємства.*

Література

[1] -. Хачатрян С. Р. Прикладные методы математического моделирования экономических систем / С. Р. Хачатрян. – М.: Экзамен, 2002. 192 с.

[2] - Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

УДК 517.968

Стеганцева А. Г. (студ., 1 курс)
Научный руководитель – ассистент Усков В. И.
Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова (Воронеж, Россия)

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Рассматривается уравнение

$$\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x), \tag{1}$$

где $K(x,s)$, $f(x)$ – заданные непрерывные по совокупности переменных функции, $y(x)$ – искомая непрерывная функция; $(x,s) \in [a,b]$.

К таким уравнениям приводит задача восстановления размытого изображения [1]; задача об издержках производства [2] и т.д.

Пусть выполнены следующие условия:

1) ядро $K(x,s)$ раскладывается по базису функций $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_n(x)$:

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} K_i\,(s)h_i(x);$$

2) следующий вронскиан [3] отличен от нуля на $[a,b]$:

$$W(K_1, K_2, K_3, \dots, K_n)(s) \neq 0;$$

3) функция $f(x)$ записывается в виде разложения по тому же базису:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i\,h_i(x)$$

с постоянными f_i.

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\,h_i(x). \tag{2}$$

Пусть

$$k_{ij} = \int_a^b K_i\,(s)h_j(s)\,ds, \qquad i,j = 1,2,\dots,n.$$

Вводится матрица

$$C = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix},$$

и матрица C_i, получающаяся из матрицы C заменой i -го столбца столбцом $(f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n\ )^T$.

При выполнении условия 2) коэффициенты y_i решения (2) определяются единственным образом и вычисляются по формуле [4]:

$$y_i = \frac{\det C_i}{\det C}. \qquad (3)$$

Для решения поставленных задач нам понадобятся следующие утверждения.

Предложение 1. *Система функций,* $h_1(x) = e^x$, $h_2(x) = xe^x$ *образует базис на* $\mathbb{R}$.

Действительно, вронскиан, построенным по этим функциям, отличен от 0:

$$W(h_1, h_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

при любом $x \in \mathbb{R}$.

Предложение 2. *Система функций,* $h_1(x) = 1$, $h_2(x) = x$, $h_3(x) = x^2$ *образует базис на* $\mathbb{R}$.

Действительно, вронскиан, построенным по этим функциям, отличен от 0:

$$W(h_1, h_2, h_3)(x) = \det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

при любом $x \in \mathbb{R}$.

Перейдем к решению задач.

Пример 1. Построить решение уравнения в базисе e^x, xe^x на $[0,1]$

$$\int_0^1 (e^x + xe^{s+x})y(s)\,ds = (2x+3)e^x. \qquad (4)$$

Здесь

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{2}K_i(s)\cdot h_i(x)\,,\;\; f(x)=\sum_{i=1}^{2}f_i\cdot h_i(x),$$

где

$$K_1(s)=1,\;\; h_1(x)=e^x,\;\; K_2(s)=e^s,\;\; h_2(x)=xe^x,\;\; f_1=3,\;\; f_2=2.$$

Условие 2) на $[0,1]$ выполнено:

$$W(K_1,K_2)(s)=\det\begin{pmatrix}1 & e^s\\ 0 & e^s\end{pmatrix}=e^s\neq 0.$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде

$$y(x)=\textstyle\sum_{i=1}^{2}y_i\,h_i(x)=y_1e^x+y_2xe^x. \qquad (5)$$

Вычисления показывают, что

$$k_{11}=e-1,\;\; k_{12}=1,\;\; k_{21}=\frac{e^2-1}{2},\;\; k_{22}=\frac{e^2+1}{4}.$$

Формулы (3) приводят к результату:

$$y_1=\tfrac{3e^2-5}{e^3-3e^2+e+1},\;\; y_2=\tfrac{-6e^2+8e-2}{e^3-3e^2+e+1}. \qquad (6)$$

Непосредственной подстановкой (5), (6) в (4) можно убедиться в правильности найденного решения.

Пример 2. Построить решение уравнения в базисе $1,x,x^2$ на $[1,2]$

$$\textstyle\int_1^2(1+3xs^2+2x^2s^4)y(s)\,ds=2+3x+x^2. \qquad (7)$$

Здесь

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{3}K_i(s)\cdot h_i(x)\,,\;\; f(x)=\sum_{i=1}^{3}f_i\cdot h_i(x),$$

где

$$K_1(s)=1,\;\; h_1(x)=1,\;\; K_2(s)=3s^2,$$
$$h_2(x)=x,\;\; K_3(s)=2s^4,\;\; h_3(x)=x^2,$$
$$f_1=2,\;\; f_2=3,\;\; f_3=1.$$

Условие 2) на $[1,2]$ выполнено:

$$W(K_1,K_2,K_3)(s)=\det\begin{pmatrix}1 & 3s^2 & 2s^4\\ 0 & 6s & 8s^3\\ 0 & 6 & 24s^2\end{pmatrix}=96s^2\neq 0.$$

Решение уравнения (7) будем искать в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{3} y_i\, h_i(x) = y_1 + y_2 x + y_3 x^2. \qquad (8)$$

Вычисления показывают, что

$$k_{11} = 1,\ \ k_{12} = \frac{3}{2},\ \ k_{13} = \frac{7}{3},$$

$$k_{21} = 7,\ \ k_{22} = \frac{45}{4},\ \ k_{23} = \frac{93}{5},$$

$$k_{31} = \frac{62}{5},\ \ k_{32} = 21,\ \ k_{33} = \frac{254}{7}.$$

Формулы (3) приводят к результату:

$$y_1 = \frac{14415}{52},\ \ y_2 = -\frac{14138}{39},\ \ y_3 = \frac{5985}{52}. \qquad (9)$$

Непосредственной подстановкой (8), (9) в (7) можно убедиться в правильности найденного решения.

