Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

Горбачов П.Ф.

Аналітика транспортних процесів

Конспект лекцій

Харків ХНАДУ

2020

Функціональна логістика: Конспект лекцій для здобувачів рівня доктор філософії 275.03 «Транспортні технології»

Викладено концепцію і основні принципи аналітичного моделювання транспортних процесів і систем. Розглянуті питання представлення транспортних процесів у теорії ймовірностей, застосування теорії масового обслуговування при дослідженні транспортних процесів, надійності елементів транспортних систем.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. АНАЛІТИЧНИЙ АПАРАТ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ПРОЦЕСІВ

Тема 1. Існуючи методи аналітичного моделювання транспортних процесів

Аналіз існуючих методів моделювання ТП (транспортних процесів) повинен базуватися саме на моделях свідомого вибору альтернативи учасниками руху. При цьому слід враховувати, що більшість цих та інших моделей були розроблені для міських транспортних систем, тому аналіз моделей має засновуватись саме на цих моделях з наступним виділенням варіантів їхнього використання для регіональних транспортних систем.

1.1 Моделювання процесу руху вантажного транспорту

Наукові основи та загальні принципи моделювання міжміських вантажних перевезень були розроблені і сформульовані в 70-х роках XX століття. Однією з перших прогнозних моделей міжміських вантажних перевезень стала модель Робертсона та Кресенга, відома в літературі як модель Гарвард-Брукінгса. Прикладом такої моделі є модель транспортної системи Колумбії. Модель складається з вузлів, в якості яких виступають міста або регіони країни, та відрізків, яким відповідають маршрути міжміських вантажних перевезень.

Модель Гарвард-Брукінгса є мультимодальною, що свідчить про відображення в ній вантажопотоків різних видів транспорту. Вибір перевізника та задача маршрутизації в такій моделі вирішується шляхом обчислення найкоротших відстаней для інтермодальної мережі. Критерієм ефективності цієї моделі є витрати на транспортування. Такий же підхід використовується і в моделі Хічкока для прогнозування вантажопотоків між пунктами відправлення та призначення.

Визначення обсягів виробництва і споживання є необхідним елементом для виконання розподілу кореспонденцій вантажів у моделі Хічкока.

В 1975 р. прогнозну модель вантажопотоків запропонував Петерсон. Модель представлена у вигляді математичної програми, цільовою функцією якої є затримки доставки вантажу, що залежать від обсягу вхідного вантажопотоку. Ймовірно, що затримки доставки вантажу обрані у якості критерію оптимальності виходячи з теорії масового обслуговування, одну з моделей якої детально описує Петерсон та Фулертон. В моделі робиться припущення про фіксований стан попиту на транспортні послуги, який визначається екзогенними факторами. Саме відсутність урахування коливань попиту в даній моделі є основним її недоліком. Крім цього, в моделі не розглядається направленість вантажопотоків по транспортній мережі, в результаті чого стає неможливим перевірити прогнозні можливості цієї моделі.

На початку 80-х років у рамках національної програми досліджень у галузі транспорту була створена мультимодальна модель мережі вантажопотоків для різного роду товарів, що отримала назву транспортної моделі мережі. Основними властивостями моделі транспортної мережі, запропонованої в 1980 р. є:

- маршрутизація ТЗ здійснюється на основі рішень вантажовласників, які керуються виключно фінансовою складовою процесу перевезення;
- транспортні витрати мають лінійну залежність між курсом долару, часом та використанням матеріальних ресурсів.

В 1981 р. американський вчений Ленсдаун розробив модель вантажопотоків, яку показав на прикладі мережі залізничних доріг. Не зважаючи на те, що модель Ленсдауна відрізняється від розглянутих раніше моделей за видом транспорту, досвід її створення буде корисним і для розробників моделей автомобільних вантажопотоків, так як саме в цій моделі вперше було зроблено спробу змоделювати взаємодію вантажовласників і перевізників. Вихідними даними для моделі Ленсдауна є матриці відправок вантажів. Варто зазначити, що, і в цьому варіанті відтворення процесу розподілу вантажопотоків по мережі, попит є фіксованою величиною. Результатом роботи моделі являються варіанти залізничних маршрутів, які включають проміжні пункти завозу вантажу, прибуваючи в які, відповідальність за виконання замовлення на перевезення вантажу переходить від одного перевізника на іншого. Вибір маршруту для вантажопотоку, що враховує кількість та розміщення проміжних пунктів, в яких відбувається передача відповідальності за вантаж між перевізниками, здійснюється за спільною згодою вантажовідправників та перевізників. Питання розміщення проміжних пунктів може вирішуватися вантажовідправником, але найчастіше воно вирішується адміністрацією залізничних доріг, яка володіє більшим об'ємом інформації про рівень завантаження тої чи іншої ділянки маршруту. Загальні принципи функціонування моделі Ленсдауна можна охарактеризувати наступним чином:

- найвигіднішим маршрутом є той з маршрутів, що має найменшу кількість проміжних пунктів;
- перевізник при розробці плану перевезення створює маршрут, виходячи з найкоротших відстаней між пунктами відправлення і призначення;
- серед можливих варіантів маршрутів, оптимальним є той, що максимізує частку прибутку перевізника;
- якщо існує декілька потенційних перевізників, які готові до виконання замовлення на перевезення вантажу, обсяг відправки розподіляється між усіма з них.

Моделі транспортних мереж розглянутих авторами робіт стали основою для розробки моделі рівноваги вантажопотоків, що запропонували Крейнік, Харкер та Фрейз. Основною ідеєю створення цієї моделі є рівномірний розподіл вантажопотоків по всій мережі автомобільних доріг, в результаті чого робиться припущення про стан рівноваги між обсягами відправлення та прибуття вантажів між пунктами відправлення та призначення. Мінімізація витрат перевізників та вантажовласників, а також встановлення оптимальних ринкових цін на транспортні послуги є метою створення цієї моделі.

Аналіз трендів та часових рядів стали новим напрямком аналізу та відтворення природи вантажопотоків в 1990-х роках. Діапазон таких моделей варіюється від простих однофакторних моделей до змішаних регресійних моделей або моделей ковзного середнього. Ці моделі досить прості в застосуванні через незначні обсяги вхідної інформації необхідної для їх створення, проте вони не є універсальним інструментом для моделювання задач такої складності як міжміське вантажне перевезення.

В 1998 р. Фрейз запропонував нову інтерпретацію моделі розподілу вантажопотоків, яка ґрунтувалась вже не на рівно вагомому розподілу обсягів відправлення та прибуття вантажів між пунктами відправлення та призначення, а навпаки, на незбалансованому стані обсягів вантажів, що перевозяться. Створення такої моделі дозволило описати песимістичні прогнози щодо вантажних перевезень, в результаті невиконання однією зі сторін своїх зобов’язань по перевезенню.

Моделювання міжміських вантажних перевезень стало предметом досліджень Вінстона, який поділяє загальну множину існуючих моделей на два основних типа – на агреговані та деталізовані моделі. Квант і Баумоль розробили одну з перших агрегованих моделей, що отримала назву моделі абстрактного типу. Основа цієї моделі – вхідна інформація, що кількісно та якісно повинна описувати вантажопотоки регіонів, між якими здійснюється перевезення.

Інший підхід до агрегованих моделей запропонували Мортон та Левін. Створена ними модель являє собою лог-лінійну модель, що залежить від зміни співвідношення між часткою міжміських вантажних перевезень до частки вантажних перевезень в країні в цілому. Ця модель зручна для практичного застосування при вирішенні нескладних завдань організації міжміських перевезень, але вона не є ефективною при вирішенні комплексних задач, відсутність теоретичного апарату її створення є головним недоліком цієї моделі. На прикладі двох агрегованих моделей, одна з яких відображала різницю цін на перевезення, а інша – рівень їх змін Оум показав обмежені можливості використання агрегованих моделей.

В 2002 році Ріган і Гаррідо виділили два класи деталізованих моделей вантажних перевезень: моделі поведінки та модель управління запасами. Моделі поведінки орієнтовані на прийняття рішення щодо співпраці з тим чи іншим перевізником або вантажоодержувачем, в той час як модель управління запасами аналізує попит на вантажні перевезення. Модель поведінки передбачає прийняття раціонального рішення особою, що керує процесом управління. Необхідною інформацією для моделі поведінки є: тариф на перевезення вантажу, час доставки вантажу, рівень обслуговування, надійність перевезення, страхові затрати, можливість гнучкого управління. Недоліком моделі поведінки є завчасний вибір управляючої особи, що передує процедурі збору первинної інформації. Це непроста задача, особливо для підприємств, в яких існує нагальна потреба одночасного прийняття декількох рішень (наприклад, вибір марки або вантажності декількох автомобілів, визначення обсягів вантажних відправок та ін.).

Другий клас деталізованих моделей складають моделі управління запасами, основною метою створення якої є досягнення швидкого оберту товарів в процесі задоволення попиту споживачів. Розумна політика управління запасами будується на виборчому розподілі ресурсів за п'ятьма ознаками, до яких належать: сегментація споживчого ринку (складу споживачів), необхідний асортимент продуктів, інтеграція вантажоперевезень, тимчасові потреби, вимоги конкуренції.

Автори сучасності розглядають процедуру моделювання вантажопотоків як строго поетапний процес. Так, на думку Ортузара, на першому етапі необхідно визначати МК вантажів, тобто визначити хто і що виробляє, в яких об’ємах і з якою метою (для проміжного або кінцевого споживання). Другий етап моделювання вантажних перевезень тісно пов'язаний з логістикою. На цьому етапі вирішуються питання розміщення та раціонального використання запасів, управління ланцюгами постачань. Задачею, що потребує вирішення, на третьому етапі є вибір виду транспорту, рухомого складу та об'єктів технічного обладнання, необхідного для здійснення процесу перевезення. Завершальним четвертим етапом організації вантажоруху є створення маршрутів прямування вантажів.

Ортузар пропонує два агреговані підходи, що, на його думку, найбільш поширені у використані для визначення МК на сьогодні. Перший передбачає знаходження величини кореспонденції *k*-го типу вантажу за наступною моделлю:

$$T_{ij}^{k} = A_i^k \cdot B_j^k \cdot O_i^k \cdot D_j^k \cdot e^{-\beta^k \cdot C_{ij}^k}, \tag{1.1}$$

де T_{ij}^{k} - величина кореспонденції вантажу, що транспортується з *i*-го *j*-ий регіон, т.;

$A_i^k \cdot B_j^k$ - балансувальні коефіцієнти;

O_i^k - обсяг поставки *k*-го типу вантажу (товару) з *i*-го регіону, що фактично є обсягом виробництва, т.;

β^k - калібрувальний коефіцієнт по параметру *k*;

C_{ij}^k - калібрувальний коефіцієнт, що відображає витрати на транспортування віднесені на обсяг транспортування.

$$C_{ij} = f_{ij} + b_1 \cdot s_{ij} + b_2 \cdot \sigma \cdot s_{ij} + b_3 \cdot \omega_{ij} + b_4 \cdot p_{ij}, \tag{1.2}$$

де f_{ij} - витрати на використання технології перевезення з *i* в *j*;

s_{ij} - витрати часу на доставку від дверей *i* до дверей *j*;

$\sigma \cdot s_{ij}$ - варіативність часу транспортування між *i* та *j*;

ω_{ij} - очікуваний час чи затримка в обслуговуванні від «ідеального» сервісу, тобто відхилення в часі постачання. Наприклад, для морського виду транспорту це значення може бути великим та значно впливати на результуючий показник C_{ij}.

p_{ij} - можливість втрати чи псування вантажу внаслідок транспортування;

b_1, b_2, b_3, b_4 - коефіцієнти, що характеризують ступінь впливу факторів на результуючу ознаку. Як правило, ці постійні пропорційні величині обсягу перевезення.

Другий підхід до прогнозування величин кореспонденцій передбачає застосування методів лінійного програмування, що ґрунтується на оптимізації обраної цільової функції, у якості якої, як правило, обираються загальні витрати на транспортування (у грошовому виразі, дуже рідше в узагальнених умовних витратах)

$$Z = \sum_{i,j=1}^{r} T_{ij} \cdot C_{ij} \rightarrow \min , \tag{1.3}$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^{r} T_{ij} = D_j , \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^{r} T_{ij} = O_i . \tag{1.5}$$

Методологія визначення рівня завантаження магістралей вантажопотоками поряд з описаними вище моделями передбачає застосування так званих балансових моделей. Постановка задачі полягає в пошуку стану рівноваги системи. Виходячи з цього існують варіації цього підходу виходячи з обраного критерію ефективності (оцінки стану системи). Одним з найбільш поширених критеріїв є ентропія системи, яку запропонував Вільсон

$$H(f) = \sum_{i,j} f_{ij} \cdot \left(\frac{f_{ij}}{v_{ij}} \right), \qquad f = \{ f_{ij} \mid i, j \in R \}, \tag{1.6}$$

де f_{ij} - кількість заповнених станів, тобто кількість елементів системи, що знаходяться в стані (i,j);

v_{ij} - апріорні найбільш ймовірні стани значень f_{ij}.

Найбільш ймовірні значення F_{ij} визначаються при рішенні задачі максимізації ентропії системи з урахуванням умови обмежень по f_{ij}. При цьому фактично задача пошуку рівня завантаження ділянок транспортної мережі вантажопотоками зводиться до пошуку величин кореспонденцій між містами. Кінцевий вигляд моделі, що застосовується для практичних розрахунків наступний:

$$F = \arg\max(H(f)), \qquad f = \{ f_{ij} \mid i, j \in R \}, \tag{1.7}$$

за обмеженнями

$$\sum_{j \in R} f_{ij} = O_i, \tag{1.8}$$

$$\sum_{i \in R} f_{ij} = D_j, \tag{1.9}$$

$$f_{ij} \geq 0, \tag{1.10}$$

$$g_n(f) = 0, \tag{1.11}$$

$$h_m(f) \leq 0, \tag{1.12}$$

де O_i - місткість міста по відправленню, т;

D_j - місткість міста по споживанню товарів, т.

В постановці (1.7) та системі обмежень (1.8) – (1.12) задача оптимізації є стандартною задачею лінійного програмування з випуклою функцією. В загальному вигляді задача вирішується методом множників Лагранжа. Якщо виконати припущення, що існує можливість формалізувати певну функцію витрат просування матеріалопотоку

$$c_i = \sum_{j \in R} c_{ij} \cdot f_{ij}, \tag{1.13}$$

де c_{ij} - сукупні витрати на транспортування між містом i в місто j.

В цьому випадку рішення задачі буде співпадати з гравітаційною, якщо $c_{ij} = t_{ij}$ та взяти функцію тяжіння виду

$$C(c_{ij}) = \exp(-\lambda \cdot c_{ij}). \tag{1.14}$$

де λ - множник Лагранжу.

Таким чином, з урахуванням теперішніх умов функціонування підприємств різних галузей економіки, задача визначення вантажопотоків між вантажоутворюючими та вантажопоглинаючими пунктами повинна враховувати наступні економічні аспекти:

- мінімальні витрати часу на переміщення вантажу з урахуванням усіх залучених до перевезення видів транспорту;
- мінімальні грошові витрати, що віднесені на загальний обсяг вантажу, що транспортується (собівартість транспортування).

При цьому грошові витрати формуються не лише на основі вартості вантажу та безпосереднього транспортування, але повинні враховувати затримки в термінах доставки чи зберігання на складі. Але в реальних умовах при значних обсягах відправлень та високій інтенсивності перевезень ці показники врахувати практично неможливо.

В рамках вирішення питання формування міжміських вантажопотоків слід приділяти особливу увагу чинникам цього процесу, а саме:

- дислокаційним факторам, тобто необхідність в перевезеннях виникає з парадигми задоволення потреб населення чи виробництва в певних товарах чи сировині (комплектуючі для виробництва). При цьому на основі аналізу обсягів поглинання товарів чи сировини можливо визначити рівень та інтенсивність виконання вантажних перевезень, їх зародження на напрями реалізації;
- номенклатура вантажів, спеціалізація регіонів на виробництві певних продуктів;
- фізичні характеристики вантажу, що є основою для вибору методу транспортування та виду транспорту;
- операційні фактори – масштаби виробництва, застосування каналів розподілу продукції, географічна диверсифікація товарів;
- географічні фактори – щільність населення та розташування агломерації безпосередньо впливає на характеристики розподілу готової продукції;
- фактори динаміки – сезоні коливання попиту на певні продукти;
- цінові фактори.

На основі аналізу існуючих підходів до моделювання вантажопотоків в міжміському сполученні можна зробити висновок, що суттєвий вплив на величини та характер формування досліджуваного явище оказує відстань між вантажоутворюючими та вантажопоглинаючими об’єктами, а також сукупні витрати на просування вантажопотоку.

Більшість моделей ґрунтуються на основних атрибутах гравітаційного та ентропійного моделювання, а саме врахуванні потужностей виробничих об’єктів, що формують величину вантажопотоку, та сукупного попиту регіонів на конкретні види товарів та сировини, що є відображенням процесу поглинання вантажопотоку. У якості функції розподілу величини вантажопотоку пропонується використовувати, як транспортні параметри, так і економічні характеристики реалізації процесу перевезення вантажів.

Для побудови моделей високої точності слід брати до уваги велику низку факторних ознак, які характеризують спеціалізацію регіонів по виробництву продукції, потужності виробничих об’єктів, дислокаційні фактори та географічні складові районів поглинання вантажопотоків.

1.2 Методи моделювання потоків індивідуального автотранспорту

Серед всієї різноманітності математичних моделей, застосовуваних для аналізу транспортних мереж, можна виділити дві основні групи моделей:

- прогнозні моделі;
- імітаційні моделі.

Прогнозні моделі призначені для моделювання завантаження транспортної мережі з відомою геометрією та характеристиками при відомому розміщенні потокоутворюючих і потокопоглинаючих об'єктів. За допомогою цих моделей прогнозують наслідки змін у транспортній мережі або в розміщенні об'єктів. Моделі цього типу застосовуються для транспортних розрахунків, розвитку функціонально-планової структури транспортних мереж, для аналізу наслідків тих або інших заходів щодо організації руху, вибору альтернативних проектів розвитку транспортної інфраструктури.

Задачі прогнозу завантаження елементів дорожньої мережі традиційно розділяється на два взаємозалежні етапи. На першому етапі визначають міжрайонні кореспонденції, на другому розподіляють зазначені кореспонденції по транспортній мережі. Таким чином, прогнозні моделі дозволяють прогнозувати шляхи переміщення та кількість учасників руху, які використовують той або інший шлях.

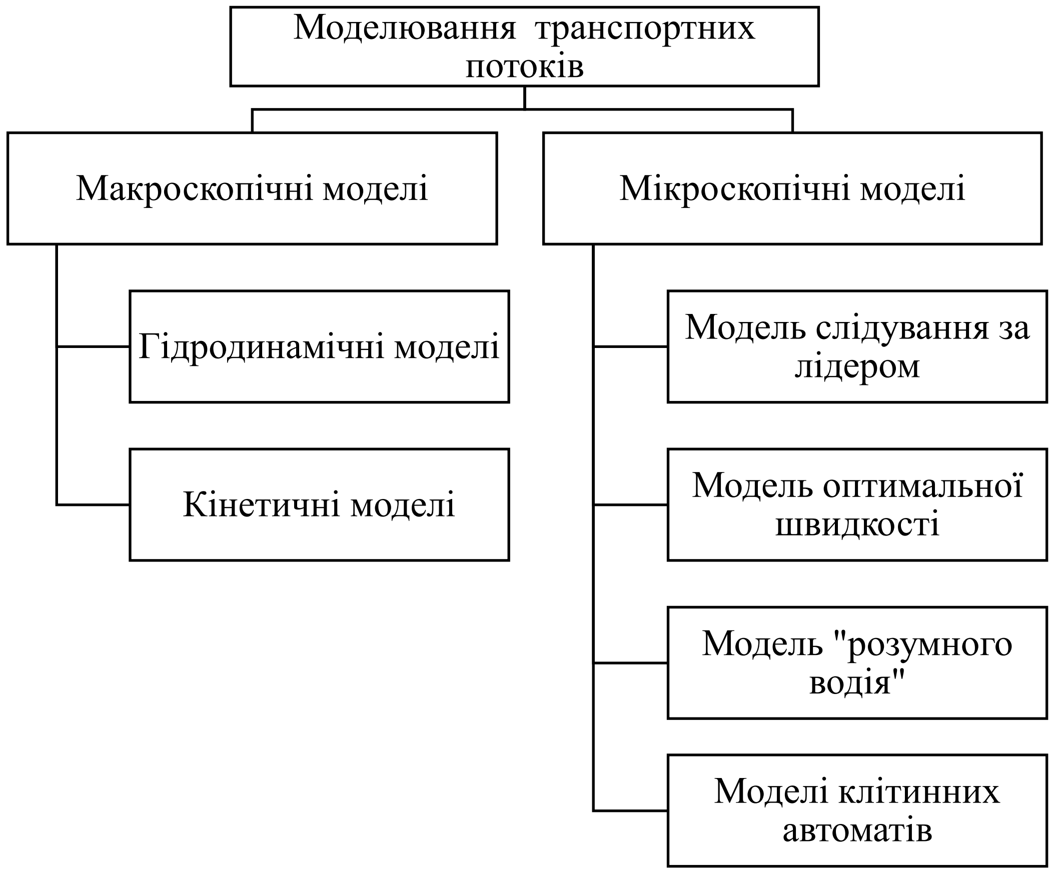

Рисунок 1.1 – Загальна класифікація існуючих методів моделювання ТП

Основою для побудови макроскопічних моделей є усереднені взаємозалежні параметри такі, як щільність та швидкість ТП. Моделі даного класу також називають гідродинамічними так, як ТП в цих моделях порівнюється з рухом специфічної рідини. Також до цього класу можливо віднести кінетичний підхід в якому ТП описується щільністю розподілу автомобілів у просторі. В мікроскопічних моделях, на відміну від макроскопічних, моделювання ТП проводять с точністю до кожного автомобіля в потоці. Такий підхід дозволяє більш точно описати рух ТП але потребує значних обчислювальних ресурсів.

Вперше, моделюванням ТП почав займатися Гриншилдс Б.Д., який вивчав пропускну здатність доріг та вплив на неї щільності руху автомобілів. В подальшому ним було сформульовано закон збереження ТП

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \tag{1.15}$$

при

$$x \in R,\ t > 0, \tag{1.16}$$

де ρ – щільність потоку, авт./км;

v - швидкість автомобілів, км/год;

x, t - координата руху елементів потоку.

З рівняння (1.15) можливо виразити швидкість

$$v(\rho) = v_{\max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right), \tag{1.17}$$

при

$$0 \le \rho \le \rho_{\max}. \tag{1.18}$$

Одна з найперших гідродинамічних моделей, в якій ТП описується законом збереження кількості автомобілів Гриншилдса Б.Д., була запропонована М. Лайтхіллом, Дж. Уіземом, та П. Ричардсом. Модель цього типу засновані на рівнянні безперервності щільності автомобільного потоку, а також припускається, що середня швидкість потоку є детермінованою функцією щільності автомобілів

$$V(x,t) = V_{\varepsilon}(\rho(x,t)), \tag{1.19}$$

де $\rho(x,t)$ – щільність потоку з координатою x у момент часу t, авт./км;

$V(x,t)$ - швидкість автомобілів з координатою x у момент часу t, км/год;

V_ε - рівноважне значення швидкості, км/год.