Аннотация. *Рассматриваются неоднородные интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Исследуется случай ядра оператора с разделяющимися переменными и раскладываемого по базису; неоднородность также раскладывается по этому базису. Находится решение уравнений в заданном базисе с конкретными значениями ядра и неоднородности.*

Литература

[1] – Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003.

[2] – Спирина М. С., Спирин П. А. Интегральные уравнения при моделировании издержек // Вестник Поволжского госуниверситета. Серия: Экономика. – 2015. – № 2 (40). – С. 234-238.

[3] – Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974.

[4] – Усков В. И., Небольсина В. И. Решение одного интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Молодой ученый. – 2019. – № 40 (278). – С. 1-3.

Ткачов О. Ю.(аспірант, 1 рік навчання)
Науковий керівник - д.пед.н., к.т.н., доц. Ярхо Т. О.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
(Харків, Україна)

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ ТА АКТУАЛЬНІСТЬ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ У ТЕХНІЧНИХ, ТЕХНОЛОГІЧНИХ І ТРАНСПОРТНИХ ПРОЦЕСАХ

Вивчення та використання математичних засобів для подання нечіткої початкової інформації дозволяє будувати моделі, що адекватно відображають різні технічні, технологічні й транспортні процеси в умовах невизначеності, яка присутня в навколишній реальності.

У роботі [1], присвяченій розв'язанню задач класифікації технічних станів об'єктів, підкреслено, що проблеми діагностики технічних об'єктів або процесів, що в широкому плані розглядаються як проблеми аналізу складних систем, займають важливе місце в сучасній науці. Прийняття рішень з технічної діагностики пов'язано із складністю та невизначеністю поточних станів об'єктів, необхідністю враховувати велику кількість різних факторів. Тому при розробці відповідних експертних систем, серед інших проблем, виникають проблеми необхідності оперувати суб'єктивними оцінками експертів, брати до уваги їхній якісний характер, враховувати неточність даних засобами нечіткої логіки [1, с.172].

При проектуванні систем автоматичного регулювання (САР) технологічних процесів необхідно врахувати невизначеність параметрів об'єкта управління і факторів, що обурюють, які викликані зовнішніми умовами. Одним із ефективних підходів до удосконалення САР, що працюють в умовах невизначеності, вважається стратегія управління, яку засновано на теорії нечітких множин [2, с.137].

Збільшення кількості транспортних засобів при існуючому рівні розвитку методів управління транспортними потоками здатно надалі привести до погіршення умов руху. Вирішення зазначеної проблеми вимагає розробки і впровадження сучасних методів управління транспортними потоками, що забезпечують необхідний рівень функціонування міських автомобільних доріг [3, с.24]. Наприклад, управління світлофорним об'єктом є складною задачею, в розв'язанні якої має бути врахованою множина параметрів дорожньо-транспортного середовища (інтенсивність руху транспортних засобів і пішоходів; швидкість, прискорення руху; уповільнення автомобіля при під'їзді до перехрестя і т.д.). Складність доставляє не тільки кількісне різноманіття параметрів та їхня неоднорідність, але також наявність відомостей якісного характеру. Автори [3], застерігаючи від усереднення вхідних даних (результатом якого, на їхню думку, з'явиться невисокий рівень адекватності розробленої математичної моделі реальній системі), вважають доцільним використання методів нечіткого моделювання, в основу яких покладено нечітку логіку.

На відміну від стандартної логіки, яка зводиться до двох бінарних станів (1/0; Так/Ні; Істина/Неправда і т.д.), нечітка логіка дозволяє визначати проміжні значення між стандартними оцінками.

Введемо означення і основні характеристики нечіткої множини [4, с.15-23].

Нехай X – універсальна множина (універсум), тобто звичайна (класична) множина, з елементів якої утворено всі інші множини, що розглядаються у даному класі задач; A – підмножина X ($A \subseteq X$).

Характеристична функція множини A – це функція $\mu_A(x)$, значення якої вказують, чи становить собою $x \in X$ елемент множини A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A; \\ 0, x \bar{\in} A, \end{cases} x \in X$$

Особливістю цієї функції є бінарний характер її значень.

З точки зору характеристичної функції, нечіткі множини є природним узагальненням звичайних (класичних) множин. У випадку нечітких множин відмовляються від бінарного характеру цієї функції і припускають, що вона може приймати довільні значення на відрізку [0,1]. У теорії нечітких множин характеристична функція називається функцією приналежності, а її значення – ступенем приналежності елемента до нечіткої множини.

Відповідно до строгого означення, нечіткою множиною $\tilde{A}$ називається сукупність упорядкованих пар виду $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$, де $x \in X$; $\mu_{\tilde{A}}(x)$ - функція приналежності нечіткої множини $\tilde{A}$ із значеннями на відрізку [0,1].

Наведемо приклад. Нехай X=N – множина натуральних чисел. Визначимо поняття множини натуральних чисел «близьких до числа 7». Це можна зробити введенням у розгляд, зокрема, наступної нечіткої множини $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}=\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}, x \in X;$$

функція приналежності $\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}|x-7|, \text{якщо } 4 \le x \le 10 \\ 0, \text{ для інших } x \in X \end{cases}$

Тоді $\tilde{A}=\{(4{,}0.25),(5{,}0.5),(6{,}0.75),(7{,}1.0),(8{,}0.75),(9{,}0.5),\ (10{,}0.25)\}$

Розглянемо основні характеристики нечітких множин.

Носієм (суппортом) supp $\tilde{A}$ нечіткої множини $\tilde{A}$ називається підмножина X, що складається з усіх елементів, для яких $\mu_{\tilde{A}}(x)>0$:

$$\text{supp } \tilde{A} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Висотою нечіткої множини $\tilde{A}$ називається величина

$$h(\tilde{A}) = \max \mu_{\tilde{A}}(x), x \in \tilde{A}.$$

Нечітка множина $\tilde{A}$ називається нормальною, якщо $h(\tilde{A})=1$ і субнормальною у іншому випадку.

Точкою переходу нечіткої множини $\tilde{A}$ називають такий елемент $x \in X$, для якого $\mu_{\tilde{A}}(x)=0{,}5$.

Зазначимо, що функція приналежності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ нечіткої множини $\tilde{A}$ є суб'єктивною мірою того, наскільки x відповідає поняттю, сенс якого формалізується нечіткою множиною $\tilde{A}$. Основною трудністю, що заважає впровадженню теорії нечітких множин (нечіткої логіки) є те, що функція приналежності має бути заданою зовні самої теорії. Отже, її адекватність не може бути перевірено безпосередньо засобами теорії. Тому найбільш вразливим для критики питанням теорії нечітких множин є питання про методи побудови головної характеристики нечіткої множини – функції приналежності [5, с.21].

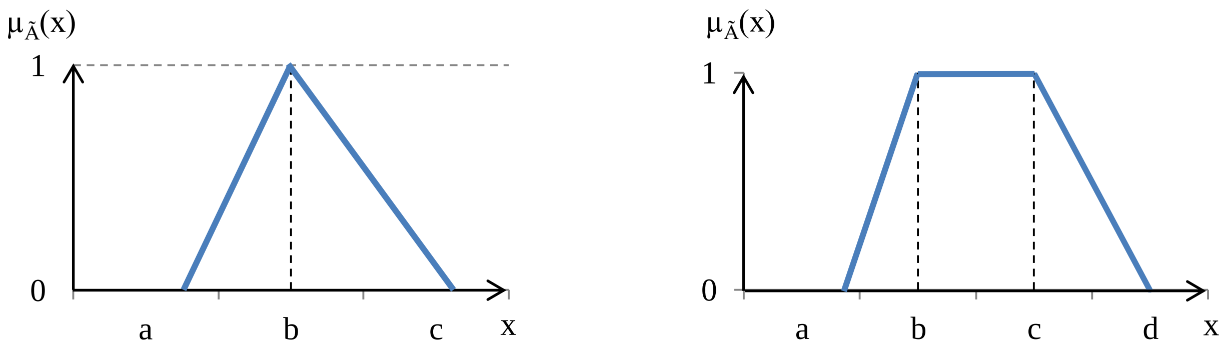
Використовують прямі і непрямі методи побудови функції приналежності.

У першому випадку (прямих методів) експерт або задає для кожного $x \in X$ значення функції $\mu_{\tilde{A}}(x)$, або визначає функцію приналежності аналітично чи графічно. Як правило, прямі методи завдання функції приналежності застосовують для вимірних понять (швидкість, час, відстань, тиск, температура і т.п.).

Непрямі методи (другий випадок) визначення функції приналежності використовують тоді, коли відсутні наочні вимірні властивості, що можуть бути застосованими для побудови нечітких моделей у предметній області, яка розглядається. Одним з найбільш розповсюджених непрямих методів є метод попарних порівнянь.

Зауважимо, що у випадку недостатньої інформації щодо особливостей функції приналежності нечітких змінних, рекомендується розпочинати побудову нечіткої моделі з використання найбільш простих форм функції приналежності, зокрема – кусково-лінійних функцій. У подальшому, на етапі коригування нечіткої моделі, характер функції приналежності може бути уточнений [6, с.7].

Кусково-лінійні функції складаються з відрізків прямих ліній, утворюючи неперервну або кусково-неперервну функцію. Найбільш характерними прикладами цих функцій є «трикутна» (рис.1, а)) і «трапецієподібна» функції приналежності (рис.1, б)).