При цьому загальне рівняння даної моделі має наступний вид:

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0, \tag{1.20}$$

де $c(\rho)$ – швидкість поширення нелінійних кінематичних хвиль.

Дане рівняння може описувати поширенням нелінійних кінематичних хвиль зі швидкістю поширення $c(\rho)$. В моделі характер хвилі може змінюватися при, якому утворюється розривний профіль хвилі. Перевагою моделі Лайтхілла-Уізема є простота реалізації, що дозволяє її використовувати, як допоміжний інструмент при моделюванні ТП в великих транспортних системах.

Щільність ТП на реальних транспортних системах не змінюється східчасто, а представляє собою безперервну функцію координат та часу. Для згладжування профіль хвилі в рівняння було добавлено член другого порядку який описує дифузію щільності

$$\partial_t \rho + V_\varepsilon \partial_x \rho = -\rho \frac{dV_\varepsilon}{d\rho} \partial_x \rho + D\partial_{xx}^2 \rho. \tag{1.21}$$

Недоліком моделі є твердження, що середня швидкість на ділянках дороги в кожний момент часу дорівнює рівноважному значенню при певній щільності автомобілів, що робить модель неадекватною при моделюванні ТП на ділянках з'їзду з траси, звуженнях дороги, а також в умовах руху „ старт - стоп", що виникає в заторах і пробках.

Для описання не рівноважних ситуацій, замість співвідношення (1.20) була розроблена модель Пейна – Уізема. В моделі було запропоновано замість визначення миттєвої швидкості, яка залежить від щільності потоку, використовувати спеціальні диференційні рівняння швидкості

$$\partial_t V + V \partial_x V = -\frac{C(\rho)}{\rho} \partial_x \rho + \frac{1}{\tau}(V_\varepsilon(\rho) - V), \tag{1.22}$$

де τ – час реакції водія, с,

$$C(\rho) = \frac{1}{2\tau} \cdot \frac{dV_\varepsilon}{d\rho}. \tag{1.23}$$

Ліва частина рівняння описує зміну швидкості автомобіля на певній ділянці дороги. Права частина рівняння описує реакцію водія на зміну ситуації на дорозі. В подальшому рівняння швидкості було представлено в різних модифікаціях, та методах вирішення їх. Недоліком рівняння Пейна є те, що вирішення рівняння при лінійному наближенні демонструє стійкість до малих збурювань на всіх значеннях щільності.

Даний недолік було вирішено шляхом перетворення рівняння

$$C(\rho) = \frac{d}{d\rho} P_e(\rho), \tag{1.24}$$

при

$$P_e(\rho) = \rho \theta_e(\rho). \tag{1.25}$$

де P - внутрішній тиск ТП;

θ - варіація швидкостей у потоці.

При постановці (1.24) в (1.22) одержимо наступне рівняння швидкості:

$$\partial_t V + V\partial_x V = -\frac{1}{\rho}\partial_x P_\varepsilon + \frac{1}{\tau}(V_\varepsilon(\rho) - V). \qquad (1.26)$$

Рівняння (1.26) описує поведінку водіїв у залежності від тиску ТП попереду. Для оцінки варіації θ, як функції щільності, застосовуються різні наближення, отримані при аналізі емпіричних даних. Наприклад, у моделях Кюне (Kühne) і Кернера-Конхойзера (Kerner-konhauser) у якості першого наближення використовується

$$\theta_e(\rho) = \theta_0. \qquad (1.27)$$

Рівняння (1.26) також припускає виникнення ударних хвиль. Для запобігання цього у праву частину додається дифузійний член $v\partial^2_{xx}V$, аналог в'язкості в рівняннях гідродинаміки. Звідси рівняння швидкості матиме наступний вид:

$$\partial_t V + V\partial_x V = -\frac{\theta_0}{\rho}\partial_x \rho + v\partial^2_{xx}V + \frac{1}{\tau}(V_\varepsilon(\rho) - V). \qquad (1.28)$$

Аналіз стійкості стаціонарного однорідного вирішення даного рівняння показує, що при значеннях щільності, що перевищують деяке критичне значення ρ_{er}, вирішення стає нестійким до малих збурювань (область нестійкості та зростання змінної залежить також від довжини хвилі збурювання). Ця обставина дозволяє теоретично моделювати ефекти, пов'язані з фантомними заторами, що виникають в однорідному потоці в результаті випадкових збурювань.

Найбільш відомою в розглянутому класі моделей є модель Kerner-konhauser. Стандартна модель Kerner-konhauser припускає модель в формі

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\tau}(V(\rho)-v)-c_0^2\frac{\partial L(\rho)}{\partial x}+\frac{\mu\partial^2 v}{\rho\partial x^2}. \tag{1.29}$$

Права частина рівняння (1.29) містить три коефіцієнти, що стосуються швидкості ТП. Перший член відображає тенденцію потоку на заданій щільності ρ до зниження середньої швидкості $V(\rho)$ до деякої величини. Виходячи с цього можливо припустити, що $V(\rho)$ буде убиваючою функцією з малою похідною при великих і малих значеннях ρ. Другий фактор попередження, означає, що водії знижують швидкість, якщо потік транспорту спереду має більш високу щільність. Безрозмірна функція $L(\rho)$ повинна в такому випадку бути монотонно зростаючої. Її звичайно вважаються рівної ln ρ, а величина $c_0^2\rho$ відіграє роль тиску. Останній член „ в'язкості" або „дифузія", відображає тенденцію узгодження швидкості руху зі швидкістю навколишніх автомобілів у потоці.

Аналіз стійкості стаціонарного однорідного вирішення моделі Kerner-konhauser показує стійкість при малих і дуже великих значеннях щільності, а також наявність області нестійкості при середніх значеннях щільності. На основі комп'ютерних розрахунків з використанням даної моделі вивчений процес утворення кластерів та подальший їх розвиток, тобто ізольованих областей з високою щільністю та низькою швидкістю потоку, що переміщаються.

Усі розглянуті моделі мають деякі якісні недоліки. Наприклад, при деяких значеннях параметрів ці моделі можуть припускати щільності, що перевищують максимально припустимі («бампер до бампера»). Крім того, при сильних просторових неоднорідностях початкових умов, можуть виникати негативні значення швидкостей (затор «розсмоктується назад» як результат дії в'язкості).

Описані вище макроскопічні моделі сформульовані в основному на основі аналогій з рівняннями класичної гідродинаміки. На відміну від гідродинамічних моделей, сформульованих у термінах щільності та середньої швидкості потоку, кінетичні моделі засновані на описі динаміки фазової щільності потоку, тобто щільності розподілу автомобілів як по координаті, так і по індивідуальній швидкості. Знаючи еволюцію в часі фазової щільності, можна розрахувати також і макроскопічні характеристики потоку - щільність, середню швидкість, варіацію швидкостей і інші характеристики, які визначаються моментами фазової щільності по швидкостях різного порядку. Цей підхід був запропонований Пригожиним за аналогією з висновком у статистичній фізиці рівнянь динаміки газу з кінетичного рівняння для фазової щільності. Таким шляхом можуть бути отримані деякі з перерахованих вище моделей, а також моделі суттєво більш детальні, наприклад диференціальні рівняння, що включають, для опису динаміки варіації швидкостей, а також моделі багатосмугового руху. Диференціальне рівняння, що описує зміну фазової щільності у часі, називається кінетичним рівнянням

$$\partial_t f + \partial_x (fv) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{int}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel}, \tag{1.30}$$

де *f(x,v,t)* – фазова щільність транспортного потоку, авт./км;

ρ (x,t) – гідродинамічна щільність транспортного потоку, авт./км;

V(x,t) – середня швидкість, км/год;

$\theta(x,t)$ - - варіація швидкостей у потоці.

Дане рівняння, як і рівняння (2.93), є рівнянням безперервності, що виражають закон збереження автомобілів, але тепер у фазовому просторі. Складові в лівій частині описують зміна фазової щільності за рахунок кінематичного переносу, у той час як складові в правій частині описують процес «миттєвих» змін швидкостей автомобілів за рахунок процесів взаємодії та релаксації.

Згідно Пригожину під взаємодією двох автомобілів на дорозі розуміється подія, при якій більш швидкий автомобіль доганяє більш повільний автомобіль, що рухається спереду. При цьому водій швидкого автомобіля або робить обгін, або знижує свою швидкість до швидкості автомобіля, що перед ним. Отже, вираз $\left(\partial f / \partial t\right)_{\text{int}}$ у правій частині кінетичного рівняння може бути виражене через кількість взаємодій, що призводить до гальмування автомобіля, яке відбуваються в даному місці в одиницю часу

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{int}} = \int_{v}^{\infty} dv^{/}(1-p)(v^{/}-v)\, f_{2}(x,v^{/},x,v,t) - \\ -\int_{0}^{v} dv^{/}(1-p)(v-v^{/})\, f_{2}(x,v,x,v^{/},t), \tag{1.31}$$

де $f_2(x,v,x^{/},v^{/},t)$ - спільна щільність розподілу пар автомобілів з координатами й швидкостями відповідно (x,v) і $(x^{/}, v^{/})$.

Перший інтеграл в (1.31) описує процес збільшення фазової щільності за рахунок гальмування більш швидких автомобілів до швидкості V, другий інтеграл визначає процес зменшення щільності за рахунок гальмування автомобілів зі швидкістю V до менших швидкостей у результаті взаємодії.

Емпіричні дані показують, що в потоці, що вільно рухається, установлюється природнє (рівноважне) розподілення швидкостей $F_0(v,x,t)$, яке можна інтерпретувати, як розподіл водіїв по бажаним швидкостям руху. Під "бажаною" швидкістю розуміється та швидкість, з якої кожний водій рухався б за відсутністю перешкод і взаємодій. Згідно Пригожину прагнення всіх водіїв рухатися з бажаними швидкостями приводить до колективного ефекту релаксації фактичного розподілу швидкостей до "бажаного" розподілу. Якщо позначити через τ характерний час цього процесу, то доданок $\left(\partial f / \partial t\right)_{rel}$ у правій частині кінетичного рівняння можна записати у вигляді

$$\left(\partial f \big/ \partial t \right)_{rel} = \frac{f(x,v,t) - \rho(x,t)F_0(v;x,t)}{\tau}. \tag{1.32}$$

У кінетичному рівнянні залишаються ще не визначеними два параметри: імовірність обгону p і час релаксації τ. Звичайно передбачається, що ці параметри є характеристиками колективної поведінки й тому вони є функціями макроскопічних характеристик потоку, таких як щільність, і середня швидкість потоку, і не залежать від індивідуальних значень швидкості. Підсумовуючи одержуємо кінетичне рівняння у вигляді

$$\partial_t f + v\partial_x f = \frac{f - \rho F_0}{\tau} + (1-p)\rho(V - v) f. \tag{1.33}$$

Вирішення рівняння інтерпретується відповідно як режим індивідуального та колективного руху. Зі збільшенням щільності росте частка автомобілів, що беруть участь у колективному русі, і падає частка автомобілів, що вільно рухаються. Процес поділу потоку на дві фракції аналогічний процесу конденсації в деяких відомих моделях статистичної фізики. Аналіз стійкості показує, що стаціонарний однорідне рішення є стійким при малій щільності (у режимі індивідуального руху). При збільшенні щільності вище критичного значення, виникає нестійкість до довгохвильових збурювань. В колективному русі потік нестійкий до збурювань із будь-якою довжиною хвилі.

Перші мікроскопічні моделі були запропоновані в 50- х роках. Автомобілі занумеровані індексом n відповідно до їхнього порядку на дорозі. У мікромоделях передбачається, що прискорення n - го автомобіля визначається станом сусідніх автомобілів. При цьому основний вплив виявляє безпосередньо попередній автомобіль n - 1. Цей автомобіль часто називають лідируючим, а весь клас мікромоделей моделями «слідування за лідером». Загальний вид рух автомобілів визначається системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{v}_n(t) = f(v_n, \Delta v_n, d_n). \tag{1.34}$$

Відмінності між моделями визначаються видом функції *f*.

У перших варіантах моделі слідування за лідером передбачалося, що кожний водій адаптує свою швидкість до швидкості лідируючого автомобіля:

$$\dot{v}_n(t) = \frac{1}{\tau}\left[v_{n-1}(t) - v_n(t)\right]. \tag{1.35}$$

Однак дана проста модель не описує такі властивості реального потоку, як нестійкість і виникнення хвиль заторів. Було запропонований ряд її модифікації – запропоновано ввести в ліву частину рівняння затримку аргументу $\Delta t \approx 1{,}3$ яка відображає час реакції водіїв на зміну швидкості лідируючого автомобіля. Далі, множник $1/\tau$ в (1.35) можна інтерпретувати як коефіцієнт чутливості S, що характеризує швидкість реакції водія до зміни швидкості лідера. У загальному випадку цей коефіцієнт є динамічною величиною, що залежить від швидкості та поточної дистанції до лідера. З урахуванням сказаного модель можна записати у вигляді диференціального рівняння зі зміщеним аргументом

$$\dot{v}_n(t + \Delta t) = S\left[v_{n-1}(t) - v_n(t)\right]. \tag{1.36}$$

Рівняння такого типу демонструють нестійкість при досить великих значеннях Δt. Наявність нестійкості дозволяє в принципі моделювати розвиток хвиль заторів. Однак рівняння, у якому коефіцієнт чутливості S є константою, не відтворює багато властивостей реального потоку, наприклад, фундаментальну діаграму, тобто залежність патока від щільності. Більш адекватна модель може бути отримана із припущення, що чутливість зростає при зменшенні дистанції до лідера. Запропоноване вираження для цього коефіцієнта, що узгодиться з експериментальними даними

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{\left[v_n(t+\Delta t)\right]^{m_1}}{\left[x_{n-1}(t) - x_n(t)\right]^{m_2}}, \tag{1.37}$$

де m_1, m_2 – константи, які підбираються емпірично.

Рівняння для рівноважного співвідношення швидкості та щільності має наступний вид:

$$V_e(\rho) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^{m_2 - 1}\right]^{\frac{1}{(1-m_2)}}, \tag{1.38}$$

де V_0 – швидкість вільного руху, км/год;

$\rho_{\max}$ – максимально допустима щільність ТП, авт./км.

Одним з недоліків моделі слідування за лідером є те, що вона неправильно описує динаміку одиночного автомобіля. Прискорення автомобіля під час відсутності лідера в цій моделі дорівнює нулю, у той час більш точним є припущення про прагнення водія наблизити свою швидкість до деякої бажаної швидкості V_0. Моделі іншого типу виходять із припущення, що для кожного водія існує «безпечна» - швидкість руху залежно від дистанції до лідера. Дана швидкість також називається оптимальною швидкістю. У цих моделях замість адаптації швидкості до швидкості лідера передбачається адаптація до оптимальної швидкості. Вплив лідера побічно виражений через залежність оптимальної швидкості від дистанції. Така модель уперше запропонована, де передбачалася адаптація швидкості із запізнюванням за часом

$$v_n(t+\Delta t) = v_e^{/}(d_n(t)) = v_e(s_n(t)). \tag{1.39}$$

Запропоноване використовувати диференційне рівняння

$$\dot{v}_n(t) = \frac{1}{\tau}\left[v_e^{/}(d_n(t)) - v_n(t)\right], \tag{1.40}$$

де $v_e^{/}(d_n)$ - безпечна швидкість руху залежно від дистанції до лідера.

$$v_e^{/}(d_n) = \frac{v_0}{2}\left[\tanh(d - d_c) + \tanh d_c)\right] \tag{1.41}$$

Стандартна модель оптимальної швидкості має декілька недоліків. Зокрема, модель дуже чутлива до конкретного вибору функціональної залежності оптимальної швидкості від дистанції $v_e^{/}(d_n)$, а також до вибору τ. При більших значеннях τ у моделі починають відбуватися зіткнення автомобілів, а при занадто малих значеннях виникають нереалістично великі прискорення. При цьому час розгону приблизно в п'ять раз перевищують характерні часи гальмування. Крім того, у реальності водії витримують більшу дистанцію та гальмують раніше при високій швидкості відносно лідера $\Delta v_n(t)$. Для врахування цих і інших особливостей реальної поведінки водіїв було розроблено багато варіантів моделі.

Найбільше поширення з мікромоделей здобула модель «розумного водія» (Intelligent Driver Model. IDM), яка розроблена Трайбером. Калібрування *nf* чисельне експерименти з цією моделлю показали, що її властивості стійкі до варіації параметрів; модель демонструє реалістичну поведінка при розгоні й гальмуванні та відтворює основні досліджуванні властивості ТП.

У моделі IDM передбачається, що прискорення автомобіля є безперервною функцією швидкості v_n "чистої" дистанції до лідера $s_n = d_n - l_{n-1}$ і швидкості відносно лідера Δv_n

$$\dot{v}_n = a_n \left[1 - \left(\frac{v_n}{v_n^0} \right)^{\delta} - \left(\frac{s_n^*(v_{n,} \Delta v_n)}{s_n} \right)^2 \right]. \tag{1.42}$$

Вираз $a_n \left[1 - \left(v_n / v_n^0 \right)^{\delta} \right]$ у правій частині цього рівнянні описує динаміку прискорення автомобіля на вільній дорозі. Вираз $a_n \left[\left(s_n^*(v_{n,} \Delta v_n) / s_n \right)^2 \right]$ описує гальмування, зв'язане з взаємодією з лідером. Вибір параметра δ дозволяє откалібрувати поведінку, яка пов'язана з розгоном. Значення δ = 1 відповідає експонентному за часом розгону, характерному для більшості моделей. При збільшенні цього параметра прискорення не убуває експоненціальна в процесі розгону, що краще відповідає поведінці водіїв.

У моделях клітинних автоматів (Cellular Automata (CA)) дорога розбивається на клітки, дискретним також вважається час. Часто вважається, що в клітці може перебувати не більше одного автомобіля. Також часто можливі значення швидкості автомобілів вважають теж дискретними.

Концепція клітинних автоматів була введена Дж. Фон Нейманом у 50- ті роки XX століття. Застосовувати клітинні автомати для моделювання ТП пропонувалося в роботі [211]. Однак активне використання цієї концепції почалося тільки після роботи К. Нагеля та М. Шрекенберга.

Модель Нагеля- Шрекенберга припускає на кожному кроці m →m+1 стан усіх автомобілів у системі обновляється у відповідності з наступними правилами.

Крок 1. Прискорення (відбиває тенденцію рухатися як найшвидше, не перевищуючи максимально припустиму швидкість)

$$V_n(m+1) = \min\{V_n(m)+1, V_{\max}\}. \quad (1.43)$$

Крок 2. Гальмування (гарантує відсутність зіткнень з автомобілем, який рухається попереду автотранспортного засобу)

$$V_n(m+1) = \min\{V_n(m), S_{n+1}(m) - S_n(m) - d\}, \quad (1.44)$$

де d – відстань між автомобілями, м.

Крок 3. Випадкові збурювання (ураховують відмінності в поведінці автомобілів)

$$V_n(m+1) = \begin{cases} \max\{V_n(m)-1, 0\}, p, \\ V_n(m), 1-p. \end{cases} \quad (1.45)$$

Крок 4. Рух

$$S_n(m+1) = S_n(m) + V_n(m). \quad (1.46)$$

Викладена модель є «мінімальною» тому що наведені вище чотири кроки необхідні для відтворення самих основних властивостей реального потоку. Однак для адекватного моделювання більш складних аспектів динаміки потоку необхідне формулювання додаткові правила. Чисельні експерименти показують, що потік є стійким при малій щільності і втрачає стійкість при високій. При цьому ключову роль у розвитку нерівноваги відіграє стохастичність процесу, тобто для розвитку заторів потрібно, щоб p не дорівнювало нулю. При $p = 0$ потік залишається стійким при всіх значеннях щільності. Дана обставина може розглядатися як серйозний теоретичний недолік моделей СА в порівнянні з макромоделями або моделями проходження за лідером, у яких флуктуації відіграють роль початкового поштовху, а подальший розвиток затору пояснюється нестійкістю (цілком детермінованого) рівноважного вирішення.

Однак настільки детальне моделювання ТП, яке передбачається описаними мікромоделями, не є доцільним на автомобільних дорогах державного значення на першому етапі формування моделі. Більшу цінність для моделювання представляють макромоделі, серед яких для застосування в моделі в найбільшому ступені підходить модель рівноважного розподілу для декількох класів користувачів. Ці моделі дозволяють знаходити рівноважний розподіл потоків в системі з декількома класами користувачів, тобто систем транспорту, які розподіляються за різними шляхами. При цьому необхідним є визначення окремої МК для кожного класу користувачів. Така постановка, а також той факт, що точність моделі підвищується при скороченні кількості альтернативних шляхів поїздки повністю відповідає загальній меті дослідження та умовам функціонування об’єкту.

Тема 2. Поняття та методи представлення процесів у теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей є математична наука, що вивчає закономірності в випадкових явищах. Що розуміється під терміном «випадкове явище»? При науковому дослідженні різних фізичних і технічних задач часто доводиться зустрічатися з особливого типу явищами, які прийнято називати випадковими.

Випадкове явище – це таке явище, яке при неодноразовому відтворенні одного і того ж досвіду протікає щораз дещо по-іншому.

2.1 Математичні та статистичні поняття

Сукупність – маса одиниць, що володіють деякими загальними властивостями, істотними для їх характеристики (сукупність робочих, деталей, товарів). Розрізняють генеральну сукупність і вибіркову, кінцеву та нескінченну.

Одиниця сукупності – елемент сукупності, що належить до спостереження (робочий, деталь).

Ознака – властивість одиниць (елементів) сукупності (розмір деталі, вага, заробітна плата робітників).

Розрізняють ознаки:

1) кількісні – виражені безпосередньо числом (заробітна плата, вік робітника);

2) атрибутивні – не піддаються безпосередньому кількісному вираженню (професія робочих, стать);

Модуль (М) – середня квадратична величина різності значень ознаки у будь-який спосіб складеної пари елементів сукупності (включаючи і повторення одного і того ж елемента).

Модуль пов’язаний з дисперсією наступним співвідношенням:

$$M^2 = 2\sigma^2.$$

Так якщо є варіанти 1, 3, 5, 6, 10, то середнє дорівнює:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 5.$$

Дисперсія – це міра розсіяння значень випадкової величини відносно середнього значення розподілу. Більші значення дисперсії свідчать про більші відхилення значень випадкової величини від центру розподілу.

У простому розумінні, дисперсія дозволяє виміряти наскільки далеко випадкові значення розподілені від їх середнього значення. Дисперсія відіграє важливу роль в статистиці, в якій вона використовується в таких напрямах як описова статистика, перевірка статистичних гіпотез і Метод Монте-Карло. Дисперсія дорівнює квадрату стандартного відхилення, що є другим центральним моментом розподілу, і коваріації випадкової величини із самою собою, тому зазвичай вона позначається як σ^2, S^2 або *VAR (X)*.