а) б)

Рис.1. Графіки лінійних функцій приналежності

а) трикутної форми;

б) трапецієподібної форми.

Функція приналежності трикутної форми (рис.1, а)) може бути заданою аналітичним виразом

$$f_{\Delta}(x, a, b, \mathrm{c}) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b < x \le c; \\ 0, & c < x. \end{cases}$$

Тут a, b, с – довільні дійсні числові параметри: $a \le b \le$ с.

Функція приналежності трапецієподібної форми (рис.1, б)) може бути заданою аналітичним виразом

$$f_T(x, a, b, \mathrm{c}, d) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 1, & b < x \le c; \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c < x \le d; \\ 0, & d < x. \end{cases}$$

Тут a, b, c, d – довільні дійсні числові параметри: $a \le b \le \mathrm{c} \le d$.

Зазначені функції використовують для таких нечітких множин, що характеризуються невизначеністю типу: «приблизно дорівнює», «середнє значення», «розташований в інтервалі», «подібний до об’єкту» і т.п.

Z-подібні та S-подібні функції приналежності також отримали свою назву за видами їхніх графіків (рис.2, а) і б)).

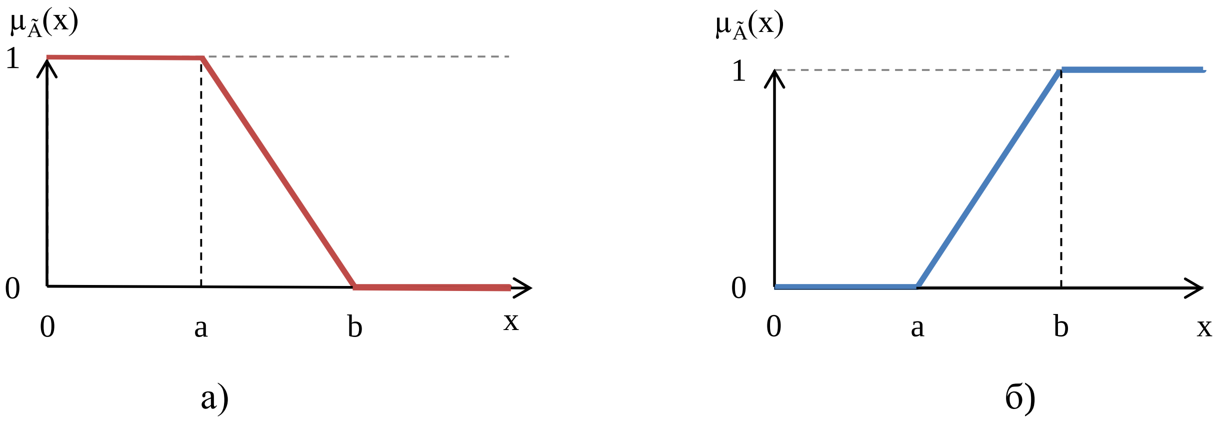


Рис.2. Графіки лінійних функцій приналежності

а) Z-подібної б) S-подібної

Лінійна Z-подібна функція приналежності (або сплайн-функція) (рис.2, а)) може бути заданою аналітичним виразом:

$$f_z\,(x,a,b) \;=\; \begin{cases} 1, & x \le a; \\ \dfrac{b-x}{b-a}, & a < x \le b; \\ 0, & b < x. \end{cases}$$

Тут a, b – довільні дійсні числові параметри: $a < b$.

Лінійні Z-подібні функції використовують для завдання таких нечітких множин, що характеризуються невизначеністю типу: «незначна величина», «низький рівень», «низька якість» і т.п.

Лінійна S-подібна функція приналежності (рис.2, б)) може бути заданою аналітичним виразом:

$$f_s(x,a,b) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 1, & b < x. \end{cases}$$

Тут a, b – довільні дійсні числові параметри: $a < b$.

Лінійні S-подібні функції використовують для завдання таких нечітких множин, що характеризуються невизначеністю типу «значна величина», «високий рівень», «висока якість» і т.п.

Наведемо приклад використання зазначених вище лінійних функцій приналежності для завдання нечітких множин.

Розглянемо опис нечіткої множини, що визначається величинами «малої», «середньої» та «високої» швидкістю руху автомобіля по трасі, розташованими в діапазоні [0, x_{max}], де x_{max} є максимальною швидкістю автомобіля. Нехай нечітка множина Ã визначає діапазон «малих» швидкостей, наприклад [0, 50] км/год; нечітка множина $\tilde{A}_1$ – діапазон «середніх» швидкостей, наприклад, [30, 70] км/год; нечітка множина $\tilde{A}_2$ – діапазон високих швидкостей, наприклад [70, x_{max}] км/год. На рис. 3 нечіткі множини Ã, $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ представлено відповідними функціями приналежності.