Дисперсія визначається як:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = 9,2$$

$$M^2 = 2 \cdot 9,2 = 18,4$$

Справді обчислимо абсолютні різниці, включаючи їх поєднання кожного варіанта з ним же:

$$1 - 1 = 0;$$
$$3 - 1 = 2;$$
$$5 - 1 = 4;$$
$$6 - 1 = 5;$$
$$10 - 1 = 9.$$

Різниці попарних сполучень з другим варіантом:

$$3 - 3 = 0;$$
$$3 - 1 = 2;$$
$$3 - 5 = 2;$$
$$3 - 6 = 3;$$
$$3 - 10 = 7.$$

За таким же алгоритмом перебираємо варіанти із числами 5, 6 і 10. Знаходимо суму квадратів 25 різниць, розділивши її на 25, визначимо середню арифметичну із квадратів різниць:

$$M^2 = \frac{460}{25} = 18,4$$

Цей же результат ми отримали вище подвоєнням дисперсії. Слід мати на увазі, що термін «модуль» має в різних розділах математики різний зміст. Наприклад, модуль переводу натуральних логарифмів в десяткові (M=0,43429), модуль ймовірностей та інші.

Алгоритм (алгорифм) – точний припис, правило для виконання в строго заданому порядку певного ланцюга обчислень, який після кінцевого числа кроків призводить до вирішення завдання. Цей припис зазвичай носить формальний характер і вимагає автоматичного виконання елементарних логічних і розрахункових операцій. Типовим зразком алгоритму є правило вилучення квадратного кореня.

Підсумовування. Для отримання суми потрібно всі складові скласти. Замість запису $x_1 + x_2 + ... + x_n$, можливо записати $\sum_{i=1}^{i=n} x_i$ або $\sum_{1}^{n} x_i$. $\sum$ – грецька буква сігма заголовна, яка означає додавання. Знаки $i = 1$ і $i = n$ під і над $\sum$, показують що додаванню належать всі x_i, при умові що i, приймає всі цілі значення від 1 до n.

Однак у багатьох випадках при підсумовуванні по підстрочному номеру i значення, які приймає i, що не записуються.

При підсумовуванні слід враховувати деякі властивості сум: сума обмеженого числа доданків, що мають одну і ту ж величину, дорівнює добутку величини доданків на їх число:

$$\sum a = a + a + a + ... + a = a \cdot n;$$

постійний множник виноситься за знак суми

$$\sum bx = b\sum x;$$

сума алгебраїчної суми декількох змінних дорівнює алгебраїчній сумі сум кожної змінної:

$$\sum (x \pm y) = \sum x \pm \sum y;$$

сума добутку декількох змінних не дорівнює добутку сум кожної змінної:

$$\sum xy \neq \sum x \cdot \sum y.$$

При незалежних змінних знак нерівності змінюється на знак рівності.

Комбінаторика – розділ елементарної математики, який застосовується до вирішення завдань математичної статистики, в якому розглядаються різні сполуки предметів: розміщення, перестановки і поєднання.

Варіаційна статистика – розділ математичної статистики, в якому вивчається розподіл кількісних ознак в статистичних сукупностях. Завданням варіаційної статистики є побудова фактичних і теоретичних розподілів і встановлення ступеня їх близькості один до одного, обчислення характеристик варіаційних рядів і оцінка їх достовірності, встановлення форми і тісноти зв’язку між різними ознаками. Варіаційна статистика застосовується при математичній обробці даних спостереження, при контролі якості продукції.

Біометрія – наука, яка використовує методи математичної статистики при вивченні кількісних співвідношень в біологічних сукупностях. Має велике практичне значення для різних виробничих процесів.

Завдання біометрії: дослідження розподілів сукупностей особин даного виду по різними ознаками; вивчення взаємозв'язку ознак всередині однієї сукупності, а також взаємозв'язків одних біологічних сукупностей з іншими; побудова різних імовірнісних показників, які оцінюють тривалість життя.

Економетрія – особливий напрямок економічної теорії, який полягає у використанні математики при дослідженні економіки.

2.2 Випадкові числа та теорія ймовірності

Розглянемо приклад. Проводиться стрільба з гармати, встановленого під заданим кутом до горизонту (рис. 2.1).

Користуючись методами зовнішньої балістики (науки про рух снаряду в повітрі), можна знайти теоретичну траєкторію снаряда (крива на рис. 2.1).

Рисунок 2.1 – Крива польоту кулі

Ця траєкторія цілком визначається умовами стрільби: початковою швидкістю снаряда, кутом кидання і балістичних коефіцієнтом снаряда. Фактична траєкторія кожного траєкторія кожного окремого снаряда неминуче відхиляється від теоретичної за рахунок сукупного впливу багатьох чинників.

Серед цих чинників можна, наприклад, назвати: помилки виготовлення снаряда, відхилення ваги заряду від номіналу, неоднорідність структури заряду, помилки установки пушки в задане положення, метеорологічні умови. Якщо зробити кілька пострілів при незмінних основних умовах, ми отримаємо не одну теоретичну траєкторію, а цілий пучок або «сніп» траєкторій, утворює так зване «розсіювання снарядів».

Те саме тіло кілька разів зважується на аналітичних вагах; результати повторних зважувань дещо відрізняються один від одного. Ці відмінності обумовлені впливом багатьох другорядних факторів, супровідні операцію зважування, таких як положення тіла на чашці терезів, випадкові вібрації апаратури, помилки відліку показань приладу.

Літак здійснює політ на заданій висоті; теоретично він летить горизонтально, рівномірно і прямолінійно. Фактично політ супроводжується відхиленнями центру маси літака від теоретичної траєкторії і коливаннями літака біля центру маси.

Ці відхилення і коливання є випадковими і пов'язані з турбулентністю атмосфери; від разу до разу вони не повторюються.

4. Проводиться ряд підривів осколкового снаряда в визначеному місці. Результати окремих підривів дещо відрізняються один від другого: змінюються загальне число осколків, взаємне розташування їх траєкторій, вага, форма і швидкість кожного окремого осколка. Ці зміни є випадковими і пов’язані впливом таких чинників, як неоднорідність металу корпусу снаряда, неоднорідність вибухової речовини, мінливість швидкості детонації. У зв’язку з цим різні підриви, здійснюються, здавалося б, в однакових умовах, можуть приводити до різних результатів: в одних підривах ціль буде вражена осколками, в інших – ні.

Всі наведені приклади розглянуті тут під одним і тим же кутом зору: підкреслені випадкові варіації, неоднакові результати ряду дослідів, основні умови яких залишаються незмінними.

Ці варіації завжди пов’язані з наявністю якихось другорядних факторів, що впливають на результат досвіду, але не заданих в числі його, основних умов. Основні умови досвіду, що визначають в загальних і грубих рисах його протікання, зберігаються незмінними; другорядні – змінюються від досвіду до досвіду і вносять випадкові відмінності в їх результати.

Цілком очевидно, що в природі немає жодного фізичного явища, в якому не були присутні б в тій чи іншій мірі елементи випадковості. Як би точно і детально не були фіксовані умови досвіду, неможливо досягти того, щоб при повторенні досвіду результати повністю і в точності збігалися.

Випадкові відхилення неминуче супроводжують кожному закономірного явища. Проте в ряді практичних завдань цими випадковими елементами можна знехтувати, розглядаючи замість реального явища його спрощену схему, «модель», і припускаючи, що в даних умовах досвіду явище протікає цілком певним чином. При цьому з незліченної безлічі факторів, що впливають на дане явище, виділяються найголовніші, основні, вирішальні; впливом інших, другорядних факторів просто нехтують. Така схема вивчення явищ постійно застосовується у фізиці, механіці, техніці. При користуванні цією схемою для вирішення будь-якої задачі перш за все виділяється основне коло умов і з’ясовується, на які параметри завдання вони впливають; потім застосовується той чи інший математичний апарат (наприклад, складаються і інтегруються диференціальні рівняння, що описують явище); таким чином виявляється основна закономірність, властива даному явищу і дає можливість передбачити результат досвіду по його заданим умовам. У міру розвитку науки число чинників, що враховуються стає все більше; явище досліджується докладніше; науковий прогноз стає точніше.

Однак для вирішення ряду питань описана схема – класична схема так званих «точних наук» – виявляється погано пристосованою. Існують такі завдання, де нас цікавить результат досвіду залежить від такого великого числа факторів, що практично неможливо зареєструвати та врахувати всі ці фактори. Це – завдання, в яких численні другорядні, тісно переплітаються між собою випадкові фактори відіграють помітну роль, а разом з тим число їх таке велике і вплив настільки складний, що застосування класичних методів дослідження себе не виправдовує.

Розглянемо приклад. Проводиться стрільба по деякій цілі зі знаряддя, встановленого під кутом, до горизонту. Траєкторії снарядів, як було вказано вище, не збігаються між собою; в результаті точки падіння снарядів на землі розсіюються.

Якщо розміри цілі великі в порівнянні з областю розсіювання, то цим розсіюванням, очевидно, можна знехтувати: при правильній установці знаряддя буде випущений снаряд влучати в ціль. Якщо ж (як зазвичай і буває на практиці) область розсіювання снарядів перевищує розміри цілі, то деякі з снарядів у зв’язку з впливом випадкових факторів в ціль не потраплять.

Виникає ряд питань, наприклад: який відсоток випущених снарядів в середньому потрапляє в ціль? Скільки потрібно витратити снарядів для того, щоб досить надійно вразити ціль? Які слід вжити заходи для зменшення витрати снарядів?

Щоб відповісти на ці запитання, звичайна схема точних наук виявляється недостатньою. Ці питання органічно пов’язані з випадковою природою явища; для того щоб на них відповісти, очевидно, не можна просто знехтувати випадковістю – треба вивчити випадкове явище розсіювання снарядів з точки зору закономірностей, властивих йому саме як випадковому явищу. Треба досліджувати закон, за яким розподіляються точки падіння снарядів; потрібно з’ясувати випадкові причини, що викликають розсіювання, порівняти їх між собою за ступенем важливості.

Розглянемо ще один приклад. Деякий технічний пристрій, наприклад система автоматичного управління, вирішує деяке завдання в умовах, коли на систему безперервно впливають випадкові перешкоди. Наявність перешкод призводить до того, що система вирішує завдання з деякою помилкою, в ряді випадків виходить за межі допустимої. Виникають питання: як часто будуть з'являтися такі помилки? Які слід вжити заходів для того, щоб практично виключити їх можливість?

Щоб відповісти на такі питання, необхідно досліджувати природу і структуру випадкових збурень, які впливають на систему, вивчити реакцію системи на такі обурення, з'ясувати вплив конструктивних параметрів системи на вигляд цієї реакції.

Всі подібні завдання, число яких у фізиці і техніці надзвичайно велике, вимагають вивчення не тільки основних, головних закономірностей, що визначають явище в загальних рисах, але і аналізу випадкових збурень і спотворень, пов'язаних з наявністю другорядних факторів і надають результату досвіду при заданих умовах елемент невизначеності.

Які ж існують шляхи і методи для дослідження випадкових явищ?

З чисто теоретичної точки зору ті фактори, які ми умовно назвали «випадковими», в принципі нічим не відрізняються від інших, які ми виділили в якості «основних». Теоретично можна необмежено підвищувати точність вирішення кожного завдання, з огляду на все нові і нові групи чинників: від найістотніших до самих незначних, Однак практично така спроба однаково докладно і ретельно проаналізувати вплив рішуче всіх факторів, від яких залежить явище, привела б тільки до того, що рішення задачі, в силу непомірною громіздкість і складності, виявилося б практично неможливим і до того ж не мало б ніякої пізнавальної цінності.

Наприклад, теоретично можна було б поставити і вирішити задачу про визначення траєкторії цілком певного снаряда, з урахуванням всіх конкретних похибок його виготовлення, точної ваги і конкретної структури даного, цілком певного порохового заряду при точно визначених метеорологічних даних (температура, тиск, вологість, вітер) в кожній точці траєкторії. Таке рішення не тільки було б неозора складним, але і не мало б ніякої практичної цінності, оскільки ставилося б тільки до даного конкретного снаряду і заряду в даних конкретних умовах, які практично більше не повторяться.

Очевидно, повинна існувати принципова різниця в методах обліку основних, вирішальних факторів, що визначають в головних рисах протягом явища, і вторинних, другорядних факторів, що впливають на перебіг явища як «похибок» або «збурень». Елемент невизначеності, складності, властивий випадковим явищам, вимагає створення спеціальних методів для вивчення цих явищ.

Такі методи і розробляються в теорії ймовірностей. Її предметом є специфічні закономірності, які спостерігаються в випадкових явищах.

Практика показує, що, спостерігаючи в сукупності маси однорідних випадкових явищ, ми зазвичай виявляємо в них цілком, певні закономірності, свого роду стійкості, властиві саме масовим випадковим явищам.

Наприклад, якщо багато разів поспіль кидати монету, частота появи герба (відношення числа що з’явилися гербів до загальної кількості випадків) поступово стабілізується, наближаючись до цілком певному числу, саме до ½. Така ж властивість «стійкості частот» виявляється і при багаторазовому повторенні будь-якого іншого досвіду, результат якого представляється заздалегідь невизначеним, випадковим. Так, при збільшенні числа пострілів частота потрапляння в деяку ціль теж стабілізується, наближаючись до деякого постійного числа.

Розглянемо ще один приклад. У посудині укладений якийсь обсяг газу, що складається з вельми великого числа молекул. Кожна молекула за секунду відчуває безліч зіткнень з іншими молекулами, багаторазово змінює швидкість і напрямок руху; траєкторія кожної окремої молекули випадкова. Відомо, що тиск газу на стінку посудини обумовлено сукупністю ударів молекул об цю стінку. Здавалося б, якщо траєкторія кожної окремої молекули випадкова, то і тиск на стінку посудини повинно було б змінюватися випадковим і неконтрольованим чином; проте це не так. Якщо числі молекул досить велике, то тиск газу практично не залежить від траєкторій окремих молекул і підпорядковується цілком визначеною і дуже простий закономірності.

Випадкові особливості, властиві руху кожної окремої молекули, в масі взаємно компенсуються; в результаті, не дивлячись на складність і заплутаність окремого випадкового явища, ми отримуємо дуже просту закономірність, справедливу для маси випадкових явищ. Відзначимо, що саме масовість випадкових явищ забезпечує виконання цієї закономірності; при обмеженому числі молекул починають позначатися випадкові відхилення від закономірності, так звані флуктуації.

Розглянемо ще один приклад. За деякою мішені проводиться один за іншим ряд пострілів; спостерігається розподіл точок попадання на мішені. При обмеженому числі пострілів точки попадання розподіляються по мішені в повній випадковості, без будь-якої видимої закономірності. У міру збільшення числа пострілів в розташуванні точок попадання починає спостерігатися деяка закономірність; ця закономірність проявляється тим виразніше, чим більша кількість пострілів вироблено. Розташування точок попадання виявляється приблизно симетричним щодо деякої центральної точки: в центральній області групи пробоїн вони розташовані густіше, ніж по краях; при цьому густота пробоїн убуває по цілком певним законом (так званий «нормальний закон» або «закон Гаусса», якому буде приділено велику увагу).

Подібні специфічні, так звані «статистичні», закономірності спостерігаються завжди, коли ми маємо справу з масою однорідних випадкових явищ. Закономірності, які проявляються в цій масі, виявляються практично незалежними від індивідуальних особливостей окремих випадкових явищ, що входять в масу. Ці окремі особливості в масі як би взаємно погашаються, нівелюються, і середній результат маси випадкових явищ виявляється практично вже не випадковим. Саме ця багатократно підтверджена досвідом стійкість масових випадкових явищ і служить базою для застосування імовірнісних (статистичних) методів дослідження. Методи теорії ймовірностей за природою пристосовані тільки для дослідження масових випадкових явищ; вони не дають можливості передбачити результат окремого випадкового явища, але дають можливість передбачити середній сумарний результат маси однорідних випадкових явищ, передбачити середній результат маси аналогічних дослідів, конкретний результат кожного з яких залишається невизначеним, випадковим.

Чим більша кількість однорідних випадкових явищ бере участь в завданні, тим чіткіше і чіткіше проявляються властиві їм специфічні закони, тим з більшою впевненістю і точністю можна здійснювати науковий прогноз.

У всіх випадках, коли застосовуються імовірнісні методи дослідження, мета їх в тому, щоб, минаючи занадто складне (і найчастіше практично неможливе) вивчення окремого явища, обумовленого занадто великою кількістю чинників, звернутися безпосередньо до законів, масами випадкових явищ. Вивчення цих законів дозволяє не тільки здійснювати науковий прогноз у своєрідній області випадкових явищ, але в ряді випадків допомагає цілеспрямовано впливати на хід випадкових явищ, контролювати їх, обмежувати сферу дії випадковості, звужувати її вплив на практику.

Імовірнісний, або статистичний, метод в науці не протиставляє себе класичному, звичайним методом точних наук, а є його доповненням, що дозволяє глибше аналізувати явище з урахуванням властивих йому елементів випадковості.

Характерним для сучасного етапу розвитку природних і технічних наук є досить широке і плідне застосування статистичних методів у всіх областях знання. Це цілком природно, тому що при поглибленому вивченні будь-якого кола явищ неминуче настає етап, коли потрібно не тільки виявлення основних закономірностей, а й аналіз можливих відхилень від них. В одних науках, в силу специфіки предмета і історичних умов, впровадження статистичних методів спостерігається раніше, в інших – пізніше. В даний час немає майже жодної природної науки, в якій так чи інакше не застосовувалися б імовірнісні методи. Цілі розділи сучасної фізики (зокрема, ядерна фізика) базуються на методах теорії ймовірностей. Все ширше застосовуються імовірнісні методи в сучасній електротехніці і радіотехніці, метеорології і астрономії, теорії автоматичного регулювання та машинної математики.

Широке поле застосування знаходить теорія ймовірностей в різноманітних галузях військової техніки: теорія стрільби і бомбометання, теорія боєприпасів, теорія прицілів і приладів управління вогнем, аеронавігація, тактика і безліч інших розділів військової науки широко користуються методами теорії ймовірностей і її математичним апаратом.

Математичні закони теорії ймовірностей – відображення реальних статистичних законів, об’єктивно існуючих в масових випадкових явищах природи. До вивчення цих явищ теорія ймовірностей застосовує математичний метод і за своїм методом є одним з розділів математики, настільки ж логічно точним і суворим, як інші математичні науки.

2.3 Предмет теорії масового обслуговування

За останні десятиліття в самих різних областях практики виникла необхідність у вирішенні своєрідних імовірнісних задач, пов’язаних з роботою так званих систем масового обслуговування. Прикладами таких систем можуть служити: телефонні станції, ремонтні майстерні, квиткові каси, довідкові бюро, перукарні. Кожна Така система складається з якогось числа обслуговуючих одиниць, які ми будемо називати «каналами» обслуговування. Як канали можуть фігурувати: лінії зв’язку; особи, які виконують ті чи інші операції; різні прилади. Системи масового обслуговування можуть бути як одно- так і багатоканальними.

Робота будь-якої системи масового обслуговування полягає у виконанні надходить на неї потоку вимог або заявок. Заявки надходять одна за одною до деяких, взагалі кажучи, випадкові, моменти часу. Обслуговування що надійшла заявки триває якийсь час, після чого канал звільняється і знову готовий для прийому наступної заявки.

Кожна система масового обслуговування, в залежності від числа каналів і їх продуктивності, володіє якоюсь пропускною спроможністю, що дозволяє їй більш-менш успішно справлятися з потоком заявок. Предмет теорії масового обслуговування – встановлення залежності між характером потоку заявок, продуктивністю окремого каналу. числом каналів і успішністю ефективністю обслуговування. Як показники ефективності обслуговування в залежності від умов завдання і цілей дослідження – можуть застосовуватися різні величини і функції, наприклад: середній відсоток заявок, які отримують відмову і залишають систему необслуженою; середній час «простою», окремих каналів і системи в цілому; середній час очікування в черзі; ймовірність того, що надійшла заявка негайно буде прийнята до обслуговування; закон розподілу довжини черги.

Кожна з цих характеристик описує, з тієї чи іншої сторони, ступінь пристосованості системи до виконання потоку заявок, іншими словами – її пропускну здатність.

Під «пропускною спроможністю» у вузькому сенсі слова зазвичай розуміють середнє число заявок, яке система може обслужити в одиницю часу, Поряд з нею часто розглядають відносну пропускну здатність – середнє відношення числа обслужених заявок до числа поданих. Пропускна здатність (як абсолютна, так і відносна) в загальному випадку залежить не тільки від параметрів системи, але і від характеру потоку заявок. Якби заявки надходили регулярно, через точно певні проміжки часу, і обслуговування кожної заявки теж мало строго певну тривалість, розрахунок пропускної спроможності системи не уявляв би ніяких труднощів. На практиці зазвичай моменти надходження заявок випадкові; здебільшого випадкова і тривалість обслуговування заявки. У зв’язку з цим процес роботи системи протікає нерегулярно: в потоці заявок утворюються місцеві згущення і розрідження. Згущення можуть привести або до відмов в обслуговуванні, або до утворення черг.

Розрідження можуть привести до непродуктивних простоїв окремих каналів або системи в цілому. На ці випадковості, пов’язані з неоднорідністю потоку заявок, і накладаються ще випадковості, пов'язані із затримками обслуговування окремих заявок. Таким чином, процес функціонування системи масового обслуговування являє собою випадковий процес. Щоб дати рекомендації по раціональній організації системи, з'ясувати її пропускну здатність і пред’явити до неї вимоги, необхідно вивчити випадковий процес, що протікає в системі, і описати його математично, Цим і займається теорія масового обслуговування.

Зауважимо, що за останні роки сфера застосування математичних методів теорії масового обслуговування безперервно розширюється і все більше виходить за межі завдань, пов’язаних з «обслуговуючими організаціями» в буквальному сенсі слова. Багато завдання автоматизації виробництва виявляються близькими до теорії масового обслуговування: потоки деталей, що надходять Для виконання над ними різних операцій, можуть розглядатися як «потоки заявок», ритмічність надходження яких порушується за рахунок випадкових причин. Своєрідні задачі теорії масового обслуговування виникають у зв'язку з проблемою організації транспорту і системи повідомлень. Близькими до теорії масового обслуговування виявляються і завдання, які стосуються надійності технічних пристроїв: такі їх характеристики, як середній час безвідмовної роботи, потрібну кількість запасних деталей, середній час простою в зв’язку з ремонтом визначаються методами, безпосередньо запозиченими з теорії масового обслуговування.

Проблеми, подібні до завданням масового обслуговування, постійно виникають у військовій справі. Канали наведення, лінії зв’язку, аеродроми, пристрої для збору та обробки інформації є своєрідні системи масового обслуговування зі своїм режимом роботи і пропускною спроможністю.

Важко навіть перерахувати всі області практики, в яких знаходять застосування методи теорії масового обслуговування. За останні роки вона стала однією з найбільш швидко розвиваються. гілок теорії ймовірностей.

Елементарні знання з теорії масового обслуговування, знання яких необхідно будь-якому інженеру, який займається питаннями організації в області промисловості, народного господарства, зв’язку, а також у військовій справі.

Тема 3. Застосування теорії масового обслуговування при дослідженні транспортних процесів

У багатьох областях виробництва, побутового обслуговування, економіки й фінансів важливу роль відіграють системи спеціального виду, що реалізують багаторазове виконання однотипних завдань. Подібні системи називають системами масового обслуговування (СМО). У якості прикладів СМО у фінансово-економічній сфері можна привести системи, що представляють собою банки, страхові організації, податкові інспекції, аудиторські служби. У сфері виробництва й обслуговування прикладами СМО можуть служити: вантажно-розвантажувальні комплекси (порти, товарні станції), автозаправні станції, логістичні системи, квиткові каси, станції техогляду і т.д.