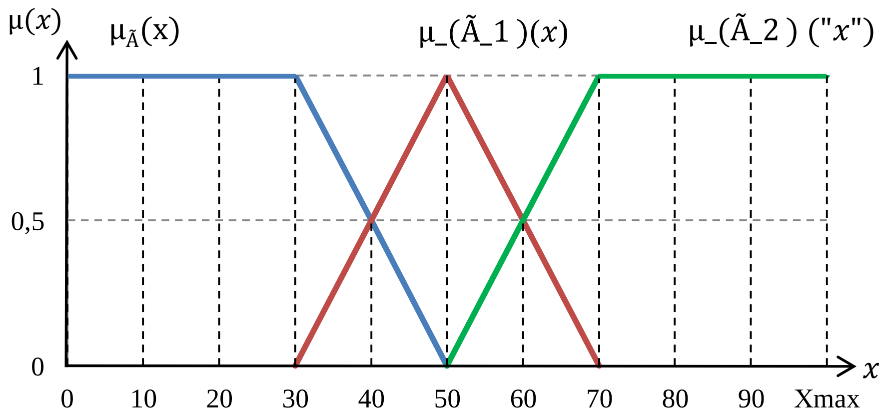


Рис.3. Функції приналежності нечітких множин Ã, $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$

Множині Ã відповідає Z-подібна функція приналежності, множині $\tilde{A}_1$ – «трикутна», множині $\tilde{A}_2$ – S - подібна функція приналежності.

Зазначимо, що у точці x=40 (км/год) функція $\mu_{\tilde{A}}(x)$, що описує діапазон «малих» швидкостей дорівнює 0,5. Таке ж саме значення приймає функція приналежності нечіткої множини $\tilde{A}_1$ – «середніх» швидкостей, тобто $\mu_{\tilde{A}_1}(x) = 0{,}5$. У той же час $\mu_{\tilde{A}_2}(40) = 0$.

Висновок. У роботі проаналізовано актуальність застосування нечіткої логіки в технічних, технологічних і транспортних процесах. Розглянуто окремі аспекти теорії нечітких множин, що входить до складу математичних основ нечіткої логіки. Пропонується продовження дослідження з акцентуванням застосування представленого математичного апарату у прикладних задачах, пов’язаних із зазначеними процесами.

Література

[1] - Нурматова Е. В. Подход к решению задачи классификации технических состояний в нечеткой логической системе / Е. В. Нурматова // Известия ТулГу. Технические науки. Вип. 1. – 2010. – С. 170-174.

[2] - Карабцов Р. Д. Проектирование нечеткой системы регулирования с использованием генетического алгаритма оптимизации. / Р. Д. Карабцов, Л. А. Денисова // Омский научный вестник. Информатика, Вычислительная техника и управление. - №6 (156). – 2017. – С.137 -142.

[3] - Марчук Е. А. Нечеткая логика как инструмент управления безопасностью дорожного движения / Е. А. Марчук, М. С. Кочетов,В. Т. Ишанкулов, О. И. Трофимова // Техника. Технологии. Инженерия// Международный научный журнал. - №2 (12) – 2019. – С. 24-26.

[4] - Бахусова Е. В. Элементы теории нечетких множеств. Учебно-методическое пособие / Е. В. Бахусова. – Тольятти: Издательство ТГУ, 2013. – С. 116.

[5] - Конышева Л. К. Основы теории нечетких множеств: учебное пособие / Л. К. Конышева, Д. М. Назаров. – СПб:Питер, 2011. – С. 192.

[6] - Гели Франсуа. Нечеткая логика / Франсуа Гели, Франсуа Шеври // Техническая коллекция Schneider Electric. – Выпуск №31, октябрь 2009 г. – С. 29.

УДК 330.46

Чіняков М.В. (студ., 4 курс)
Науковий керівник – доц. Кравець О.В.
Класичний приватний університет (Запоріжжя, Україна)

БІФУРКАЦІЇ В НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

В математиці динамічна система являє собою систему, в якій функція описує залежність точок в геометричному просторі, що змінюються з часом. В свою чергу нелінійна система це динамічна система процеси якої можливо описати диференціальними рівняннями. Динамічні системи є основоположною частиною теорії хаосу, динаміки логістичної карти, теорії біфуркації [1].

Біфуркація визначається як зміна числа і стійкості рішень певного типу [2]. У точці біфуркації система може змінювати свою стійкість, розщеплюватися на нові системи або зливатися з іншими. Якщо математична модель являє собою систему диференціальних рівнянь, то говорять про перебудову структури потоку фазових траєкторій. Загалом термін «біфуркація» означає «роздвоєння» і використовується для пояснення будь-якої раптової зміни, що відбувається при плавній зміні параметрів у будь-якій системі [1].

Поняття про біфуркації дають біфуркаційні і фазопараметрічні діаграми. Біфуркаційна діаграма являє собою зображення точок біфуркації в просторі параметрів системи. Найбільш просто і наочно можна уявити залежність положень рівноваги від одного параметра. Якщо фазовий простір одновимірний, то по осі абсцис фазо-параметричної діаграми відкладаються значення параметра, а по осі ординат - значення змінної стану, що відповідають положенням рівноваги.

Біфуркація є основою для вивчення поведінки динамічної системи. Взагалі, роздрібнення визначає механізм багатьох складних процесів. Розглянемо детально деякі основні принципи теорії біфуркації. Проаналізуємо рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \gamma)$$

Нелінійна модель представленої автономної системи характеризується зміною параметрів γ. У фактичній системі такими параметрами можуть бути температура, тиск, концентрація, швидкість приросту населення тощо. Слід підкреслити, що сімейство динамічних моделей, поведінка яких залежить від γ, не повинно вивчати конкретні моделі з фіксованими параметрами. Відповідно до теорії біфуркації, з точки біфуркації в просторі координат і параметрів можна отримати кілька рішень рівняння рівноваги $0 = F(x, \gamma)$ як нестійких, так і стійких. Графіки залежності координат положень рівноваги від γ, являють собою біфуркаційні діаграми [3].

Сучасна побудова і аналіз математичних моделей нелінійних явищ знаходять все більш широке застосування в дослідженні поведінки складних систем, в тому числі і в областях, що зазвичай не відносяться до точних наук. Наприклад, методи нелінійної динаміки все ширше і успішніше використовуються в медицині, соціології, економіці, історії і т.д.

На базі побудови нелінійних математичних моделей для економіки можливо отримати результати, які можуть змінити методику економічних досліджень. Одним з головних результатів нелінійного методу є визнання можливості розвитку різних систем біфуркації. Біфуркація передбачає різку зміну стану системи при плавній зміні її екзогенних параметрів [5]. В задачах економіки критичність процесів, що відбуваються в точках біфуркації, підкреслюють рівень відповідальності менеджменту за свідоме прийняття в необхідний момент управлінських рішень щодо вибору найбільш оптимального напряму подальшого існування системи. Тобто управлінський вплив має забезпечити розвиток економічної системи та не допустити її регресу до нижчих форм організації або повної руйнації.

Пропонуємо в економічних дослідженнях використовувати такі фази біфуркації: передбіфуркація – пов’язана з незначними відхиленнями параметрів економічної системи від стану рівноваги; некритична біфуркація – пов’язана із значними, але не критичними відхиленнями параметрів системи від рівноважного стану; випереджувальна біфуркація, коли відхилення окремих параметрів системи або їх сукупності досягають критичного для існування системи рівня; власне біфуркація – стан біфуркації в її початковому (класичному) розумінні, коли відхилення параметрів системи перетинає рівень граничних значень, а система набуває максимальної нестабільності.

Перші дві фази біфуркації фактично характеризують повсякденний стан економічної системи, яка відчуває на собі дію тих чи інших факторів. При цьому в передбіфуркаційній фазі дестабілізуючі фактори спричиняють з боку системи реакцію, здебільшого спрямовану на нейтралізацію їх впливу за допомогою механізму забезпечення власної безпеки. У фазі некритичної біфуркації економічна система також може задіювати механізм пристосування до нових умов існування або адаптації.

У фазі випереджувальної біфуркації економічній системі замість зайвої та негарантованої успіхом витрати зусиль і ресурсів на подолання зовнішніх дестабілізуючих факторів, які, до речі, не завжди мають лише негативний характер, більш доцільно активізувати адаптаційні механізми, у тому числі шляхом свідомої зміни самоорганізації та напрямів розвитку, так званої перебудови або оновлення.

У фазі власне біфуркації економічною системою досягається критична межа свого існування з неконтрольованим наростанням хаосу, коли керуючий вплив на подальший її розвиток стає малоефективним. Зростає роль випадковості та посилюється дія атракторів, у результаті чого система може еволюціонувати до кількох альтернатив.

Слід зазначити, що доведення економічної системи до такої фази біфуркації вказує на неадекватність управління та відсутність у менеджменту необхідної кваліфікації. Таким чином, результати біфуркаційної теорії особливо важливі для динамічного моделювання в економіці.

Анотація. *У роботі розглянуто поняття біфуркації, біфуркаційної діаграми, розкрито зростаючий інтерес до нелінійних моделей, особливо адаптованих для економічних процесів. На відміну від фізичних наук, в динамічних системах економіки зазвичай неможливо привласнити остаточне, єдине і назавжди дійсне число більшості параметрів. Проведений аналіз дає підстави стверджувати, що явище біфуркації, може бути ефективно використане у вивченні динаміки економічної системи, тобто виникнення нового способу її існування при критичному стані певного параметра або системи в цілому. У такому розумінні точка біфуркації є переломним, критичним моментом переходу нестабільної економіки до нового стану, а біфуркація, яка позначає процес зміни економічної системи, може активно застосовуватися при організації управління економікою, сприяти розробці управлінських рішень щодо забезпечення її подальшого розвитку.*

Ключові слова: *динамічні системи, нелінійні моделі, біфуркація, біфуркаційні діаграми*

Література

[1] – Андронов А. А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А.Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. - Москва: ВИНИТИ, 1986. - 218 с.

[2] - Малинецкий Г. Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий. - Москва: Эдиториал УРСС, 2000. - 336 с.

[3] - Андронов А. А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А.Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. - Москва: Наука, 1967. - 488 с.

[4] - Пугачова О. Г. Теорія катастроф і біфуркацій: синергетика в економіці. URL: http://iee.org.ua/ua/publication/78/ (дата звернення: 02.03.2020).

[5] - Lorenz HW. Bifurcation Theory and Economic Dynamics: Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. Berlin, 1993, pp.80-118.