Кожна СМО включає у свою структуру деяке число обслуговуючих обладнань (одиниць, приладів, ліній), які називають каналами обслуговування. Роль каналів можуть відіграти особи, що виконують ті або інші операції (касири, оператори, продавці, і т.д.), лінії зв'язку, автомашини, крани, ремонтні бригади, залізничні колії, бензоколонки і т.д. Кожна СМО призначена для обслуговування (виконання) деякого потоку заявок (або вимог), що надходять на вхід системи здебільшого не регулярно, а у випадкові моменти часу. Обслуговування заявок, у загальному випадку, також триває не постійне, заздалегідь відоме, а випадковий час. Після обслуговування заявки канал звільняється й готів до приймання наступної заявки. Випадковий характер потоку й часу їх обслуговування приводить до нерівномірної завантаженості СМО: у деякі проміжки часу на вході СМО можуть накопичуватися не обслужені заявки (вони або стають у чергу, або залишають СМО не обслуженими), в інші ж періоди при вільних каналах на вході СМО заявок не буде, що приводить до недовантаження СМО, тобто до простою каналів.

Таким чином, у всякої СМО можна виділити наступні основні елементи:

1) вхідний потік заявок;

2) черга;

3) канали обслуговування;

4) вихідний потік обслужених заявок.

Кожна СМО залежно від своїх параметрів: характеру потоку заявок, числа каналів обслуговування і їх продуктивності, а також від правил організації роботи, має певну ефективність функціонування (пропускною здатністю), що дозволяє їй більш-менш успішно справлятися з потоком заявок. Предметом вивчення теорії масового обслуговування є СМО. Ціль теорії масового обслуговування - вироблення рекомендацій з раціональної побудови СМО, раціональної організації їх роботи й регулюванню потоку заявок для забезпечення високої ефективності функціонування СМО. Для досягнення цієї мети ставляться завдання теорії масового обслуговування, що полягають у встановленні залежностей ефективності функціонування СМО від її організації (параметрів): характеру потоку заявок, числа каналів і їх продуктивності й правил роботи СМО.

У якості характеристик ефективності функціонування СМО можна вибрати три основні групи показників:

1. Показники ефективності використання СМО:

1.1. Абсолютна пропускна здатність СМО - середнє число заявок, яке зможе обслужити СМО в одиницю часу.

1.2. Відносна пропускна здатність СМО - відношення середнього числа заявок, що обслуговуються СМО в одиницю часу, до середнього числа, що зробили за це ж час заявок.

1.3. Середня тривалість періоду зайнятості СМО.

1.4. Коефіцієнт використання СМО - середня частка часу, протягом якого СМО зайнята обслуговуванням заявок, і т.п.

2. Показники якості обслуговування заявок:

2.1. Середній час очікування заявки в черзі.

2.2. Середній час перебування заявки в СМО.

2.3. Імовірність відмови заявки в обслуговуванні без очікування.

2.4. Імовірність того, що заявка, що знову зробила, негайно буде прийнята до обслуговування.

2.5. Закон розподілу часу очікування заявки в черзі.

2.6. Закон розподілу часу перебування заявки в СМО.

2.7. Середнє число заявок, що перебувають у черзі.

2.8. Середнє число заявок, що перебувають у СМО, і т.п.

3. Показники ефективності функціонування пари "СМО - клієнт", де під "клієнтом" розуміють усю сукупність заявок або якесь їхнє джерело. До таких показників належить, наприклад, середній дохід, принесений СМО в одиницю часу, і т.п.

Випадковий характер потоку заявок і тривалості їх обслуговування породжує в СМО випадковий процес.

Випадковим процесом (або випадковою функцією) називається відповідність, при якому кожному значенню аргументу (у цьому випадку - моменту із проміжку часу проведеного досвіду) ставиться у відповідність випадкова величина (у цьому випадку - стан СМО).

Тому для розв'язку завдань теорії масового обслуговування необхідно вивчити випадковий процес, що протікає в СМО, тобто необхідно побудувати й проаналізувати його математичну модель. Математичний аналіз роботи СМО суттєво спрощується, якщо цей випадковий процес задовольняє певним умовам, які будуть розглянуті нижче.

Системи масового обслуговування діляться на типи (або класи) по ряду ознак. По числу каналів СМО підрозділяють на одноканальні (коли є один канал обслуговування) і багатоканальні, точніше n - канальні (коли кількість каналів $n \geq 2$). Далі будемо вважатися, що кожний канал одночасно може обслуговувати тільки одну заявку й, якщо не застережене спеціально, кожна заявка, що перебуває під обслуговуванням, обслуговується тільки одним каналом. Багатоканальні СМО можуть складатися з однорідних каналів, або з різнорідних, що відрізняються тривалістю обслуговування однієї заявки. Практично час обслуговування каналом однієї заявки про $T_{об}$ є безперервною випадковою величиною. Однак за умови абсолютної однорідності вступників заявок і каналів час обслуговування може бути й величиною постійної ($T_{об}$ = const). По дисципліні обслуговування СМО підрозділяють на три класи:

1. СМО з відмовами, у яких заявка, що зробила на вхід СМО в момент, коли всі канали зайняті, одержує "відмову" і залишає СМО ("пропадає"). Щоб ця заявка все-таки була обслужена, вона повинна знову зробити на вхід СМО й розглядатися при цьому як заявка, що зробила вперше. Прикладом СМО з відмовами може служити робота АТС: якщо набраний телефонний номер (заявка, що зробила на вхід) зайнятий, то заявка одержує відмову, і, щоб додзвонитися по цьому номеру, слід його набрати ще раз (заявка надходить на вхід як нова).

2. СМО з очікуванням (необмеженим очікуванням або чергою). У таких системах заявка, що зробила в момент зайнятості всіх каналів, стає в чергу й очікує звільнення каналу, який прийме її до обслуговування. Кожна заявка, що зробила на вхід, зрештою буде обслужена. Такі СМО часто зустрічаються в торгівлі, у сфері побутового й медичного обслуговування, на підприємствах (наприклад, обслуговування верстатів бригадою наладчиків).

3. СМО змішаного типу (з обмеженим очікуванням). Це такі системи, у яких на перебування заявки в черзі накладаються деякі обмеження. Ці обмеження можуть накладатися на довжину черги, тобто максимально можливе число заявок, які одночасно можуть перебувати в черзі. Як приклад такої системи можна привести майстерню з ремонту автомобілів, що має обмежену по розмірах стоянку для несправних машин, що очікують ремонту. Обмеження очікування можуть стосуватися часу перебування заявки в черзі, по витіканню якого вона виходить із черги й залишає систему, або стосуватися загального часу перебування заявки в СМО (тобто сумарного часу перебування заявки в черзі й під обслуговуванням).

У СМО з очікуванням і в СМО змішаного типу застосовуються різні схеми обслуговування заявок із черги. Обслуговування може бути впорядкованим, коли заявки із черги обслуговуються в порядку їх вступу в систему, і неупорядкованим, при якому заявки із черги обслуговуються у випадковому порядку. Іноді застосовується обслуговування із пріоритетом, коли деякі заявки із черги вважаються пріоритетними й тому обслуговуються в першу чергу.

По обмеженню потоку заявок СМО діляться на замкнені й відкриті. Якщо потік заявок обмежений і заявки, що покинули систему, можуть у неї вертатися, то СМО є замкненої, а якщо ні, то - відкритої. Класичним прикладом замкненої СМО служить робота бригади наладчиків у цеху. Верстати є джерелами заявок на обслуговування, і їх кількість обмежена, наладчики - канали обслуговування. Після проведення ремонтних робіт зламаний верстат знову стає джерелом заявок на обслуговування. У відкритої СМО характеристики потоку заявок не залежать від того, у якому стані сама СМО (скільки каналів зайняте). У замкненої СМО - залежать. Так, у розглянутому вище прикладі інтенсивність потоку "заявок" з боку верстатів (тобто кількість заявок в одиницю часу) залежить від того, скільки їх несправне й чекає налагодження.

По кількості етапів обслуговування СМО діляться на однофазні й багатофазні системи. Якщо канали СМО однорідні, тобто виконують ту саму операцію обслуговування, то такі СМО називаються однофазними. Якщо канали обслуговування розташовані послідовно й вони неоднорідні, тому що виконують різні операції обслуговування (тобто обслуговування складається з декількох послідовних етапів або фаз), то СМО називається багатофазної. Прикладом роботи багатофазної СМО є обслуговування автомобілів на станції технічного обслуговування (мийка, діагностування і т.д.). Далі будемо розглядати тільки однофазні СМО.

Випадкові процеси з дискретними станами

Випадковий процес, що протікає в СМО, полягає в тому, що система у випадкові моменти часу переходить із одного стану в інше: міняється число зайнятих каналів, число заявок, що коштують у черзі, і т.п. Це означає, що СМО являє собою фізичну систему дискретного типу з кінцевим (або рахунковим) множиною станів, а перехід системи з одного стану в інше відбувається стрибком, у момент, коли здійснюється якась подія (прихід нової заявки, звільнення каналу, відхід заявки із черги й т.п.).

Розглянемо фізичну систему *X* з не більш, ніж рахунковою множиною станів $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

У будь-який момент часу t система X може бути в одному із цих станів. Позначимо $p_k(t)$ $(k=1,2,\ldots,n,\ldots)$ імовірність того, що в момент *t* система буде перебувати в стані k x . Очевидно, для будь-якого *t*

$$\sum_k p_k(t) = 1 \tag{3.1}$$

Випадкові процеси з дискретними станами (не більш, ніж рахунковою множиною станів) бувають двох типів: з дискретним або безперервним часом. Перші відрізняються тим, що переходи зі стану в стан можуть відбуватися тільки в строго певні, розділені кінцевими інтервалами моменти часу $t_1, t_2, \ldots$ Випадкові процеси з безперервним часом відрізняються тим, що перехід системи зі стану в стан можливий у будь-який момент часу *t*.

Як приклад дискретної системи *X* , у якій протікає випадковий процес із безперервним часом, розглянемо групу з *n* літаків, що роблять наліт на територію супротивника, що обороняється системою ПВО. Ні момент виявлення групи, на момент початку роботи пускових установок системи ПВО заздалегідь не відомі. Різні стани системи відповідають різному числу уражених літаків у складі групи:

x_0 - не знищене жодного літака,

x_1 - знищений рівно один літак,

x_n - знищені всі n літаків.

Схема можливих станів системи й можливих переходів зі стану в стан показано на рисунку 3.1.

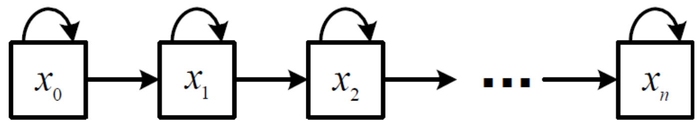

Рисунок 3.1 – Граф станів

Стрілками показані можливі переходи системи зі стану в стан. Закруглена стрілка, спрямована зі стану x_k який означає, що система може не тільки перейти в сусідній стан x $_{k+1}$, але й залишитися в колишньому. Для даної системи характерні необоротні переходи (знищені літаки не відновлюються); у зв'язку із цим зі стану x_n ніякі переходи в інші стани вже неможливі. Відзначимо, що граф станів на рис. 1 показує тільки переходи зі стану в сусідній стан і не показує "перескоки" через стан: ці перескоки відкинуті як практично неможливі. Дійсно, для того щоб система "перескочила" через стан, потрібно, щоб строго одночасно були уражено два або більш літака, а ймовірність такої події дорівнює нулю. Випадкові процеси, що протікають у СМО, як правило, являють собою процеси з безперервним часом. Це зв'язане з випадковістю потоку заявок. На противагу системі з необоротними переходами, розглянутої в попередньому прикладі, для СМО характерні оборотні переходи: зайнятий канал може звільнитися. Як приклад розглянемо одноканальну СМО (наприклад, одну телефонну лінію), у якій заявка, що застала канал зайнятим, не стає в чергу, а залишає систему (одержує "відмову"). Це - дискретна система з безперервним часом і двома можливими станами:

x_0- канал вільний,

x_1 - канал зайнятий.

Переходи зі стану в стан оборотні. Граф станів показано на рис. 3.2.

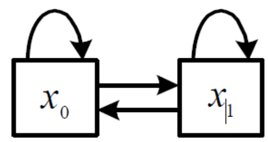

Рисунок 3.2 - Граф станів

Для того щоб описати випадковий процес, що протікає в дискретній системі з безперервним часом, насамперед потрібно проаналізувати причини, що викликають перехід системи зі стану в стан. Для СМО основним фактором, що обумовлюють процеси, що протікають у ній, є потік заявок. Тому математичний опис будь-який СМО починається з потоку заявок.

Під потоком подій розуміється послідовність однорідних подій, що випливають одне за іншим у якісь випадкові моменти часу (наприклад, потік викликів на телефонній станції, потік покупців, потік рекомендованих листів, що надходять у поштову відділення й т.п.). Потік характеризується інтенсивністю λ - частотою появи подій або середнім числом подій, що надходять у СМО в одиницю часу. Потік подій називається регулярним, якщо події випливають одне за іншим через певні рівні проміжки часу. Наприклад, потік виробів на конвеєрі складального цеху (з постійною швидкістю руху) є регулярним. Такий потік порівняно рідко зустрічається в реальних системах, але становить інтерес як граничний випадок. Типовим для системи масового обслуговування є випадковий потік заявок. У цьому пункті ми розглянемо потоки подій, що володіють деякими особливо простими властивостями. Для цього введемо ряд визначень.

1. Потік подій називається стаціонарним, якщо його імовірнісні характеристики не залежать від часу. Зокрема, інтенсивність стаціонарного потоку є величина постійна: $\lambda\ (t) = \lambda$. Фактичне число подій, що з'являється в одиницю часу, постійно, потік неминуче (якщо тільки він не регулярний) має якісь випадкові згущення й розрідження. Важливо, що для стаціонарного потоку ці згущення й розрідження не

носять закономірного характеру: на одну ділянка довжини 1 може потрапити більше, на іншій - менше подій, але середнє число подій, що доводиться на одиницю часу, постійно й від часу не залежить.

2. Потік подій називається потоком без післядії, якщо для будь-яких двох непересічних ділянок часу τ_1 і τ_2 число подій, що попадають на один з них, не залежить від числа подій, що потрапили на іншій. По суті, це означає, що події, що утворюють потік, з'являються в ті або інші моменти часу незалежно друг від друга, викликані кожне своїми власними причинами. Наприклад, потік пасажирів, що входять у метро, практично не має післядії. А потік покупців, що відходять із покупками від прилавка, уже має післядію (хоча б тому, що інтервал часу між окремими покупцями не може бути менше, чим мінімальний час обслуговування кожного з них).

3. Потік подій називається ординарним, якщо ймовірність влучення на малий (елементарний) ділянка часу Δt двох і більш подій незначно мала в порівнянні з імовірністю влучення одного події. Інакше кажучи, потік подій ординарний, якщо події з'являються в ньому поодинці, а не групами. Наприклад, потік поїздів, що підходять до станції, ординарний, а потік вагонів - неординарний.

Потік подій називається найпростішим (або стаціонарним пуассонівським), якщо він одночасно стаціонарен, ординарний і не має післядії. Назва "найпростіший" пояснюється тим, що СМО з найпростішими потоками має найбільш простий математичний опис. Між іншим, найпростіший, на перший погляд, регулярний потік не є "найпростішим", тому що має післядію: моменти появи подій у такому потоці зв'язані твердою, функціональною залежністю. Без спеціальних зусиль по підтримці його регулярності такий потік звичайно не створюється. Найпростіший потік у якості граничного виникає в теорії випадкових процесів настільки ж природно, як у теорії ймовірностей нормальний розподіл виходить у якості граничного для суми випадкових величин: при накладенні (суперпозиції) достатнього великого числа n незалежних, стаціонарних і ординарних потоків (порівнянних між собою по інтенсивностям і λ (і = 1,2,...,n)) виходить потік, близький до найпростішого з інтенсивністю λ , дорівнює сумі інтенсивностей вхідних потоків, тобто

$$\lambda = \sum_{n}^{i=1} \lambda_i \tag{3.2}$$

Назва "пуассонівский" пов'язане з тим, що при дотриманні 1 - 3 число подій, що попадають на будь-який фіксований інтервал часу, буде розподілено за законом Пуассона. Покажемо це за допомогою елементарних міркувань. Розглянемо на осі часу O_t найпростіший потік подій як необмежену послідовність випадкових крапок (рис. 3.3).

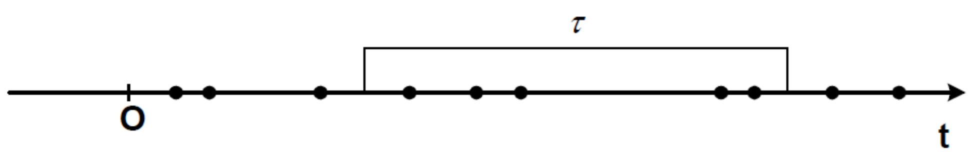

Рисунок 3.3 - Найпростіший потік

Нехай випадкова величина X виражає число подій (крапок), що попадають на довільний проміжок часу τ . Покажемо, що випадкова величина X розподілена за законом Пуассона. Розіб'ємо подумки часовий проміжок τ на n рівних елементарних відрізків $\Delta t = \tau / n$. Математичне очікування числа подій, що попадають на елементарний відрізок Δt , рівно $\lambda \cdot \Delta t$, де λ - інтенсивність потоку (тому що на одиницю довжини попадає в середньому λ крапок). Згідно із властивістю ординарності потоку можна зневажити ймовірністю влучення на елементарний (тобто малий) відрізок двох і більш подій. Тому математичне очікування $\lambda \cdot \Delta t$ числа крапок, що попадають на ділянку Δt , буде приблизно (з точністю до нескінченно малих вищого порядку при $\Delta t \to 0$) дорівнює ймовірності влучення на нього однієї крапки (або, що в наших умовах рівнозначно, хоча б однієї). Будемо вважати елементарний відрізок Δt "зайнятим", якщо в ньому з'явилася подія потоку, і "вільним", якщо не з'явилося. Імовірність того, що відрізок $\Delta t = \tau/n$ виявиться "зайнятим", рівна $\lambda \Delta t = \lambda\tau/n$; імовірність того, що він виявиться "порожнім", рівна $1-\lambda\tau/n$ (чим менше Δt , тем точніше рівності). Число зайнятих елементарних відрізків, тобто число X подій на всьому тимчасовому проміжку τ , можна розглядати як випадкову величину, що має біноміальний закон розподілу (з параметрами n і $p = \lambda\tau/n$), а, отже, по формулі Бернуллі.

$$P(X = m) = C_n^m \left(\frac{\lambda\tau}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda\tau}{n}\right)^{n-m} \tag{3.3}$$

(Необхідне для виникнення біноміального закону умова незалежності випробувань, у цьому випадку - незалежність n елементарних відрізків щодо події "відрізок зайнятий", забезпечується властивістю відсутності післядії потоку). Відомо, що при необмеженому збільшенні числа елементарних відрізків Δt, тобто при $n \to \infty, p = \frac{\lambda\tau}{n} \to 0$ і постійному значенні добутку $np = n\frac{\lambda\tau}{n} = \lambda\tau$ біноміальний розподіл прагне до розподілу Пуассона з параметром $a = \lambda\tau$

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} \tag{3.4}$$

Від цієї властивості закону Пуассона – виражати біноміальний розподіл при великій кількості досвідів і малої ймовірності події – відбувається його назва, часто застосовуване в підручниках статистики: закон рідких явищ. Зокрема, імовірність того, що за час τ не відбудеться жодного події ($m = 0$), дорівнює

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} \tag{3.5}$$

Математичний аналіз роботи СМО суттєво спрощується, якщо процес цієї роботи - марковский. Випадковий процес, що протікає в системі *S*, називається марковским (або процесом без післядії), якщо він має наступну властивість: для кожного моменту часу t_0 імовірність будь-якого стану системи в майбутньому (при $t_0 > t$) залежить тільки від її стану в сьогоденні (при $t_0 = t$) і не залежить від того, коли і яким образом система перейшла в цей стан, тобто не залежить від її поведінки в минулому (при $t_0 < t$). Раніше ми вже згадували про аналогічну властивість деяких потоків подій (відсутності післядії). Не треба розуміти марковськиє властивість випадкового процесу як повну незалежність "майбутнього" від "минулого"; ні, у загальному випадку "майбутнє" залежить від "сьогодення", тобто ймовірності $p_i(t)$ при $t > t_0$ залежать від того, у якому стані й s перебуває система в сьогоденні (при $t =$); саме ж це "сьогодення" залежить від "минулого", від того, як поводилася система *S* при $t < t_0$. Це можна сформулювати в такий спосіб: для марковського випадкового процесу "майбутнє" залежить від "минулого" тільки через "сьогодення". При фіксованому "сьогоденні" умовні ймовірності всіх станів системи в "майбутньому" не залежать від передісторії процесу, тобто від того, коли і як система *S* до моменту t_0 прийшла в стан s_i.

На практиці марковські процеси в чистому виді звичайно не зустрічаються, але нерідко доводиться мати справа із процесами, які можна приблизно вважати марковськими, тобто такі, для яких впливом "передісторії" можна зневажити. Крім того, існують приймання, що дозволяють зводити немарковські випадкові процеси до марковських. Наприклад, можна уводити до складу параметрів, що характеризують справжній стан системи, ті параметри з минулого, від яких залежить майбутнє (у цьому випадку говорять про "марковізації" випадкового процесу). Правда, така процедура нерідко приводить до сильного ускладнення математичного апарата. Існують і інші приймання відомості немарковських випадкових процесів до марковських.

СМО з відмовами.

В якості показників ефективності СМО з відмовами будемо розглядати: A - абсолютну пропускну здатність СМО, тобто середнє число заявок, що обслуговуються в одиницю часу; Q - відносну пропускну здатність, тобто середню частку заявок, що обслуговуються системою (або ймовірність того, що заявка буде обслужена); $P_{отк}$ - імовірність відмови - імовірність того, що заявка покине СМО необслуженої; k - середнє число зайнятих каналів (для багатоканальної системи).

1.Одноканальна система з відмовами.

Розглянемо наступне завдання. Є один канал, на який надходить потік заявок з інтенсивністю λ . Потік обслуговувань має інтенсивність μ . Знайти граничні ймовірності станів системи й показники її ефективності. Тут і надалі будемо припускати, що всі потоки подій, що переводять СМО зі стану в стан, - найпростіші. До них ставиться й потік обслуговувань - потік заявок, що обслуговуються одним безупинно зайнятим каналом. Оскільки середній час між двома довільними сусідніми подіями найпростішого потоку назад по величині інтенсивності потоку, а для потоку обслуговувань цей час є час обслуговування (однієї заявки), той середній час обслуговування $\bar{T}_{об} = 1/\mu$.

Система *S* (СМО) має два стани: S_0 - канал вільний, S_1 - канал зайнятий. Розмічений граф станів представлено на малюнку 8.

У граничному стаціонарному режимі система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (\lambda_{01}+\lambda_{02})\,p_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 \\ (\lambda_{10}+\lambda_{13})\,p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 \\ (\lambda_{20}+\lambda_{23})\,p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 \\ (\lambda_{31}+\lambda_{32})\,p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 \end{cases}. \tag{3.6}$$

для ймовірностей станів має вигляд (див. правило складання таких рівнянь)

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \mu p_1 = \lambda p_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

т.е. система вироджується в одне рівняння. Враховуючи нормувальна умова $p_0+p_1 = 1$, знайдемо з отриманої граничні ймовірності станів:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \tag{3.8}$$

Граничні ймовірності станів p_0 і p_1 можна виразити через середні часи простою каналу і обслуговування однієї заявки. Для цього у формули для ймовірностей слід підставити $\mu = 1/\bar{T}_{об}$ або $\lambda = 1/\bar{T}_{пр}$ У результаті одержимо

$$p_0 = \frac{T_{пр}}{T_{об} + T_{пр}}, \quad p_1 = \frac{T_{об}}{T_{об} + T_{пр}} \tag{3.9}$$

Граничні ймовірності виражають середній відносний час перебування системи в стані S_0 (коли канал вільний) і S_1 (коли канал зайнятий), тобто визначають відповідно відносну пропускну здатність Q системи й імовірність відмови $P_{отк}$:

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \tag{3.10}$$

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \tag{3.11}$$

Багатоканальна система з відмовами (завдання Эрланга). Тут ми розглянемо одну з перших за часом, "класичних" завдань теорії масового обслуговування; це завдання виникло із практичних потреб телефонії й була вирішена в 1909 р. датським інженером математиком А.К. Ерлангом. Завдання ставиться так: є n каналів (ліній зв'язку), на які надходить потік заявок з інтенсивністю λ . Потік обслуговувань кожного каналу має інтенсивність μ . Знайти граничні ймовірності станів системи й показники її ефективності. Система S (СМО) має наступні стани (нумеруємо їх по числу заявок, що перебувають у системі): S_0 , S_1 ,…, Sn , де S_k - стан системи, коли в ній перебуває k заявок, тобто зайняте k каналів. Граф станів СМО відповідає процесу загибелі й розмноження.

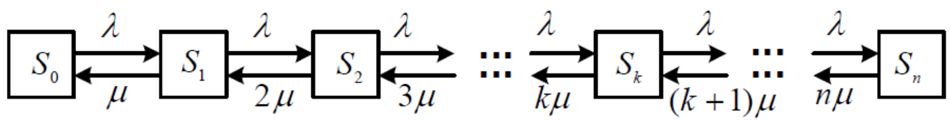

Рисунок 3.4 – Граф станів СМО

Потік заявок послідовно переводить систему з будь-який лівого стану в сусіднє праве з однієї й тою же інтенсивністю λ . Інтенсивність же потоку обслуговувань, що переводять систему з будь-якого правого стану в сусіднє ліве, постійно міняється залежно від стану. Дійсно, якщо СМО перебуває в стані S_2 (два канали зайняті), те вона може перейти в стан S_1 (один канал зайнятий), коли закінчить обслуговування або перший, або другий канал, тобто сумарна інтенсивність їх потоків обслуговувань буде 2μ . Аналогічно сумарний потік обслуговувань, що переводить СМО зі стану S_3 (три канали зайняті) в S_2 , буде мати інтенсивність 3μ , тобто може звільнитися кожної із трьох каналів, і т.д.

З формулі для схеми загибелі й розмноження

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}} \right)^{-1} \qquad (3.12)$$

одержимо для граничної ймовірності стану

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1} \tag{3.13}$$

де члени розкладання $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda^2}{2!\mu^2}, \ldots, \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}$ - коефіцієнти при p_0 у вираженнях для ймовірностей $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Помітимо, що у формулі розрахунку p_0 інтенсивності λ і μ входять не окремо , а тільки у вигляді відносини λ/μ . Позначимо $\lambda / \mu = \rho$ і будемо називати величину ρ наведеною інтенсивністю потоку заявок або інтенсивністю навантаження каналу. Вона виражає середнє число заявок, що приходять за середній час обслуговування однієї заявки. Користуючись цим позначенням, перепишемо формулу розрахунку p_0 у вигляді:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \tag{3.14}$$

При цьому

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \tag{3.15}$$

Ці формули для граничних ймовірностей одержали назви формул Эрланга на честь засновника теорії масового обслуговування. Імовірність відмови СМО є гранична ймовірність того, що всі n каналів системи будуть зайняті, тобто

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \tag{3.16}$$

Звідси знаходимо відносну пропускну здатність - імовірність того, що заявка буде обслужена:

$$Q = 1 - P_{\text{откм}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \tag{3.17}$$

Абсолютну пропускну здатність одержимо, множачи інтенсивність потоку заявок λ на Q :

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right) \tag{3.18}$$

Залишилося тільки знайти середнє число зайнятих каналів k . Цю величину можна було би знайти "прямо", як математичне очікування дискретної випадкової величини з можливим значеннями 0,1,..., n і ймовірностями цих значень $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\bar{k} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots + n \cdot p_n = \sum_{n}^{k=0} k p_k \tag{3.19}$$

Підставляючи сюди вираження p_i для p_k і виконуючи відповідні перетворення, ми, зрештою , одержали б формулу для k . Однак середнє число зайнятих каналів можна знайти простіше, якщо врахувати, що абсолютна пропускна здатність A системи є не що інше, як інтенсивність потоку обслужених системою заявок (в одиницю часу). Тому що кожний зайнятий канал обслуговує в середньому μ заявок (в одиницю часу), те середнє число зайнятих каналів

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} \tag{3.20}$$

або, враховуючи

$$\bar{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right) \tag{3.21}$$

Тема 4. Аналітична оцінка надійності елементів транспортних систем

Ефективність функціонування транспортних систем (ТС) у значній мірі залежить от надійності як окремих технічних засобів, що входять у систему, так і елементів, що забезпечують взаємодію між ними. Слід зазначити, що незважаючи на значні зусилля в області підвищення надійності ТС рівень їх надійності залишається недостатньо високим і не задовольняє всі зростаючим вимогам. Недостатня надійність елементів і обладнань не тільки призводить до значних простоїв систем, але й здорожує вартість їх експлуатації. Крім того, відмови технічних обладнань можуть привести до аварійних ситуацій, наслідку яких важко представить. Основними причинами, що визначають підвищену увагу до проблем надійності, є:

- підвищення складності обладнань і поява складних систем;
- більш повільний ріст рівня надійності комплектуючих елементів у порівнянні з ростом числа елементів в обладнаннях і системах;
- підвищення важливості виконуваних елементами й обладнаннями функції і як наслідок цього, підвищення вимог до їхньої надійності;
- ускладнення умов експлуатації систем.

Теорія надійності встановлює закономірності виникнення відмов і відновлення працездатності системи і її елементів, розглядає вплив зовнішніх і внутрішніх впливів на процеси в системах, створює основи розрахунків надійності й прогнозування відмов, вишукує способи підвищення надійності при проектуванні систем і елементів, а також способи збереження надійності при експлуатації. Теорія надійності вивчає:

- критерії й кількісні характеристики надійності;
- методи аналізу надійності елементів і систем;

- методи синтезу елементів і систем із заданою надійністю;
- методи підвищення надійності елементів і систем на етапах їх проектування й експлуатації.
- методи випробування елементів і систем на надійність.

Базовими поняттями в теорії надійності є поняття елемента, системи, компонента.

Елемент, об'єкт: будь-яка частина, компонент, обладнання, підсистема, функціональний модуль, устаткування або система, яка може бути розглянута як самостійна одиниця. Під елементом розуміють частина системи, яка має самостійну характеристику надійності, використану при розрахунках надійності. і виконує певну приватну функцію в інтересах системи. Примітка: елемент може являти собою апаратний засіб, програмне забезпечення або те, і інше. Він може, в окремих випадках, включати людей.

Система: сукупність взаємозалежних і взаємодіючих елементів. З погляду надійності система повинна мати.

- певну мету, виражену у вигляді вимог до функціонування системи;
- задані умови експлуатації;
- ієрархічну структуру.

Компонент: елемент, розглянутий на найнижчому ієрархічному рівні при аналізі системи. Поняття "система" є деякою мірою умовним. Залежно від об'єктів дослідження, від тих завдань, які поставлені перед фахівцями, у поняття "система" можуть попадати різні сукупності об'єктів. Наприклад, у якості систем можуть розглядатися система керування дорожнім рухом.

Усі системи, розглянуті в теорії надійності, можуть бути розділені на відновлювані. у яких після появи відмови відбувається заміна об'єкта, що відмовив, з метою відновлення їх функціонування і не відновлюваності у яких така заміна не проводиться. Елементи, використовувані в системах, можна розділити на первинні елементи (типу радіоелементів, двигунів і т.д.) і елементи, що полягають із первинних елементів. Як правило, або шляхом аналізу фізичних процесів в елементах або шляхом проведення випробувань, або з досвіду експлуатації визначають характеристики надійності первинних елементів. Для інших елементів, у тому числі й для систем, характеристики надійності визначаються з урахуванням характеристик надійності первинних елементів різними розрахунковими методами. Кожна група елементів має свої особливості щодо надійності, що приводить до необхідності враховувати ці особливості при проведенні розрахунків показників надійності. Елементи й системи, з погляду надійності, можуть перебувати в чотирьох станах: справному, несправному, працездатному, непрацездатному, граничному. У відповідності зі стандартами:

Справний стан це стан об'єкта, при якому він відповідає всім вимогам нормативно-технічної й (або) конструкторської (проектної) документації.

Несправний стан це стан об'єкта, при якому він не відповідає хоча б одному з вимог нормативнотехничної і (або) конструкторської (проектної) документації.

Працездатний стан цей стан об'єкта, при якому значення всіх параметрів, що характеризують здатність виконувати задані функції, відповідають вимогам нормативнотехничної і (або) конструкторської (проектної) документації.

Непрацездатний стан це стан об'єкта, при якому значення хоча б одного параметра, що характеризує здатність виконувати задані функції, не відповідають вимогам нормативно-технічної й (або) конструкторської (проектної) документації.

Граничний стан цей стан об'єкта, при якому його подальша експлуатація неприпустима або недоцільна, або відновлення його працездатного стану неможливо або недоцільно.

Поняття працездатності є одним з основних понять теорії надійності. Перехід з одного стану в інше відбувається в результаті подій названих відмовою й ушкодженням.

Ушкодження ця подія, що полягає в порушенні справного стану об'єкта при збереженні його працездатного стану. Відмова ця подія, що полягає в порушенні працездатного стану системи. Ресурсна відмова це відмова, у результаті якого об'єкт досягає граничного стану. Незалежна відмова (первинна відмова) це відмова, не обумовлена іншими відмовами. Залежна відмова (вторинна відмова) це відмова, обумовлена іншими відмовами. Раптова відмова це відмова, що характеризується стрибкоподібним зміною значень одного або декількох параметрів об'єкта. Поступова відмова це відмова, що виникла в результаті поступової зміни значень одного або декількох параметрів об'єкта. Збій це відмова, що самоусувається, або однократна відмова, що усувається незначним втручанням оператора. Перемежована відмова це багаторазово виникаючий само відмова, що усувається, того самого характеру. Явна відмова це відмова, що виявляється візуально або штатними методами й засобами контролю й діагностування при підготовці об'єкта до застосування або в процесі його застосування по призначенню. Схована відмова відмова, що не виявляється візуально або штатними методами й засобами контролю й діагностування але, що виявляється при проведенні технічного обслуговування або спеціальними методами діагностики. Конструктивна відмова це відмова, що виникла через, зв'язанийний з недосконалістю або порушенням установлених правил і (або) норм проектування й конструювання.

Експлуатаційна відмова це відмова, що виникла через , пов'язаної з порушенням установлених правил і (або) умов експлуатації. Деградаційна відмова це відмова, обумовлена природніми процесами старіння, зношування, корозії й утоми при дотриманні всіх установлених правил і (або) норм проектування, виготовлення й експлуатації. На підставі понять працездатності й відмови можна визначити дуже важливі для теорії надійності поняття: безвідмовність, довговічність, ремонтопридатність, збереженість. Безвідмовність властивість системи або елемента безупинно зберігати працездатність протягом деякого часу або деякого наробітку. Довговічність властивість об'єкта зберігати працездатний стан до настання граничного стану при встановленій системі технічного обслуговування й ремонту. Ремонтопридатність властивість об'єкта, що полягає в пристосованості до підтримки й відновленню працездатного стану шляхом технічного обслуговування й ремонту. Збереженість це властивість об'єкта зберігати в заданих межах значення параметрів, що характеризують здатності об'єкта виконувати необхідні функції, протягом і після зберігання й (або) транспортування. Ще раз, надійність це властивість об'єкта зберігати в часі у встановлених межах значення всіх параметрів, що характеризують здатність виконувати необхідні функції в заданих режимах і умовах застосування, технічного обслуговування, зберігання й транспортування. Надійність є комплексною властивістю, яка, залежно від призначення об'єкта й умов його застосування, може включати безвідмовність, довговічність, ремонтопридатність і збереженість або певні комбінації цих властивостей. Наприклад, для не ремонтованих об'єктів основною властивістю є безвідмовність. Для ремонтованих об'єктів одним з найважливіших властивостей, що входять у визначення надійності, може бути ремонтопридатність. Для об'єктів, які є потенційними джерелами небезпеки, важливими поняттями є безпека й живучість.

Визначення кількісних характеристик або показників надійності необхідно для того, щоб:

ураховувати надійність елементів і обладнань при їхнім застосуванні в різних системах;

формулювати вимоги по надійності до проектованих обладнань або систем;

порівнювати різні варіанти побудови системи;

розраховувати необхідний комплект запасних частин для відновлення систем, строки їх служби.

Показник надійності це кількісна характеристика одного або декількох властивостей, що становлять надійність об'єкта. Розрізняють одиничні, комплексні, розрахункові, експериментальні, експлуатаційні й екстрапольовані показники надійності, визначення яких наведені нижче.

Одиничний показник надійності це показник надійності, що характеризує одне із властивостей, що становлять надійність об'єкта. Комплексний показник надійності це показник надійності, що характеризує кілька властивостей, що становлять надійність об'єкта. Розрахунковий показник надійності це показник надійності, значення якого визначаються розрахунковим методом. Експериментальний показник надійності це показник надійності, крапкова або інтервальна оцінка якого визначається за даними випробувань. Експлуатаційний показник надійності це показник надійності, крапкова або інтервальна оцінка якого визначається за даними експлуатації. Екстрапольований показник надійності це показник надійності, крапкова або інтервальна оцінка яка визначається на підставі результатів розрахунків, випробувань і(або) експлуатаційних даних шляхом екстраполювання на іншу тривалість експлуатації й інші умови експлуатації.

Оскільки відмови й збої елементів є випадковими подіями, то теорія ймовірностей і математична статистика є основним апаратом, використовуваним при дослідженні надійності, а самі характеристики надійності повинні вибиратися із числа показників прийнятих у теорії ймовірностей. Усі показники надійності можуть визначатися аналітично по формулах, отриманих на основі теорії імовірності, і за результатами випробувань або спостережень, тобто у вигляді статистичних оцінок показників надійності, отриманим на основі методів математичної статистики. Для об'єктів і систем вибір характеристик надійності повинен здійснюватися з урахуванням особливостей їх функціонування. У теорії надійності розглядаються характеристики, що визначають кожне з основних властивостей надійності або їх сукупності. Тому, розглянемо на початку показники надійності, що дозволяють оцінити безвідмовність елементів або систем.

Показники безвідмовності: імовірність безвідмовної роботи, інтенсивність відмов, параметр потоку відмов, середній наробіток до відмови, середній наробіток на відмову, середній параметр потоку відмов. Крім названих показників у технічній літературі широко використовується ще один показник частота відмов. Розглянемо показники безвідмовності більш докладно. Ймовірність безвідмовної роботи імовірність того, що в межах заданого наробітку на відмову (у заданому інтервалі часу t відмова об'єкта не виникне. Ця характеристика пов'язана з функцією розподілу часу безвідмовної роботи наступним співвідношенням:

$$P(t) = 1 - Q(t) \tag{4.1}$$

де $P(t)$ імовірність безвідмовної роботи об'єкта; $Q(\mathrm{t})$ функція розподілу часу безвідмовної роботи, яка являє собою ймовірність появи відмови протягом часу t.

Очевидно, що $0 \le P(t) \le 1, P(0) = 1, P(\infty) = 0$

Слід зазначити, що функція $P(t)$ є монотонно убутною функцією (надійність у процесі експлуатації може тільки зменшуватися), а функція $Q(t)$ монотонно зростаючою функцією.

Для визначення величини $P(t)$ використовується наступна статистична оцінка:

$$P^*(t) = \frac{N_0 - n(t)}{N_0} \tag{4.2}$$

де N_0 - число виробів, поставлених на випробування або на експлуатацію; $n(t)$ - число виробів, що відмовили протягом часу t.

Аналоічно ймовірності безвідмовної роботи визначається ймовірність без збійної роботи. Імовірність без збійної роботи ймовірність того, що в заданому інтервалі часу t будуть відсутні збої системи або елементів. Ця характеристика пов'язана з функцією розподілу часу без збійної роботи в такий спосіб:

$$P_C(t) = 1 - Q_C(t) \tag{4.3}$$

де $P_c(t)$ - імовірність відсутності збою; $Q_c(t)$ - функція розподілу часу без збійної роботи, яка являє собою ймовірність появи збою протягом часу t.

Для визначення величини $P_c(t)$ використовується наступна статистична оцінка:

$$P_C^*(t) = \frac{N_0 - n_C(t)}{N_0} \tag{4.4}$$

де $n_c(t)$ - число виробів, у яких відбувся збій протягом часу t.

Так як показники безвідмовної роботи й без збійної роботи визначаються по однакових формулах, то надалі показники без збійної роботи окремо виділятися не будуть.

Частота відмов $a(t)$ являє собою щільність розподілу часу безвідмовної роботи або похідну від імовірності безвідмовної роботи. Тому частота відмов буде рівна

$$a(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt} \tag{4.5}$$

Для визначення величини a(t) використовується наступна статистична оцінка:

$$a^*(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t} \tag{4.6}$$

де $n(\Delta t)$ - число виробів, що відмовили, в інтервалі часу від $(t - \Delta t / 2)$ до $(t + \Delta t / 2)$

Між частотою відмов, імовірністю безвідмовної роботи й імовірністю появи відмови є наступна залежності:

$$Q(t) = \int_0^t a(x)dx; \quad P(t) = 1 - \int_0^t a(x)dx \tag{4.7}$$

Проста залежність між величиною $a(t)$ і величинами $Q(t)$ і $P(t)$ є характеристикою частоти відмов. Аналогічно можна визначити й частоту збоїв.

Інтенсивність відмов це умовна щільність імовірності виникнення відмови об'єкта, обумовлена за умови, що до розглянутого моменту часу відмова не виникла. Інакше кажучи, це умовна щільність розподілу часу безвідмовної роботи для моменту часу t за умови, що до моменту часу г відмова об'єкта не відбулася.

Таким чином, відповідно до визначення

$$\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)} \tag{4.8}$$

Тому що $P(t)$ <1. те. очевидно, завжди виконується співвідношення

$$\lambda(t) \geq a(t) \tag{4.9}$$

Для визначення величини $\lambda(t)$ використовується наступна статистична оцінка:

$$\lambda^*(t) = \frac{n(\Delta t)}{N_{cp} \cdot \Delta t} \tag{4.10}$$

$N_{cp} = \left(N_I + N_{I+1}\right)/2$ - середнє число справне працюючих виробів в інтервалі часу Δt. Якщо $P(t) \geq 0{,}99,$ То $a(t) \approx \lambda(t)$ помилка, що допускається, становить не більш 1 % і як правило, не перевищує помилок статистичного визначення величин $a(t)$ і $\lambda(t)$.

Можна відзначити відмінність між величинами $a(t)$ і $\lambda(t)$.

Імовірність $a(t)$dt характеризує ймовірність відмови системи або елемента за інтервал часу (t, t + dt), узятих довільним образом із групи таких же систем або елементів, причому невідомо, у якому стані (працездатному або непрацездатному) перебуває елемент або система.

Імовірність $\lambda(t)$dt характеризує ймовірність відмови системи або елемента за інтервал (t, t + dt), узятих із групи елементів або систем, які залишилися працездатними до моменту часу t. Визначимо зв'язок між імовірністю безвідмовної роботи й інтенсивністю відмов. Інтегруючи вираження, маємо:

$$-\int_0^t \lambda(x)dx = \ln P(t), \quad P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right] \tag{4.11}$$

Ця залежність встановлює зв'язок, між імовірністю безвідмовної роботи об'єкта і його інтенсивністю відмов у загальному виді може розглядатися як основний закон надійності. Наприклад, якщо $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, то

$$P(t) = e^{-\lambda t} \text{ та } a(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \tag{4.12}$$

Розглянутий випадок досить широко зустрічається на практиці. а наведене співвідношення характеризує експонентний розподіл часу безвідмовної роботи.

Середній наробіток до відмови T являє собою математичне очікування наробітку до першої відмови. Середній наробіток між відмовами це наробіток об'єкта від закінчення відновлення його працездатного стану після відмови до виникнення наступної відмови. У такий спосіб

$$T = \int_0^\infty ta(t)dt \tag{4.13}$$

Це вираження шляхом інтегрування вроздріб може бути перетворене в такий спосіб:

$$T = \int_0^\infty ta(t)dt = -\int_0^\infty t \cdot P \cdot (t) = t \cdot P(t)_0^\infty + \int_0^\infty P(t)dt \tag{4.15}$$

Враховуючи, що $t \geq 0, P(0) = 1$ и $P(\infty) = 0$, остаточно одержимо:

$$T = \int_0^\infty P(t)dt \tag{4.16}$$

Для експонентного закону розподілу часу безвідмовної роботи маємо

$$T = \int_0^\infty e^{-\lambda t} = \lambda^{-1} \quad (4.17)$$

Для визначення середнього наробітку до відмови використовується наступна статистична оцінка:

$$T^* = N_0^{-1} \cdot \sum_{N_0}^{i=1} t_i \quad (4.18)$$

де t_i - час безвідмовної роботи i-го виробу, поставленого на випробування, або час від закінчення (i-1)-го відновлення його працездатного стану після відмови до виникнення наступного відмови. Тому що t_i, визначати для кожного виробу досить складно, те для одержання статистичної оцінки середнього наробітку до відмови можна скористатися менш точною формулою:

$$T^* = N_0^{-1} \cdot \sum_{m}^{k=1} n_k t_{cpk} \quad (4.19)$$

де $t_{cpk} = 0{,}5\left(t_{k-1} + t_k\right)$, $m = t_n / \Delta t_k, t_H$ – час в тривалості якого вийшли з ладу всі елементи або вироби, або час спостереження за відновлюваним об'єктом, Δt_k величина інтервалу спостережень, n_k число виробів, які вийшли з ладу на інтервалі часу Δt_k. Середній наробіток між відмовами це відношення сумарного наробітку відновлюваного об'єкта до математичного очікування числа його відмов протягом цього наробітку. Гама процентний наробіток до відмови це наробіток протягом якої відмова об'єкта не виникне з імовірністю γ вираженої у відсотках, тобто $P\left(t_\gamma\right) = \gamma / 100$.