УДК 004.942:[373.2.016

Українець І. В. (студ., 4 курс)
Науковий керівник – доц. Гриб'юк О. О.
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
(Київ, Україна)

ФОРМУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ШЛЯХОМ ЗАНУРЕННЯ В ІНШОМОВНЕ СЕРЕДОВИЩЕ В УМОВАХ ІНФОРМАТИЗОВАНОГО ОСВІТНЬОГО ПРОЦЕСУ

Сучасне реформування української школи стверджує необхідність якісного оновлення змісту освіти, забезпечення безперервного процесу становлення та розвитку гармонійної творчої особистості учня. Школа бере на себе місію створення нового освітнього середовища, де панує атмосфера педагогічної творчості вчителів – однодумців, учнів і батьків. Сьогодні школа має готувати не лише носія знань, а й творчу особистість учня, яка здатна використовувати здобуті знання для конкурентоспроможної діяльності у будь-якій сфері суспільного життя. Розвиток у школяра самостійності, здатності до самоорганізації, саморозвитку, самовиховання, самоосвіти – це одне з першочергових завдань сучасної освіти. Школа повинна підтримати, захистити дитину, озброїти механізмами, технологіями розробки життєвих стратегій, спрямованих на формування гармонійної компетентної, конкурентоспроможної особистості, яка вміє творчо розв'язувати проблеми, вміє повноцінно жити у новому світі, адекватно реагувати на зміни, постійно самовдосконалюється, намагається змінити на краще своє життя та життя своєї країни, а саме виховати компетентну особистість учня.

Теоретичний аналіз наукових праць провідних науковців у галузі освіти, вивчення досвіду щодо використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання інформатики та англійської мови свідчить про наявність протиріч між [1]:

- розвитком сучасних інформаційно-комунікаційних технологій та ступенем впровадження їх у навчальний процес;
- наявністю, різноманітністю комп'ютерної техніки і мобільністю учасників освітнього процесу;
- наявністю в освітніх установах вчителя нового типу, здатного організовувати ефективну взаємодію з педагогічно виваженим використанням комп'ютерно орієнтованого середовища навчання англійської мови та інформатики і відсутністю науково обґрунтованих технологій її організації;
- зростаючими вимогами до управління й організації навчально-виховного процесів з боку суспільства та використання комп'ютерно орієнтованих середовищ навчання навчання англійської мови та інформатики закладів загальної середньої освіти.

Актуальність зазначеної дослідно-експериментальної роботи визначається потребою у розробці нового напряму прикладних досліджень, а саме, формування технологічної обізнаності учнів шляхом занурення в іншомовне комунікативне середовище в умовах інформатизованого навчального процесу, управлінській діяльності та поширенні методики навчання в системі загальної середньої освіти.

Мета дослідження полягає у розробленні, обґрунтуванні та експериментальній перевірці ефективності формування технологічної компетентності (обізнаності) учнів шляхом занурення в іншомовне середовище в умовах інформатизованого навчально-виховного процесу.

Останнім часом науковці широко тлумачать терміни «компетентність», «компетенція», «компетентнісний підхід», «якість освіти», обґрунтовуючи обсяг, структуру і зміст кожного окремо. Слід відзначити, що єдиних визначень цих термінів нині немає. До того ж уточнення потребують відношення між вищезазначеними ключовими поняттями.

Компетентність – це сукупність особистісних якостей учня (ціннісно-смислових орієнтацій, знань, умінь, навичок, здібностей), зумовлених досвідом його діяльності у певній соціально і особистісно значущій сфері [2, с. 153]. Компетентність – це володіння учнем відповідною компетенцією, включаючи його особистісне ставлення до предмета діяльності, це вже усталена якість особистості учня і мінімальний досвід діяльності у даній сфері [2, с. 153].

Освітня компетентність – сукупність взаємозв'язаних смислових орієнтацій, знань, умінь, навичок і досвіду діяльності учня по відношенню до певного кола об'єктів реальної дійсності, необхідних для здійснення особисто і соціально значущої продуктивної діяльності [2, с. 152].

Компетентність – це обізнаність людини, готовність людини до мобілізації знань, умінь, зовнішніх ресурсів для ефективної діяльності в конкретній життєвій ситуації. Сутність визначення компетенції у тлумаченні різними дослідниками розкривається через поняття «знання», «уміння», «навички», «отриманий досвід» і здібності, які надбано і розвинуто завдяки навчанню.

Технологічна компетентність – це розроблення та розумне використання технологічних продуктів чи систем, що застосовують методику та ефективні технічні знання та інші галузі для розуміння та вирішення ситуацій, що представляють інтерес, або пропонують нові продукти та послуги, повідомляючи результат з метою продовження процесів удосконалення чи вдосконалення, яке відповідальне за прийняття рішень.

Технологічна компетентність розглядається як обізнаність учня [3] щодо застосовування в конкретній життєвій та навчальній ситуації, в тому числі проблемній, набуті знання, уміння, навички, способи діяльності стосовно добору відповідних ІКТ та їх використання для пошуку необхідних даних, їх аналізу, організації, перетворення, зберігання, передавання з дотриманням етичних і правових норм та вирішення завдань предметної галузі.