Показники середнього наробітку дозволяють порівнювати по надійності об'єкти із законами розподілу часу безвідмовної роботи одного типу. При різних законах розподілу порівняння по надійності об'єктів по одному показнику, середньому наробітку до відмови або по ймовірності безвідмовної роботи виявляється неможливим.

Для того, щоб представити наступний показник надійності параметр потоку відмов, розглянемо випадкову послідовність відмов як деякий потік випадкових подій. Аналогічно цілому ряду технічних процесів, процеси появи відмов і збоїв можна розглядати у вигляді деяких потоків вимог, які необхідно обслуговувати. Для потоку відмов обслуговування полягає у визначенні місця елемента, що відмовив, і заміні або відновленні його. Для потоку збоїв обслуговування припускає використання сукупності методів тимчасовий і апаратної надмірності, що дозволяють виправити отриманий невірний результат. Широке застосування в теорії надійності знаходять пуассонівські потоки, стаціонарні й нестаціонарні, потоки Эрланга. Однак в інженерних розрахунках найбільше часто використовується стаціонарний пуассонівські або найпростіший потік.

Параметр потоку відмов $\omega(t)$ це відношення математичного очікування числа відмов відновлюваного об'єкта за кінцевий наробіток до значення цього наробітку. Для визначення величини $\omega(t)$ використовується наступна статистична оцінка:

$$\omega^*(t) = \frac{n_1(\Delta t)}{N_0 \Delta t} \tag{4.20}$$

де $n_1(t)$ число виробів, що відмовили на інтервалі часу $(t - \Delta t/2, t + \Delta t/2)$ при умові що виріб, що відмовив, негайно заміняється новим.

Для визначення властивостей параметра потоку відмов використовуємо перетворення Лапласа. Можна показати, що

$$\omega(s) = \omega(s) \cdot a(s) + a(s) \tag{4.21}$$

Звідки

$$\omega(s)=\frac{a(s)}{1-a(s)},a(s)=\frac{\omega(s)}{1-\omega(s)} \qquad (4.22)$$

Переходячи до оригіналу, подушимо:

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t)=\frac{1}{T} \qquad (4.23)$$

Межа, до якої прагнути параметр потоку відмов при t→∞ дорівнює величині, зворотної часу безвідмовної роботи. Можна вказати наступні властивості параметра потоку відмов:

1. Для будь-якого моменту часу, незалежно від будь-якого закону розподілу часу безвідмовної роботи $\omega(t) > a(t)$.

2. Якщо $\lambda(t)$ зростаюча функція часу, то $\lambda(t)> \omega(t)>a(t)$.

3. Якщо ж $\lambda(t)$ убиваюча функція, то $\lambda(t) > \omega(t) > a(t)$. Розглянемо експонентний закон розподілу часу безвідмовної роботи, для якого $a(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ де λ = const. Перетворення Лапласа має вигляд $a(s)=\dfrac{\lambda}{\lambda+s}$ Тоді $\omega(s)=\dfrac{\lambda}{s}$. Переходячи до оригіналу, одержимо

$$\omega(t)=\lambda=\frac{1}{T}=\text{const} \qquad (4.24)$$

Таким чином, при експонентному законі розподілу часу безвідмовної роботи параметр потоку відмов дорівнює інтенсивності відмов об'єкта й обернено пропорційний середньому часу його безвідмовної роботи.

РОЗДІЛ 2. СУЧАСНІ АНАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНИХ ПРОЦЕСІВ

Тема 5. Аналітичні моделі розташування місць тяжіння у містах

Пасажирський автомобільний транспорт, як частина транспортної системи країни, забезпечує не лише задоволення життєвих потреб населення і реалізацію конституційних прав громадян на свободу переміщень, але і є одним з чинників територіальної цілісності держави. Особливе значення при цьому належить міжміським автомобільним пасажирським перевезенням, які у ряді регіонів України грають домінуючу роль і мають безперечні переваги перед іншими видами пасажирського транспорту.

Міські перевезення є найбільш прибутковою сферою автотранспортної діяльності і рівень конкуренції тут надзвичайно високий. На практиці це веде до того, що на окремих маршрутах і напрямах спостерігається надлишок ТЗ, рухомий склад експлуатується недостатньо ефективно, посилюються негативні наслідки роботи автотранспорту на довкілля, ускладнюється процес забезпечення безпеки пасажирських перевезень, створюються умови для виникнення конфліктних ситуацій і недобросовісної конкуренції.

Це призводить до того, що хоча більшість перевезень пасажирів у міському сполученні виконуються постійними маршрутами, що обслуговуються на пасажирських автобусних станціях, але в Україні також існує доволі розвинений бізнес так званих «нелегалів.

Для того, щоб більш повно вивчити й удосконалити процес перевезень пасажирів в міському сполученні його треба досліджувати, а пізніше відтворити за допомогою моделей. У виробничій сфері основу дослідження складають потреби в перевезеннях, що характеризуються вантажопотоками, тоді як в невиробничій – потреби в перевезеннях пасажирів, що характеризуються пасажиропотоками. Прогноз може розроблятися як для періоду часу, рівного усього лише одному дню (наприклад, при складанні виробничих розкладів), так і для періоду часу до 20 років (наприклад, при проектуванні швидкісної системи транзитних перевезень). Вибір найбільш бажаного варіанту рішення при аналізі транспортних систем здійснюється з урахуванням очікуваної поведінки великих груп людей, що мають загальні інтереси.

Прогнозування потреб у будь-яких перевезеннях повинне бути засноване на дослідженні, що включає аналіз наступних восьми елементів транспортної системи:

- пункт відправлення;
- пункт призначення;
- обсяг перевезень;
- вид транспорту;
- транспортна лінія;
- об'єкт перевезення;
- розклад перевезень;
- характеристика часу здійснення перевезень.

У зв’язку з цим виникає необхідність виділення місць тяжіння, які б дозволили охарактеризувати той чи інший (район (зону) на певній території. Це потребує аналізу існуючих методів поділу територій на зони, які б були однорідні за тією чи іншою транспортною характеристикою.

В теперішній час для зонування територій розроблено велику кількість підходів, які передбачають застосування різноманітних обмежень при визначенні меж зон транспортного аналізу (ЗТА), або, як їх ще називають, транспортних районів (ТР). Більшість з цих методів призначені для використання при аналізі процесів функціонування міських транспортних систем або їх окремих елементів (вулично-дорожніх мереж (ВДМ), систем паркінгів, маршрутних мереж громадського транспорту, тощо).

Містяться рекомендації щодо вибору розрахункової кількості ТР у відповідності із належністю міста то тієї чи іншої групи за чисельністю населення. Також у даній роботі райони рекомендується об’єднувати у три зони – центральну, серединну та периферійну, кожній з яких ставиться у відповідність середня рекомендована площа ТР. Схожі положення стосовно районування. При цьому орієнтири щодо середньої площі транспортного району ґрунтуються на припущенні про приблизно рівну щільність місць проживання, роботи або інших видів діяльності на аналізованій території міста.

ЗТА є основою для узагальнення демографічних даних та даних землекористування та чим більшу кількість ЗТА містить транспортна модель, тим більш корисною вона може виявитись для цілей транспортного планування. Кількість ЗТА залежить від розмірів досліджуваного району і цілей планування. Для її визначення можна користуватися наступними міркуваннями:

- кількість зон є функцією від географії ВДМ;
- із ущільненням ВДМ кількість зон загалом зростає;
- площа зон, як правило, менша в районах з більш щільною ВДМ та більша – в районах з меншою щільністю;
- кількість ЗТА повинна узгоджуватись із цілями дослідження, забезпечувати в межах кожної зони однорідність функціонального призначення території та адекватність опису взаємодії із оточуючою транспортною мережею;
- межі зон транспортного аналізу повинні узгоджуватись з природними та штучними перешкодами – річками, озерами, ярами, залізницями, тощо.

Відсутність жорсткого стандарту при поділі досліджуваної області на певну фіксовану кількість ТР.

Перелік рекомендацій щодо зонування досліджуваної території:

- розмір ЗТА повинен бути таким, щоб помилка, спричинена припущенням щодо концентрації діяльності населення у центрі зони, була мінімальною;
- межі ЗТА повинні співпадати з межами адміністративних районів міста;
- територія ЗТА повинна бути якомога одноріднішою за категорією населення, що в ній перебуває, або за типом землекористування;
- межі зон не повинні проходити по основним міським магістралям;

- форма зон повинна дозволяти легко визначати їх центри, від розташування яких залежить точність розрахунку транспортних витрат на сполучення між ЗТА;
- при наявності попереднього зонування, межі нових зон повинні з ним узгоджуватись;
- ЗТА не повинні бути однакового розміру.

Алгоритм зонування території міської агломерації, який передбачає дотримання наступних обмежень:

- межі ЗТА повинні проходити по місцям з низькою щільністю генерації поїздок;
- внутрішньорайонні пересування повинні бути зведені до мінімуму;
- потрібно уникати виділення зон з дуже малої кількістю поїздок або з дуже великою площею;
- щільність генерації поїздок усередині зони повинна бути якомога одноріднішою;
- загальна кількість поїздок, що починаються або закінчуються у зоні, повинна складати не менше 70 % середньої місткості транспортних зон з відправлення або прибуття (визначається як загальна кількість поїздок, розділена на кількість зон, які будуть виділені на території);
- площа кожної ЗТА повинна охоплювати щонайменше 70 % зони впливу центру транспортного тяжіння;
- помилка розрахунку транспортного потоку між ЗТА повинна складати не більше 50 %;
- кількість ЗТА повинна знаходитись у заздалегідь визначених межах, щоб алгоритм поділу території працював згідно з вподобаннями дослідника.

Окрім наведених вище, в зарубіжній літературі містяться додаткові рекомендації щодо дотримання певних обмежень при зонуванні територій. При виділенні ТР рекомендується робити їх однорідними за кількістю відправлень та прибуттів пасажирів і узгодженими з політичними, адміністративними межами та з межами інших територіальних одиниць статистичної звітності.

Роботи вказують на необхідність призначення меж ТР таким чином, щоб вони були опуклими, не мали форму кільця, не були ізольованими та були компактними. Значиться, що ТР повинні виділятися з огляду на мінімізацію внутрішньорайонних пересувань. Автор віддає перевагу поділу території на ТР таким чином, щоб максимізувати точність статистичних характеристик клітинок матриці кореспонденцій.

Враховуючи вищенаведене можна виділити основні 14 правил, якими доцільно користуватися, при проведення районування міської території:

1. Максимальна площа транспортного району 2,5км ^{2}, відстань і час підходу пасажира до зупинки 800 км і 10хв.

2. Річки, залізничні колії, яри та інші природні перепони, а також межі адміністративних районів міста служать природніми межами транспортних районів і не повинні знаходиться всередині нього.

3. Межі транспортних районів не повинні ділити будинки, парки, заводську територію.

4. Великі пасажиропоглинаючі об’єкти (підприємства, вокзали всіх видів транспорту, великі пересадочні пункти МПТ, станції метро) з прилеглими до них територіями виділяються в транспортні райони.

5. Кордон транспортного району не може проходити по великим магістралях з маршрутами МПТ і повинен перетинати її під прямим кутом.

6. Зв’язок між двома сусідніми транспортними районами повинен здійснюватися по одній транспортній магістралі, винятком є дві паралельні вулиці із зустрічним односторонньому рухом.

7. Межі транспортних районів не повинні знаходиться поблизу зупиночного пункту з великим пасажирообміном.

8. Всі тупикові ділянки транспортної мережі з прилеглими до них територіями виділяються в окремі транспортні райони.

9. На території транспортного району не повинно знаходитися більше одного перетину транспортних ліній.

10. Якщо рух МПТ здійснюється по двох вулицях з різною пропускною спроможністю, то в деяких випадках доцільно вулицю з меншою пропускною спроможністю охопити територією транспортного району і не розглядати її як окрему транспортну магістраль.

11. У транспортних районах з тупиковою ділянкою транспортної мережі за центр приймається кінець тупикової ділянки.

12. У транспортних районах з вузлом перетину транспортних ліній за центр приймається точка цього перетину.

13. Центри транспортних районів повинні по можливості розміщуватись рівновіддалено від кордонів між транспортними районами, не тільки по відстані, але і за часом підходу, зручності.

14. За центр транспортного району приймається одна з вхідних в нього зупинок МПТ, як правило з найбільшим пасажирообміном, при наявності станції метро вона є центром транспортного району.

В результаті можна підсумувати, що за допомогою існуючих методів транспортного зонування території здебільшого отримують такі характеристики міських ТР, як площа, чисельність та щільність населення.

Тема 6. Моделювання поведінки людини при виборі шляху пересування

Як відомо, основна мета роботи транспорту – своєчасне і повне задоволення потреб населення в перевезеннях. Удосконалення організації і планування перевезень неможливе без використання методів, що дозволяють досить точно прогнозувати попит на транспортні послуги, оскільки саме він визначає основні параметри транспортної системи (ТС).

Останнім часом широке поширення отримав підхід до визначення попиту на транспортні послуги за допомогою так званої чотирьохетапної моделі. Ця модель містить чотири основні етапи моделювання попиту: генерація поїздок – оцінка кількості пересувань, які зароджуються або поглинаються транспортними районами (ТР); розподіл пересувань – їх просторовий розподіл між пунктами відправлення і прибуття (розрахунок матриці кореспонденцій); вибір виду транспорту – визначення співвідношення між пересуваннями маршрутним транспортом, індивідуальним, пішими пересуваннями та ін.; розподіл по мережі – розподіл пересувань між шляхами сполучення на маршрутній або вулично-дорожній мережі (ВДМ). Реалізація кожного з етапів здійснюється за допомогою відповідних математичних залежностей, проте для останніх двох – етапу вибору виду транспорту і розподілу пересувань по мережі – існуючі підходи далеко не завжди забезпечують належну адекватність результатів.

Як відомо, формування попиту на послуги МПТ вже починаючи з сегменту середніх міст відбувається в умовах сильної розгалуженості МС. Внаслідок цього потенційний пасажир завжди має декілька варіантів реалізації запланованого пересування, кожен з яких характеризується певним набором параметрів: часом пішого підходу до зупинного пункту (ЗП), часом очікування, часом пересування в транспорті, мірою заповнення салону транспортного засобу на момент посадки, кількістю пересадок, комфортністю та ін. Це свідчить про те, що для досягнення найбільшої точності прогнозування транспортного попиту необхідно враховувати поведінкові аспекти формування пасажиропотоків.

У наш час розроблена досить велика кількість моделей поведінки пасажирів при виборі шляху пересування. У даній роботі під моделями поведінки пасажирів розуміються математичні залежності, засновані на теоретичних міркуваннях та дозволяючі передбачити ймовірність вибору пасажиром шляху пересування. Така поведінка в іноземних джерелах іменується як «travel behavior», «trip making behavior», «choice behavior». Моделі, що описують таку поведінку, придатні для розрахунку пасажиропотоків на ММ, інформація про які є основою для вирішення практично усіх завдань транспортного планування. Слід зазначити, що на сьогодні точність існуючих МВ досить низька – при розподілі потоку пасажирів помилка може складати більше 100 %.

Як вже відзначалося, вибір пасажиром шляху пересування залежить від багатьох факторів, які важко врахувати через складність процесу і відсутність методики, яка дозволила б отримати об'єктивну характеристику відношення пасажира до транспортних факторів з урахуванням відносного характеру вибору шляху пересування. За основу створення МВ береться гіпотеза, відповідно до якої розподіл пасажиропотоків здійснюється по єдиному найкоротшому шляху пересування, визначуваному відстанню або часом. Автор пропонує розглядати теоретичні основи таких моделей в якості припущення, а не гіпотези, оскільки в результаті моделювання виходить однозначний розподіл пасажиропотоків, який не враховує їх випадковий характер. Звертається увага на те, що найкоротший за часом шлях пересування можливий лише за наявності пересадок, а маршрутні поїздки між пунктами відправлення і прибуття можуть здійснюватися і не по найкоротшому шляху за умови існування відповідних маршрутів МПТ.

Відомі на сьогодні МВ шляху можна розділити на три укрупнені групи – первинні моделі (ПМ) вибору, нормувальні моделі (НМ) і моделі свідомого вибору (МСВ) шляху пересування.

До першої групи відносяться моделі, які у своїй більшості отримали поширення в містобудівних розрахунках і втратили актуальність в умовах постійно зростаючих міст. Так, пропонується наступна модель розрахунку ймовірності вибору *j*-го шляху пересування

$$p_j = p\left\lfloor n_{\text{п}j} / \bar{t}_j \right\rfloor \cdot p\left\lfloor t_j / n_{\text{п}j} \right\rfloor \cdot p\left\lfloor W_j / n_{\text{п}j} \right\rfloor, \tag{6.1}$$

де $p\left[n_{\text{п}j} / \bar{t}_j\right]$ – ймовірність вибору шляху j з кількістю пересадок $n_{\text{п}j}$ при середніх витратах часу на пересування $\bar{t}_j$;

$p\left[t_j / n_{\text{п}j}\right]$ – ймовірність вибору шляху j з витратами часу на пересування t_j при кількості пересадок $n_{\text{п}j}$;

$p\left[W_j / n_{\text{п}j}\right]$ – ймовірність вибору шляху j при використанні виду транспорту W_j з кількістю пересадок $n_{\text{п}j}$.

Підхід до визначення ймовірності вибору шляху пересування, заснований на психофізіологічному законі Вебера-Фехнера, який описує реакцію людини на зміну інтенсивності якого-небудь зовнішнього подразника. Як подразник приймаються такі характеристики шляху пересування, як час його реалізації, кількість пересадок і вартість проїзду

$$p_{ij} = \frac{1}{r_i} \cdot \left[A + B \cdot \ln\left(\frac{\prod_{j=1}^{r_i} t_j}{t_{r_i}} \right) + C \cdot \ln\left(\frac{\prod_{j=1}^{r_i} k_{\text{п}j}}{k_{\text{п}r_i}} \right) + D \cdot \ln\left(\frac{\prod_{j=1}^{r_i} s_j}{s_{r_i}} \right) \right], \tag{6.2}$$

де A, B, C, D – емпіричні коефіцієнти;

k_{nj} – коефіцієнт пересадочності при j-му варіанті шляху пересування, $j = 1, 2, \ldots, r_i$,

r_i – кількість варіантів шляхів пересування, доступних для i-го пасажира;

s_j – вартість проїзду на j-му шляху пересування.

Цей підхід позбавлений пояснень до визначення коефіцієнтів моделі (6.2), що не дало можливості брати його за базу для розробки методики моделювання вибору пасажира в сучасних умовах.

Отримана залежність ймовірності користування метрополітеном від величини часу пересування з його використанням і без. Представлена таблиця коефіцієнтів користування метро залежно від двох показників – відстані пересування і віддаленості станцій метро від пунктів відправлення і прибуття. За фізичним змістом ці показники близькі до параметрів, де показана схожість підходів декількох авторів до визначення закономірностей формування пасажиропотоків на метрополітені, проте недостатня обґрунтованість отриманих результатів і неглибоке опрацювання досліджуваного питання унеможливили використання описаних підходів при розробці теоретичних основ моделювання поведінки пасажирів в МС ГПТ.

До другої групи МВ можна віднести підхід до визначення ймовірності вибору шляху, заснований на припущенні про рівнозначність шляхів пересування із зони згладжування

$$p_{ij} = \frac{1}{r_i}, \tag{6.3}$$

де p_{ij} – ймовірність вибору *i*-м пасажиром *j*-го шляху пересування.

Хоч це припущення і відповідає гіпотезі про ймовірнісний характер вибору шляху, проте воно не завжди застосовне – наприклад, при розподілі потоку пасажирів в містах, тому що ймовірність вибору будь-якого шляху пересування з деякого набору залежить від параметрів шляхів, різниця між якими може бути дуже великою.

Іншою моделлю розподілу пасажиропотоків є модель, заснована на припущенні про те, що ймовірність вибору пасажиром шляху пересування обернено пропорційна до його трудності, що характеризується часом (чи дальністю) пересування

$$p_{ij} = \left(1 - \frac{t_j}{\sum_{l=1}^{r_i} t_l}\right) \cdot \frac{1}{r_i - 1}, \tag{6.4}$$

де t_j – час пересування по *j*-му варіанту шляху, $j = 1, 2, \ldots, r_i$.

Ще одним підходом до розподілу потоку пасажирів по альтернативних шляхах являється «метод опору», який заснований на аналогії між транспортними магістралями і електричними ланцюгами

$$p_{ij} = \frac{1}{R_j} \Big/ \sum_{l=1}^{r_i} \frac{1}{R_l}, \tag{6.5}$$

де R_j – функція «опору» *j*-го варіанту шляху пересування.

У містобудівних розрахунках найбільше застосування при визначенні шляхів пересування пасажирів отримав «алгоритм стоку»

$$p_{ij} = (A + B \cdot \rho_{jt} \cdot \rho_{j\text{п}}) \Big/ \sum_{l=1}^{r_i} (A + B \cdot \rho_{lt} \cdot \rho_{l\text{п}}), \tag{6.6}$$

де ρ_{jt}, ρ_{jn} – відповідно коефіцієнти привабливості та витрат часу на *j*-му варіанті шляху пересування, *j*=1,2,…,r_i ;

A, *B* – коефіцієнти, визначені емпіричним шляхом.

Наступним підходом до визначення ймовірності вибору є використання НМ виду

$$P_{ij} = (1{,}25 \cdot t_{\min} - t_j) \Big/ \sum_{l=1}^{r_i} (1{,}25 \cdot t_{\min} - t_l), \tag{6.7}$$

де $t_{\min}$ – мінімальні витрати часу серед усіх альтернативних варіантів шляху пересування;

t_j – час пересування по *j*-му шляху, *j* = 1,2,…,r_i ;

1,25 – межа зони згладжування [20, 34].

Моделювання вибору шляху здійснюється з використанням функції корисності

(ФК), яка виражається через величину загальної вартості реалізації пересування зі знаком «–». Такий підхід дозволяє врахувати пропускну спроможність шляху пересування, але не вирішує питання моделювання процесу його вибору, оскільки не враховує причинно-наслідкові зв'язки в межах цього процесу.

У існуючих підходах окрім усього іншого відкритим залишається питання про отримання коефіцієнтів ФК шляху, хоча в декількох роботах є спроби їх визначення. Запропоновано наступну залежність для визначення ймовірності вибору шляху на основі ФК

$$P_{ij} = \frac{U_{ij}}{\sum_{l=1}^{r_i} U_{il}}, \tag{6.8}$$

де P_{ij} – розрахункова ймовірність вибору i-м пасажиром j -ї альтернативи;

U_{ij} – теоретична корисність шляху пересування j для пасажира i, $j=1,\dots,r_i$;

U_{il} – теоретична корисність шляху пересування l для пасажира i, $j=1,\dots,r_i$.

Для пошуку коефіцієнтів ФК U_{ij} автор запропонував використовувати метод найменших квадратів (МНК), а точність отриманих результатів оцінювати тільки на підставі вбудованих в оболонку MS Excel функцій. При цьому невирішеним залишається питання порівняння декількох ФК шляху між собою.

Окрім приведених вище НМ, до них також можна віднести модель EVA, перетворення Бокс-Кокс (Box-Cox Transformation) і модель Кірхгофа (Kirchoff Model).