Нині основні методичні інновації пов'язані із застосуванням інтерактивних методів навчання, основаних на принципах взаємодії, активності учнів, опорі на колективний досвід, обов'язкового зворотного зв'язку. Слово «інтерактив» від англійського «interact» («inter» – взаємний, «act» – діяти). Термін «інтерактивна педагогіка» був введений в 1975 р. німецьким вченим Гансом Фріцем, який визначив мету інтерактивного процесу «... як зміна і поліпшення моделей поведінки його учасників: аналізуючи власні реакції та реакції партнера, учасник змінює свою модель поведінки» [4]. Інтерактивність означає здатність взаємодіяти чи знаходитись в режимі бесіди, діалогу з ким-небудь (людиною) або чим-небудь (комп'ютером). Іншими словами, учні легше розуміють і запам'ятовують матеріал, який вони вивчали шляхом активного залучення в навчальний процес.

Інтерактивні методи дають найбільший простір для самореалізації учня у навчанні і найбільше відповідають особистісно-орієнтованому підходу учнів. Вони можуть застосовуватися при організації викладачем наступної роботи із учнями: – організація тематичних занять; – організація тимчасових творчих колективів при роботі над навчальним проектом; – формування портфоліо учня; організація дискусій і обговорень проблем дослідження, що виникли в колективі; – для створення освітніх ресурсів (курсів лекцій, тренінгових матеріалів, дипломних робіт, творчих робіт, аудіо і відеоматеріалів та ін.) [6]. Для вирішення навчальних завдань викладач використовує наступні форми роботи: використання кейс-технологій; проведення відео конференцій; «круглих столів»; «мозковий штурм»; дебати;

фокус-групи; ділові і рольові ігри; case-study (аналіз конкретних, практичних ситуацій); навчальні групові дискусії; тренінги, метод проектів та ін. [7].

Анотація. *У статті розглянуто проблему формування технологічної компетентності учнів, яка сприяє підвищенню якості професійної підготовки учнів, за рахунок впровадження інтерактивних технологій у навчальний процес учнів.*

Ключові слова: *технологічна компетентність, дослідницьке навчання, компетентнісний підхід.*

Література

[1] - Гриб'юк О. О. Дослідницьке навчання учнів предметів природничо-математичного циклу з використанням комп'ютерно орієнтованих методичних систем / О. О. Гриб'юк. Монографія. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2019. – 858 с.: іл.

[2] - Хуторський А. В. Ключові компетенції як компонент особистісно-орієнтованої парадигми освіти / А. В. Хуторський // Учень в загальноосвітній школі. – М.: ИОСО РАО, 2002. – С. 135-157

[3] - Hrybiuk O. Improvement of the Educational Process by the Creation of Centers for Intellectual Development and Scientific and Technical Creativity. In: Hamrol A., Kujawińska A., Barraza M. (ed-s) Advances in Manufacturing II. MANUFACTURING 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2019. pp. 370-382.

[4] - Богданова І. М. Використання інтерактивних технологій у підготовці майбутніх соціальних працівників // Вісник Національної академії Державної прикордонної служби України. Педагогічні науки. – 2011. – № 11. – С. 15-20.Hrybiuk O. Mathematical modeling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry // Proceedings of the First International conference on Eurasian scientific development. «East West». Asso ciation for Advanced Studies and Higher Education GmbH. Vienna. 2014. P. 46-53.

[5] - Гриб'юк О. О. Математичне моделювання при навчанні дисциплін математичного та хіміко-біологічного циклів: навчально-методичний посібник для учителів / О. О. Гриб'юк. – Рівне: РДГУ, 2010. – 207 с.

[6] - Гриб'юк О. О. Перспективи впровадження варіативних моделей комп'ютерно орієнтованого середовища навчання предметів природничо-математичного циклу у загальноосвітніх навчальних закладах України / Гриб'юк О. О. // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна / [редкол.: П. С. Атаманчук (голова, наук. ред.) та ін.] – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. – Випуск 22: Дидактичні механізми дієвого формування компетентнісних якостей майбутніх фахівців фізико-технологічних спеціальностей. – С. 184-190.

[7] - Hrybiuk O. Problems of expert evaluation in terms of the use of variative models of a computer-oriented learning environment of mathematical and natural science disciplines in schools, [w:] Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej. Seria: Organizacja i Zarządzanie, Zeszyt Nr 79, Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej (WPP), 2019.: 101-119. ISSN 0239-9415.

ДЛЯ НОТАТОК

Наукове видання

КЛАСИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ У НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ І МОЛОДИХ ВЧЕНИХ: ІСТОРИЧНИЙ ТА СУЧАСНИЙ АСПЕКТИ

Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених

09-10 квітня 2020 року

Відповідальний за випуск *Ємельянова Т.В.*

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка *Купіної Н.А.*

Підписано до друку ____________ р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman Cyr . Віддруковано на ризографі.
Ум. друк. арк._____. Обл.-вид. арк. _____.
Зам. № ________. Тираж ______ прим. Ціна договірна

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61200, Харків-МСП, вул. Ярослава Мудрого, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-72; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua
Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія № ДК №897 від 17.04 2002 р.