Модель EVA, розроблена Д. Лозе, передбачає визначення ймовірності вибору шляху з урахуванням відстані та часу пересування, а також загальних витрат на пересування

$$P_j = \frac{e^{\xi \cdot (x_j)^2}}{\sum_{l=1}^{r_i} e^{\xi \cdot (x_l)^2}}, \tag{6.9}$$

де ξ – калібрувальний параметр;

$x_j = \left(\dfrac{C_j}{\min\limits_{l=1,\ldots,r_i}(C_l)} - 1 \right)$ – перетворений параметр шляху пересування *j*;

C_j – функція опору шляху пересування *j* з набору r_i (сукупність фінансових витрат при використанні *j*-го шляху пересування).

Загальний вираз для визначення ймовірності вибору шляху пересування з використанням перетворення Бокс-Кокс має вигляд

$$P_{ij} = \frac{e^{-\beta_{kj} \cdot x_{kij}^{\lambda_k}}}{\sum\limits_{l=1}^{r_i} e^{-\beta_{kl} \cdot x_{kil}^{\lambda_l}}}, \tag{6.10}$$

де β_{kj} – *k*-й коефіцієнт при параметрі шляху пересування *j*, $j = 1,\ldots,r_i$;

$x_{kij}^{\lambda_k}$ – перетворений *k*-й параметр *j*-го шляху пересування для пасажира *i*;

λ_k – *k*-й калібрувальний параметр.

Використання параметрів $x_{kij}^{\lambda_k}$, перетворених за допомогою стандартного вираження Бокс-Кокс, дозволяє змінювати співвідношення між ймовірністю вибору альтернатив з їх набору і, відповідно, змінювати описові можливості моделі.

Модель Кірхгофа, застосовується для визначення ймовірності вибору пасажиром шляху пересування, заснована на аналогії транспортних процесів з процесами в електричних ланцюгах

$$P_{ij} = \frac{\left(x_{ij}\right)^{-\tau}}{\sum\limits_{l=1}^{r_i} \left(x_{il}\right)^{-\tau}}, \tag{6.11}$$

де x_{ij} – функція опору шляху *j* для пасажира *i*, $j = 1,...,r_i$;

τ – калібрувальний параметр.

Вираз (1.11) отримав досить широке поширення в моделюванні поведінки пасажирів, оскільки вибір шляху пересування залежить від співвідношення загальних витрат на реалізацію кожного шляху, а не від їх абсолютної різниці. Проте слід виділити один недолік цієї моделі – при порівнянні двох варіантів шляху пересування, наприклад, тривалістю 5 хв і 10 хв та 50 хв і 100 хв модель дасть однакові пари ймовірностей вибору цих шляхів.

До останньої, третьої групи МВ віднесені різновиди моделей дискретного вибору (МДВ) і модель обслуговування по інтервалу. Перші засновані на припущенні про те, що кожен пасажир вибирає шлях пересування з деякого кінцевого набору альтернатив на основі їх соціально-економічних характеристик і відносної корисності. Найбільш поширеними моделями цього класу є мультиноміальна логіт-модель (Multinomial Logit, або MNL), змішана логіт-модель (Mixed Logit, або ML), мультиноміальная пробіт-модель (Multinomial Probit, або MNP) і логіт-модель з угрупуванням (Hierarchical Logit, Nested Logit, або NL).

МДВ тісно пов'язані з теорією корисності, яка розвивалася паралельно з ними як засіб пояснення поведінки пасажира. Через те, що дослідник не може отримати вичерпну інформацію про усі фактори, які впливають на вибір пасажира, корисність розділяють на дві складові.

Перша складова є детермінованою і може бути представлена у вигляді

$$V_{ij} = x_{ij}\beta, \qquad (6.12)$$

де x_{ij} – вектор характеристик пасажира *i* та властивостей альтернативи *j*;

β – вектор параметрів шляху пересування.

Друга складова корисності є випадковою і відбиває вплив усіх факторів, що чинять малопомітну дію на вибір пасажира, а також враховує можливі погрішності, допущені при спостереженнях. Враховуючи (1.12), ФК набуває наступного векторного вигляду

$$U_{ij} = x_{ij}\beta + \varepsilon_{ij}, \tag{6.13}$$

де ε_{ij} – випадкова складова ФК.

Теорія корисності базується на припущенні про те, що корисність альтернативи, яку вибрав індивідуум, є найбільшою в порівнянні з корисностями інших альтернатив. Оскільки дослідник не в змозі отримати фактичне значення корисності шляху для кожного пасажира, в розрахунках використовується ймовірнісна функція. Відповідно до цього ймовірність того, що пасажир *i* може, наприклад, здійснити вибір з двох альтернатив, записується таким чином

$$P_{ij} = \Pr\{U_{ij} > U_{il},\ \forall\, l = 1,\dots,r_i\}. \tag{6.14}$$

Підстановка (1.13) в (1.14) дозволяє отримати залежність для визначення ймовірності вибору пасажиром шляху пересування

$$P_{ij} = \Pr\{\varepsilon_{il} - \varepsilon_{ij} < x_{ij}\beta - x_{il}\beta,\ \forall\, l = 1,\dots,r_i\}. \tag{6.15}$$

Для вирішення представлений вираз записується в інтегральному виді

$$P_{ij} = \int_{\varepsilon} D \cdot f(\varepsilon_{ij})\, d\varepsilon_{ij}, \tag{6.16}$$

де $D = \varepsilon_{il} - \varepsilon_{ij} < x_{ij}\beta - x_{il}\beta$ – бінарна функція, що набуває значення 0 або 1 (заздалегідь визначена функція-індикатор);

$f(\varepsilon_{ij})$ – щільність ймовірності випадкової складової виразу (6.12).

Основи теорії корисності дозволяють виконати певні математичні перетворення, після яких можна отримати різні МДВ. Так, найбільш проста з МДВ MNL-модель має наступний вигляд

$$P_{ij} = \frac{e^{x_{ij}\beta}}{\sum_{l=1}^{r_i} e^{x_{il}\beta}}. \qquad (6.17)$$

Ця модель заснована на припущенні про незалежність ймовірності вибору певного шляху пересування від інших його альтернатив. Це, з одного боку, є перевагою, тому що полегшує використання логіт-моделі в розрахунках, а з іншої – породжує серйозні недоліки у разі, коли спостережувані і неспостережувані властивості корисності залежні між собою.

ML-модель, на відміну від MNL-моделі, враховує вплив альтернатив з їх можливого переліку на ймовірність вибору якоїсь однієї з них. Проте, через те, що дослідник не може знати переваг кожного пасажира, коефіцієнти моделі варіюються серед населення з деякою щільністю $f(\beta_i|\beta,\theta)$ і тоді ймовірність вибору певного шляху пересування записується у вигляді наступного інтеграла

$$P_{ij} = \int \frac{e^{x_{ij}\beta_i}}{\sum_{l=1}^{r_i} e^{x_{il}\beta_i}} f(\beta_i) d\beta_i. \qquad (6.18)$$

Пробіт-модель є досить схожою на змішану логіт-модель, але в ній (згідно з припущенням) усі випадкові елементи, коефіцієнти і погрішності мають нормальний розподіл. Модель отримала застосування здебільшого в економічній галузі і біологічних дослідженнях. Головною її перевагою є можливість охоплення усіх кореляцій між альтернативами. Залежність для обчислення ймовірності вибору пасажиром *i* альтернативи *j* в даному випадку має вигляд

$$P_{ij} = \int_{-\infty}^{0} \dots \int_{-\infty}^{0} f_j(x)\, dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{r_i}. \tag{6.19}$$

Найбільшим недоліком цієї моделі є те, що інтеграл (1.19) важко обчислювати навіть при невеликій кількості альтернатив.

Логіт-модель з угрупуванням (чи ієрархічна модель) передбачає розрахунок ймовірності здійснення пересування з використанням виду транспорту *z* до пункту призначення *d* таким чином

$$P(d,z) = \frac{e^{\left\{\beta(V_d + V_d^*)\right\}} \cdot e^{(\lambda V_{dz})}}{\sum_{d'} e^{\left\{\beta(V_{d'} + V_{d'}^*)\right\}} \cdot \sum_{z'} e^{(\lambda V_{dz'})}}, \tag{6.20}$$

$$V_d^* = (1/\lambda) \log \sum_{z'} e^{(\lambda V_{dz'})}, \tag{6.21}$$

де β, λ – калібрувальні параметри моделі;

$V_d, V_{d'}$ – частини корисності, пов'язані з досягненням пунктів призначення $d,\ d'$;

$V_{dz}, V_{d\,z'}$ – негативні складові корисності, пов'язані з витратами на пересування в пункти призначення $d,\ d'$ з використанням видів транспорту z, z'.

Ймовірність вибору альтернативи згідно CNL-моделі має вид

$$P_{ij} = \sum_m \frac{\alpha_{zm} e^{V_z} (\sum_{j \in r_i} \alpha_{jm} e^{V_j})^{\mu}}{\sum_{l \in r_i} \alpha_{lm} e^{V_l} \sum_{m'} (\sum_{l' \in r_i} \alpha_{l'm'} e^{V_{l'}})^{\mu}}, \tag{6.22}$$

де α – вагові коефіцієнти альтернатив на кожному рівні ієрархії m, які повинні задовольняти умові $\sum_{j \in r_i} \alpha_{jm}^{\mu} = 1$ для набору m з j альтернатив;

V_j – детермінована складова корисності шляху пересування *j*;

μ – калібрувальний параметр моделі.

Не менш складним є визначення ймовірності вибору пасажиром альтернативного шляху згідно з PCL-моделлю

$$P_l = \frac{\sum_{k \neq l} e^{V_l / \lambda_{lk}} (e^{V_k / \lambda_{lk}} + e^{V_l / \lambda_{lk}})^{\lambda_{lk} - 1}}{\sum_{k=1}^{J-1} \sum_{l=k+1}^{J} (e^{V_k / \lambda_{lk}} + e^{V_l / \lambda_{lk}})^{\lambda_{lk}}}, \quad (6.23)$$

де λ_{lk} – калібрувальний параметр.

Проаналізувавши існуючі МДВ можна сказати, що серед них найбільше поширення отримала стандартна мультиноміальна логіт-модель, яка в кінцевому варіанті виглядає як проста НМ із заздалегідь перетвореними через показникову функцію складовими. Інші моделі мають в транспортному плануванні виключно теоретичний характер, оскільки їх практичне використання досить проблематичне і вимагає дуже складних обчислень.

Недоліком МДВ також є припущення про однаковий розподіл випадкових складових усіх факторів вибору шляху пересування при тому, що ці фактори мають абсолютно різний фізичний сенс. Це не надає права вважати розроблений математичний апарат надійною основою для моделювання поведінки пасажирів в транспортних системах.

Модель обслуговування по інтервалу, побудована на тих же принципах, що і МДВ за винятком того, що в ній в якості випадкової складової корисності задається конкретна величина – час очікування громадського транспорту, закон розподілу якого відомий. Це дає можливість визначити ймовірність вибору шляху пересування на основі результатів обстеження фактичного вибору пасажиром шляху пересування. Ймовірність вибору по формулі повної ймовірності для безперервної випадкової величини

$$p_{ij} = \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \prod_{l \neq j}^{r_i} P\{A_l\} \cdot f(y_j - t_j) dt_j, \qquad (6.24)$$

де α_j, β_j – відповідно нижня і верхня межі інтервалу значень ВВ – часу очікування громадського транспорту на зупинному пункті;

$f(y_j - t_j)$ – щільність розподілу часу очікування j-го варіанту шляху пересування при першій посадці.

На підставі залежності (6.24) формується система рівнянь, яка враховує незалежність випадкових подій прибуття транспортних засобів різних маршрутів на зупинку для r_i реальних альтернатив. Коефіцієнти ФК в цьому випадку пропонується знаходити з використанням регресійного аналізу.

ПМ є не досить успішним результатом спроби врахувати ймовірнісний характер вибору альтернативи. Вони засновані на апріорних припущеннях і не пояснюють механізмів ухвалення рішень пасажирами. МСВ, незважаючи на популярність, також мають ряд істотних недоліків, що вказує на необхідність пошуку іншого способу моделювання поведінки пасажира при виборі шляху пересування в МСМ. Стосовно НМ можна затверджувати, що вони є прийнятною основою використання при моделюванні вибору пасажиром шляху пересування за рахунок їх відносної простоти і можливості набувати значень ймовірності вибору шляху, що знаходиться в діапазоні від 0 до 1.

Тема 7. Аналітичні основи моделювання потреб клієнтів транспортного ринку у пересуваннях

Моделювання потреб населення у пересуваннях є найбільш відповідальним питанням серед усіх етапів рішення задачі підвищення ефективності функціонування маршрутного пасажирського транспорту в містах. Це обумовлено, з одного боку, складним двовимірним характером моделі, для якої на цей час не існує чітких критеріїв якості, з іншого боку – високою значущістю цієї моделі для надійності результатів рішення задачі.

Метою моделювання є складання матриці кореспонденцій H для заданого періоду часу

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1e} & \dots & h_{1N_{TP}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{d1} & \dots & h_{de} & \dots & h_{dN_{TP}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N_{TP}1} & \dots & h_{N_{TP}e} & \dots & h_{N_{TP}N_{TP}} \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

де H – матриця кореспонденцій за розглянутий період часу;

h_{de} – величина кореспонденції (кількість пересувань) між районами відправлення d та прибуття e, $d,e \in [1, N_{TP}]$, за розглянутий період часу;

d, e – індекси транспортних районів міста, $d,e \in [1, N_{TP}]$;

N_{TP} – кількість транспортних районів у транспортної моделі міста, од.

Завдяки історично сформованому способу життєдіяльності мешканців міст, зміст МПК значно залежить від розглянутого період часу. Обсяг людських пересувань містом визначається рухомістю населення, тобто середньою кількістю поїздок за окремий проміжок часу, як правило, рік. У загальному випадку за цілями пересувань у межах міста виділяються чотири варіанти рухомості:

1. Трудова (≈45%).
2. Культурно-побутова (≈45%).
3. На відпочинок (9-11%)
4. На міжміські транспортні вузли (<1%).

Незважаючи на приблизно рівні частки трудових та культурно–побутових пересувань у загальній рухомості населення, найбільшу увагу дослідників та практичних працівників сфери МПТ викликають трудові пересування. Це обумовлене коротким часом, за який вони реалізуються. Якщо культурно-побутові пересування реалізуються протягом всього періоду роботи МПТ, то основна частка трудових пересувань реалізується протягом ранкового та вечірнього періодів пік, загальна тривалість яких не перевищує 6 годин. Особливо це стосується ранкового періоду пік, оскільки для нього характерні більша концентрація трудових пересувань та чіткі границі зростання та спаду пасажиропотоків. Підвищена напруженість роботи МПТ у ранковий період пік обумовлює необхідність першочергового розгляду питань моделювання матриці трудових пересувань мешканців міста в цей період. Того ж висновку вимагає і ДБН Б.1-2-95 “Склад, зміст, порядок розроблення, погодження і затвердження комплексних схем транспорту для міст України”, згідно з яким критерієм оптимальності маршрутизації являється мінімум витрат часу на трудові поїздки.

Тому метою моделювання потреб населення у пересуваннях вважається формування матриці трудових пересувань (МТП) мешканців міста з дому на роботу та навчання.

Цей період, крім напруженості, має також і значно більшу прогнозованість завдяки одноцільовому характеру більшості пересувань, а також стабільній та відносно чітко визначеній місткості ТР з прибуття та відправлення мешканців міста. Ця стабільність, яка носить назву “умови жорстких контрольних сум”, значно спрощує завдання дослідників, але існуючі методи моделювання МПК не дають достатніх підстав вважати задачу моделювання потреб населення у пересуваннях розв’язаною навіть для пересувань за напрямом “житло – робота”.

Таке становище обумовлене, з одного боку, відсутністю спеціального інструментарію для оцінки точності МПК, а з іншого – пояснюється бажанням більшості дослідників мати інструмент моделювання на основі транспортних характеристик об’єкта дослідження. Прагнення враховувати при розрахунках МПК лише транспортні фактори побудоване на істотно більшій доступності для спеціалістів у сфері транспортного планування характеристик пересування ніж інших факторів, які зумовлюють реальний стан об’єкта дослідження, тобто МПК. Отримання не транспортних даних, які визначають фактичний вибір пари “житло – робота”, не підкріплюється серйозними теоретичними або методичними розробками, що викликає трудності, пов’язані з широким переліком цих факторів та значною кількість активних учасників об’єкта дослідження.

Ті самі твердження, але в значно більшій мірі стосуються моделювання культурно-побутових пересувань. Для них навіть не ставиться умова жорстких контрольних сум, тобто вибір напряму (району призначення) пересування залежить від доступних кожному мешканцю міста засобів здійснення пересування.

Тому на цьому етапі розвитку методів моделювання МПК, з врахуванням особливостей українських міст, найбільш ефективним напрямом дослідження є розробка теоретичних основ моделювання потреб населення міст у трудових пересуваннях.

Дослідження ступеня впливу транспортних факторів на результат вибору пари “житло – робота” носять розрізнений і несистемний характер та дають істотно різні результати. Відмінності в результатах досліджень також пояснюються суб’єктивним характером відповідей респондентів, які вже мають роботу та житло, а не вирішують питання про те де і на яких умовах їм краще працювати та де жити.

Однак апріорні переконання багатьох дослідників про вагомий вплив транспортної складової в процесі вибору пари “житло – робота” сумісно з відсутністю альтернативних гіпотез та об’єктивних інструментів оцінки точності МПК приводять до поширеного використання синтетичних методів, основаних на використанні транспортної складової як основного фактора при моделюванні матриць кореспонденцій.

Такі тенденції зумовили відсутність в останні роки істотного прогресу в моделюванні потреб населення в пересуваннях з точки зору появи нових підходів та методик формування МПТ.

При формуванні матриці трудових пересувань загально прийнятою та достатньо обґрунтованою виглядає постановка задачі, при якій відомими та сталими вважаються місткість транспортних районів з відправлення та прибуття мешканців міста.

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1e} & \dots & h_{1N_{TP}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{d1} & \dots & h_{de} & \dots & h_{dN_{TP}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N_{TP}1} & \dots & h_{N_{TP}e} & \dots & h_{N_{TP}N_{TP}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} HO_1 \\ \dots \\ HO_d \\ \dots \\ HO_{N_{tp}} \end{bmatrix}, \tag{7.2}$$
$$\begin{bmatrix} HP_1 & \dots & HP_e & \dots & HP_{N_{TP}} \end{bmatrix}$$

де HO_d – місткість транспортного району d з відправлення за розглянутий період часу, $HO_d = \sum_{e=1}^{N_{TP}} h_{de}$;

HP_e – місткість транспортного району e з прибуття за розглянутий період часу, $HP_e = \sum_{d=1}^{N_{TP}} h_{de}$.

Місткість ТР з кількості відправлень працездатного населення за розглянутий період часу, як правило, приймається пропорційною чисельності мешканців відповідної частини території міста. Місткість ТР з прибуття працівників потребує наявності більш детальної інформації про кількість робочих місць відповідної частини території міста, але і ця інформації може бути отримана з достатньо високим ступенем точності. Така інформація додатково використовується для часового обмеження пікового періоду.

Більш того ці вихідні дані характеризуються високим рівнем стабільності та можуть вважатися сталими протягом всього планованого періоду при рішенні задач підвищення ефективності роботи МПТ.

$$\begin{aligned} HO_d &= const = \Psi_d, d \in [1, N_{TP}] \\ HP_e &= const = \Omega_e, e \in [1, N_{TP}] \end{aligned}. \tag{7.3}$$

Обов'язковою умовою коректного формування МТП та побічною ознакою правильного визначення місткості ТР вважається умова балансування, тобто рівність кількості пасажирів, що вибувають зі всіх районів міста, та прибувають в них

$$\sum_{d=1}^{N_{TP}} HO_d = \sum_{e=1}^{N_{TP}} HP_e . \tag{7.4}$$

Найбільш складним етапом моделювання потреб населення в пересуваннях є розподіл місткостей ТР у матриці кореспонденцій. Фактичний розподіл кореспонденцій є результатом прийняття самостійних або колективних (наприклад – родинних) рішень з вибору місць мешкання та праці. Крім цього, більшість цих рішень приймається в умовах обмеженості доступних місць прикладення праці та обмеженості ресурсів мешканців на житло. В цих умовах використання складності транспортного сполучення як основного фактора, що визначає результати вибору мешканцями міста пари “житло – робота”, не може вважатися достатньо обґрунтованим. У зв’язку з цим постає задача визначення ступеня впливу складності транспортного сполучення або інакше транспортної доступності на формування МТП мешканців міста. Першим кроком на шляху вирішення цього питання повинні стати конкретизація задачі та формування умов вибору пари “житло – робота”.

За ознакою засобу реалізації потреби у пересуванні серед усіх видів пересувань, які здійснюють мешканці міста, виділяються піші та транспортні. Останні, в свою чергу, поділяються на пересування маршрутним та індивідуальним транспортом. З врахуванням властивостей об’єкта дослідження цієї роботи об’єктом моделювання потреб населення в пересуваннях повинні бути пересування мешканців міста з дому на роботу за допомогою маршрутного транспорту.

Цей об’єкт моделювання має власні характерні риси. По-перше, в Україні це найбільш вагома частка трудових транспортних пересувань (≈80 %), що дає змогу з достатньою впевненістю застосовувати до неї методи математичної статистики. По-друге, розгляд поведінки пасажирів маршрутного транспорту при виборі пари “житло – робота” окреслює коло мешканців міста, які в основній своїй масі не мають значного достатку.

У загальному випадку мешканці міста вільні у виборі обох елементів пари “житло – робота”. Але в сучасних умовах для пасажирів МПТ ця свобода має істотно нижчий рівень для житла чим для роботи. Це обумовлене слабким розвитком ринку найманого житла в країні, непомірно високою порівняно з доходами більшості громадян вартістю власного житла та слабким розвитком іпотечного кредитування. З врахуванням рівня доходів пасажирів, що складають об’єкт моделювання, зміна місця проживання для них є виключною подією.

Вибір робочого місця є елементом людської діяльності з прийняття рішень. Тоді результат вибору робочого місця для людини має характеризуватись його ефективністю та кожна людина бажає досягти найбільшої ефективності при прийнятті рішення про наступне місце роботи.

Це дозволяє сформулювати основний принцип моделювання, згідно з яким вибір робочого місця основується на прагненні кожної людини до досягнення максимуму ефективності майбутньої роботи.

Кількість альтернатив, які може розглядати людина при виборі робочого місця, визначається параметрами ринку праці і професійною підготовкою суб'єкта та є випадковою величиною. З врахуванням обмеження на кількість альтернативних варіантів роботи перший принцип формально записується як

$$E_e = R_e - C_e \geq E_f = R_f - C_f,\ e, f \in [1, N_{TP}], \tag{7.5}$$

де e – індекс обраного варіанту робочого місця (району призначення трудового пересування), $e \in [1, N_{TP}]$;

f – індекс альтернативного, не обраного варіанту робочого місця, $f \in [1, N_{TP}]$

;

E_e, E_f – загальна ефективність вибору робочих місць e та f відповідно;

R_e, R_f – очікувані людиною від вибору майбутньої роботи результати для робочих місць e та f відповідно;

C_e, C_f – очікувані людиною витрати всіх видів на вибір та подальшу роботу на робочих місцях e та f відповідно.

Одним з робочих місць e та f може виступати існуюча робота людини. В цьому випадку (7.5) означає зміну робочого місця, якщо існуюча робота має індекс f та продовження роботи на тому ж місці, якщо вона має індекс e.

Кожна людина самостійно визначає цілі, заради яких вона іде працювати, тому перелік цих цілей та ступінь вагомості кожної з них може істотно коливатись у різних людей, тобто є випадковою величиною. Відповідно до цілей буде змінюватися список результатів роботи в (7.5). Аналогічні твердження також стосуються витрат на роботу в виразі (7.5).

Тому, враховуючи мету дослідження, доцільно представити вираз ефективності вибору робочого місця як загальну суму факторів, що враховуються людиною при прийнятті відповідного рішення.

$$E_e = \sum_{i=1}^{n_f} k_i \cdot f_{ei}, \tag{7.6}$$

де n_f – загальна кількість факторів, які враховує людина при виборі робочого місця;

k_i – коефіцієнт значущості для людини i – го фактору вибору робочого місця, значення $k_i > 0$ відносить фактор до результатів роботи, значення $k_i < 0$ – до витрат на неї;

f_i – значення i – го фактору вибору для робочого місця e.

Потенційний, але навряд чи повний, перелік факторів вибору робочого місця складається з характеристик поточного і нового робочого місця людини, транспортних та інших факторів.

I. Характеристики поточного робочого місця:

1. Наявність роботи на момент вибору нової.
2. Адміністративна можливість переходу на нову роботу.
3. Задоволеність існуючою роботою.
4. Погляди близьких на існуючу роботу.

II. Характеристики нового робочого місця:

1. Розмір зарплати.
2. Спосіб нарахування зарплати.
3. Адміністративні умови працевлаштування.

4. Службові обов’язки.
5. Соціальний статус.
6. Назва посади.
7. Графік роботи.
8. Тривалість робочого дня.
9. Інтенсивність праці.
10. Наявність та склад соціального пакета.
11. Наявність та властивості командировок.
12. Ступінь небезпеки робочого місця.
13. Забезпеченість роботи обладнанням.
14. Необхідність застосування власного обладнання та спорядження.
15. Трудовий колектив.
16. Безпосередній керівник.
17. Загальне керівництво підприємством.
18. Робоче місце.
19. Рівень повноважень.
20. Ступінь відповідальності.
21. Ступінь самостійності.
22. Наявність та склад підлеглих.
23. Перспективи службового росту.
24. Напрямок діяльності підприємства.
25. Перспективи підприємства.
26. Власники підприємства.
27. Доступ до фінансових ресурсів.
28. Продуктивність власної праці.
29. Відповідність роботи рівню та напряму освіти.
30. Погляди близьких на нову роботу.
31. Можливість додаткового заробітку.

32. Наявність знайомих або родичів на підприємстві.

III. Транспортні фактори:

1. Час пересування.
2. Вартість пересування.
3. Наявність альтернативних варіантів шляху.
4. Кількість пересадок.
5. Можливість пільгового проїзду.

IV. Інші фактори:

1. Наявність інших претендентів на робоче місце.
2. Імовірність влаштування на роботу.
3. Збитки, пов’язані з переходом на нову роботу.

Фактори доцільно перегрупувати та замість існуючих результатів R_e та витрат C_e звести їх у дві інші складові показника ефективності вибору робочого місця:

– трудність пересування з дому на роботу (з роботи до дому) Θ;

– соціальна ефективність вибору робочого місця Φ_e.

При цьому трудність пересування визначається як

$$\Theta_e = \sum_{i=1}^{n_\theta} k_i \cdot f_{ei}, \tag{7.7}$$

де Θ_e – трудність пересування на роботу при виборі робочого місця e, детермінована величина;

n_θ – кількість транспортних факторів, які враховуються людиною при оцінці трудності пересування.

Соціальна ефективність вибору робочого місця дорівнює

$$\Phi_e = \sum_{i=1}^{n_\varphi} k_i \cdot f_{ei}, \qquad (7.8)$$

де Φ_e – соціальна ефективність вибору робочого місця e, випадкова величина;

n_φ – загальна кількість соціальних факторів, які враховуються людиною при виборі робочого місця e, за виключенням транспортних факторів, $n_\varphi = n_f - n_\theta$.

Оцінка коефіцієнтів значущості транспортних факторів є частиною завдання з моделювання поведінки пасажирів у транспортній системі. На цьому її етапі достатньо того, що всі складові та коефіцієнти значущості трудності пересування на роботу можуть вважатися відомими спеціалістам з транспортного планування для кожної міської кореспонденції. Звідси можна заключити, що трудність пересування з дому на роботу Θ при моделюванні вибору людиною робочого місця являється детермінованою величиною.

Об'єктивна оцінка коефіцієнтів значущості соціальних (нетранспортних) факторів є значно складнішим завданням ніж попередня. Це обумовлено вкрай обмеженою кількістю рішень про зміну роботи для більшості людей та недостатньо чітким уявленням людини про наслідки кожного рішення. Оскільки для формулювання висновків достатньо визначення лише загального характеру соціальної ефективності вибору робочого місця Φ_e. Широкий перелік соціальних (нетранспортних) факторів та відсутність кількісної оцінки значної частини з них додає невизначеності цій змінній. Тому в подальшому соціальна ефективність вибору робочого місця Φ_e вважається випадковою величиною, значення якої формуються під впливом значної кількості факторів.

З врахуванням (7.7), (7.8) та відповідного змісту соціальної та транспортної складової для ефективності вибору робочого місця можна сформувати такий вираз

$$E_e = \Phi_e - \Theta_e. \qquad (7.9)$$

З врахуванням випадкового характеру Φ_e, величина E_e також має випадковий характер.

При наявності виразу (7.9) для визначення ступеня впливу транспортних факторів на результати вибору робочого місця необхідно окреслити характер зміни складових ефективності.

Для цього спочатку треба спростити смислове навантаження трудності пересування на роботу та припустити, що вона пропорційна часу пересування

$$\Theta_e = k_\tau \cdot \tau_e, \tag{7.10}$$

де τ_e – час пересування до робочого місця e, хв.;

k_τ – коефіцієнт пропорційності між трудністю пересування на роботу та часом пересування.

Тоді

$$E_e = \Phi_e - k_\tau \cdot \tau_e. \tag{7.11}$$

Тепер потрібно перейти від загальної ефективності E_e до відносної ефективності вибору робочого місця E_e^τ шляхом ділення всіх складових у (7.11) на коефіцієнт пропорційності між трудністю пересування на роботу та часом пересування k_τ.

$$E_e^\tau = \frac{E_e}{k_\tau} \text{ та } \Phi_e^\tau = \frac{\Phi_e}{k_\tau}, \tag{7.12}$$

де E_e^τ – відносна ефективність вибору робочого місця e в одиницях часу пересування;

Φ^{τ}_{e} – відносна соціальна (не транспортна) ефективність вибору робочого місця e в одиницях часу пересування.

Після переводу (7.12) до відносних величин

$$E^{\tau}_{e} = \Phi^{\tau}_{e} - \tau_{e}. \tag{7.13}$$

Таке спрощення (7.11 – 3.13) залишає незмінним характер складових виразу ефективності та може вважатися припустимим.

Найбільш важливим та складним питанням моделювання тепер являється визначення основної характеристики випадкової величини Φ^{τ}_{e} – її функції розподілу $F_e(\varphi)$ (або функції щільності розподілу $f_e(\varphi)$). Отримання її виду стандартним шляхом, на основі масиву значень випадкової величини, в рамках цієї роботи неможливо, оскільки це питання потребує масштабного самостійного дослідження для формування об'єктивного та достатнього за масштабом набору значень змінної.

Формулювання правдоподібних гіпотез відносно функції щільності розподілу $f_e(\varphi)$ випадкової величини Φ^{τ}_{e} на основі загальних уявлень про пропозиції ринку праці. Завдяки цьому для формулювання висновків відносно ступеня впливу транспортних факторів на результати вибору робочого місця можливо обрати декілька варіантів функції щільності розподілу $f_e(\varphi)$ та провести відповідну оцінку для кожного з цих варіантів. Остаточні висновки можуть бути сформульовані на основі аналізу всіх отриманих результатів з врахуванням їх неповної достовірності.

Досить велика кількість соціальних (нетранспортних) факторів вибору робочого місця, які наведені у переліку, дає підстави для того, щоб найбільш правдоподібною функцією розподілу відносної соціальної ефективності вибору робочого місця вважався закон Гаусса, або нормальний закон. Це обумовлене тим, що нормальне розподілення виникає тоді, коли складається багато незалежних або слабко залежних випадкових величин. Додатковою умовою є приблизно однаковий вплив кожної складової на загальну дисперсію результату. Тоді, якими б не були закони розподілу окремих складових, загальний закон розподілу буде близьким до нормального.

Значна кількість факторів забезпечує можливість використання нормального закону розподілу відносної соціальної ефективності вибору робочого місця, але не гарантує його виконання, оскільки для транспортного процесу характерна різноманітність законів розподілу випадкових величин. Ступінь врахування окремих факторів є індивідуальною рисою людини, тому може істотно коливатись, що приведе до наближення загального розподілу $f_e(\varphi)$ до закону розподілу найбільш впливових її складових. Тому нормальний закон розподілу слід вважати деяким середнім та найбільш імовірним випадком розподілу відносної соціальної ефективності вибору робочого місця, який характеризує “нормальний” стан ринку праці.

Враховуючи це, для отримання повної картини впливу транспортних факторів на результати вибору робочого місця необхідно обрати та обґрунтувати закони розподілу щільності відносної соціальної ефективності робочих місць, які будуть відображати “сприятливий” та “несприятливий” стан ринку праці.

Як закон розподілу щільності відносної соціальної ефективності, що відображає “сприятливий” стан ринку праці, прийнятий рівномірний закон розподілу. Для відображення “несприятливого” стану ринку праці прийнятий показовий (експонентний) закон розподілу, рис. 3.1.

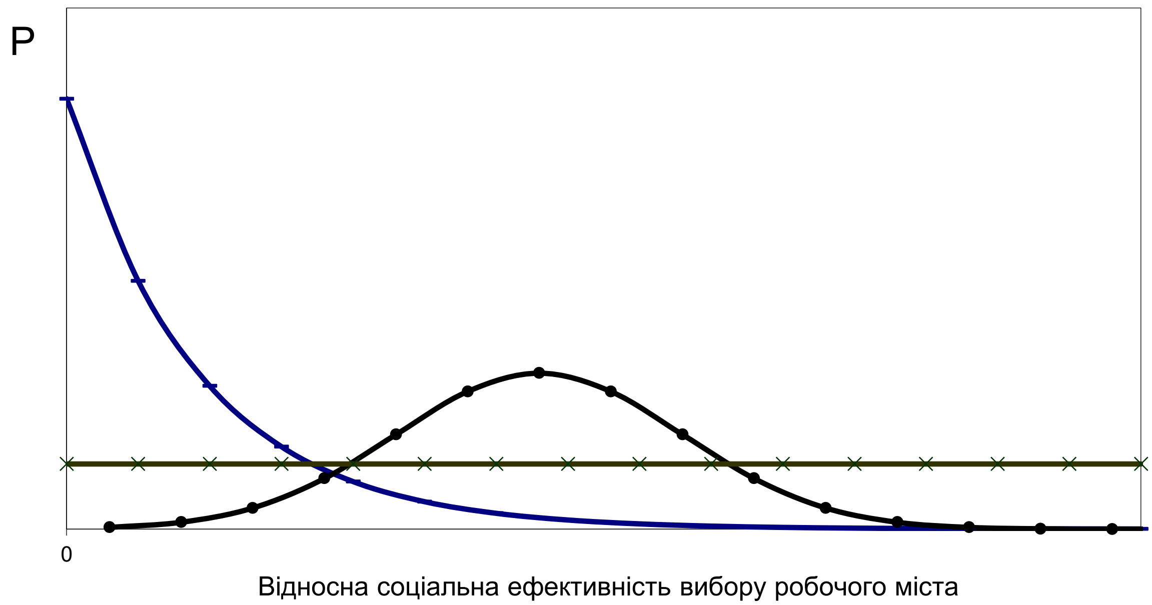

Рис. 3.1 Прийняті варіанти законів розподілу відносної соціальної ефективності вибору робочого місця:

– показовий; – нормальний; – рівномірний розподіли

При показовому законі розподілу потенційні місця роботи, які пропонуються ринком праці, концентруються в зоні низької відносної соціальної ефективності робочих місць для людини. Таке становище вважається в методиці малоймовірною подією, яка має спричинити підвищений вплив транспортних факторів на результати вибору робочого місця.

Концентрація робочих місць в зоні дуже високої соціальної ефективності вважається неправдоподібною подією, тому як “сприятливий” варіант приймається рівномірний закон розподілу відносної соціальної ефективності робочих місць. Рівномірна концентрація робочих місць по всьому діапазону значень відносної соціальної ефективності вважається в методиці малоймовірною подією, яка має спричинити зниження впливу транспортних факторів на результати вибору робочого місця відносно “нормального” стану ринку праці.

Для оцінки параметрів кожного закону розподілу відносної соціальної ефективності необхідно визначити межі значень цієї випадкової величини, які відповідно до її змісту повинні прийматися в одиницях часу пересування.

З врахуванням того, що кожна людина розглядає як альтернативи лише реальні варіанти потенційної роботи та кожний роботодавець повинен забезпечити позитивну привабливість робочого місця, лівою межею відносної соціальної ефективності, тобто його мінімальною привабливістю буде невелике позитивне значення

$$\Phi^{\tau}_{\min} \gtrsim 0, \tag{7.14}$$

де $\Phi^{\tau}_{\min}$ – мінімальне значення відносної соціальної ефективності робочого місця.

Згідно з тим, що відносна соціальна ефективність повинна бути виражена в одиницях часу, тобто порівнюватися з часом пересування, чисельним аналогом виразу (7.14) в методиці приймається таке значення $\Phi^{\tau}_{\min}$, при якому вибір робочого місця не відбудеться навіть при мінімальному часі пересування на роботу

$$\Phi^{\tau}_{\min} = \tau_{\min}, \tag{7.15}$$

Під правою межею значення відносної соціальної ефективності розуміється максимальна привабливість потенційного місця роботи, отримання пропозиції про яке можливо лише з низькою імовірністю, що є характерним для всіх обраних для опису відносної соціальної ефективності законів розподілу. При порівнянні з часом пересування приймається, що максимальна відносна соціальна ефективність має значення, при якому час пересування на роботу практично не впливає на вибір робочого місця або, інакше кажучи, максимальна відносна соціальна ефективність суттєво перевищує максимальний час пересування

$$\Phi^{\tau}_{\max} >> \tau_{\max}\,, \tag{7.16}$$

де $\Phi^{\tau}_{\max}$ – максимальне значення відносної соціальної ефективності робочого місця в одиницях часу.

Оскільки порівняння конкурентних варіантів робочих місць здійснюється на основі загальної ефективності вибору робочого місця (7.5), порівнювати необхідно саме ці величини. Межі розподілу випадкової величини загальної відносної ефективності вибору робочого місця E^{τ} визначаються на основі (7.13)

$$E^{\tau} \in \left[\Phi^{\tau}_{\min} - \tau_{\min}; \Phi^{\tau}_{\max} - \tau_{\max}\right] \tag{7.17}$$

З врахуванням (7.15) попередній вираз можна спростити

$$E^{\tau} \in \left[0; \Phi^{\tau}_{\max} - \tau_{\max}\right]. \tag{7.18}$$

На основі обмеження (7.18) можливе визначення необхідних параметрів прийнятих законів розподілу щільності випадкової величини загальної відносної ефективності вибору робочого місця $f(\varepsilon)$ при відомих значеннях часу пересування.

Для оцінки впливу часу пересування на вибір робочого місця необхідно обрати показник, який враховує випадковий характер процедури вибору, обумовлений випадковими характеристиками пропозицій на ринку праці. Це обумовлює необхідність порівняння двох ймовірностей – імовірності вибору робочого місця з врахуванням різниці в часі пересування $\Delta\tau$ та без її врахування, різниця між якими дозволяє визначити імовірність вибору робочого місця e, з двох альтернатив e та f внаслідок транспортних факторів.

$$\Delta P = P\left\{E_e > E_f - \Delta\tau\right\} - P\left\{E_e > E_f\right\}$$

, (7.19)

де ΔP – імовірність вибору робочого місця e, з двох альтернатив e та f, обумовлена більш коротким часом пересування на роботу;

$\Delta\tau$ – різниця в часі пересування на робочі місця e та f;

$P\left\{E_e > E_f - \Delta\tau\right\}$ – імовірність вибору робочого місця e з двох альтернатив e та f, з врахуванням різниці в часі пересування $\Delta\tau$;

$P\left\{E_e > E_f\right\}$ – імовірність вибору робочого місця e з двох альтернатив e та f, без врахування різниці в часі пересування $\Delta\tau$.

$$\Delta\tau = \tau_f - \tau_e, \tag{7.20}$$

де τ_e, τ_f – час пересування на робочі місця e та f відповідно.

Загальна методика визначення величини імовірності вибору робочого місця з врахуванням економії часу пересування на роботу заснована на використанні формули повної імовірності для безперервної випадкової величини.

З математичної точки зору імовірність вибору робочого місця e, з врахуванням різниці в часі пересування між робочими місцями e та f, означає імовірність того, що випадкове значення загальної ефективності робочого місця e на момент прийняття рішення про наступне місце роботи буде вище, ніж випадкове значення загальної ефективності робочого місця f з врахуванням відносної економії часу пересування в район e по зрівнянню з районом f. З метою спрощення запису слід ввести спеціальне позначення для другої величини

$$\Psi = E_f - \Delta\tau, \tag{7.21}$$

де Ψ – загальна ефективність робочого місця f з врахуванням відносної економії часу пересування в район e по зрівнянню з районом f, випадкова величина.

Шукана імовірність тепер виглядає як

$$P\left\{E_e > E_f - \Delta\tau\right\} = P\left\{E_e > \Psi\right\} \tag{7.22}$$

Ця імовірність містить в собі умову порівняння двох випадкових величин, тобто умовну імовірність події при відомому значенні випадкової величини, з якою проводиться порівняння. Згідно з формулою повної імовірності для безперервної випадкової величини, повна імовірність вибору e – го робочого місця визначається за допомогою інтегрального виразу.

$$P\left\{E_e > \Psi\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\left\{E_e > \psi\right\} \cdot f(\psi) d\psi\,, \tag{7.23}$$

де ψ – числова реалізація випадкової величини Ψ;

$f(\psi)$ – функція щільності розподілу випадкової величини ψ.

Підінтегральний вираз представляє собою імовірність виконання умови (7.22) для прийнятого значення ψ безперервної випадкової величини Ψ, яка розподілена за відомим законом $f(\psi)$, помножену на $f(\psi)$. Інтегральні межі приймаються з функції щільності розподілу безперервної випадкової величини Ψ таким чином, щоб охопити весь спектр її значень.

Імовірність виконання умови (7.22) для прийнятого значення ψ, це імовірність того, що випадкове значення ε_e попаде в інтервал $]\psi;\infty]$.

$$P\{E_e > \psi\} = P\{\varepsilon \in]\psi;\infty[\}. \tag{7.24}$$

Згідно з визначенням функції (інтегральної функції) розподілу безперервної випадкової величини [273], для E_e вона записується як

$$F(\varepsilon) = P\{\varepsilon \in]-\infty;\psi]\} = \int_{-\infty}^{\psi} f(\varepsilon)d\varepsilon, \tag{7.25}$$

де $F(\varepsilon)$ – функція розподілу випадкової величини ε;

$f(\varepsilon)$ – функція щільності розподілу випадкової величини ε.

Тоді (7.22) записується як

$$P\{E_e > \psi\} = 1 - P\{\varepsilon \in]-\infty;\psi]\} = 1 - F(\psi). \tag{7.26}$$

Необхідно також прояснити характер впливу константи $\Delta\tau$ на функцію щільності розподілу випадкової величини $f(\psi) = f(\varepsilon - \Delta\tau)$. Такий доданок до випадкової величини означає, що значення функції щільності розподілу ε та ψ повинні співпадати.

$$f(\psi) = f(\varepsilon) \tag{7.27}$$

або, з врахуванням (7.21)

$$f(\varepsilon - \Delta\tau) = f(\varepsilon).$$

Виконання цього виразу забезпечується зміщенням розподілу випадкової величини ε вправо на величину $\Delta\tau$, яке ілюструється на рис. 3.2.

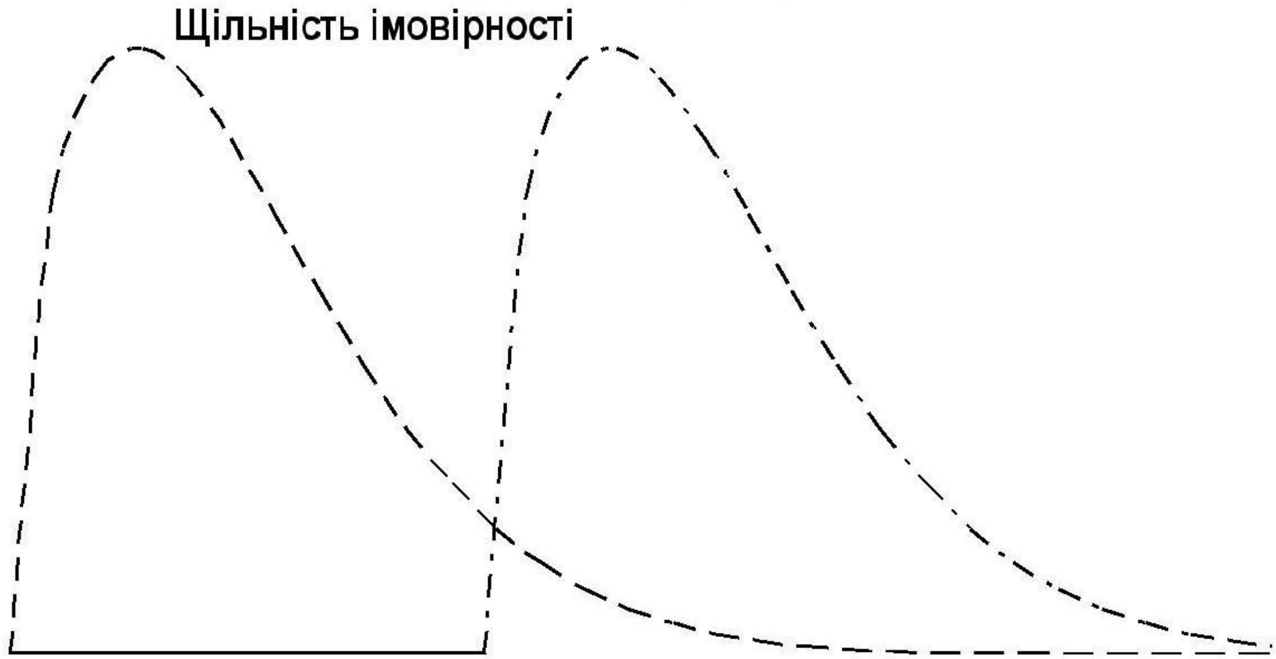

Рис. 3.2 – Взаємне розміщення функції щільності розподілу ε та $\psi = \varepsilon - \Delta\tau$:

– – – f(ε) ; – · – f(ε–Δτ); —Δτ

Саме розподілена в нових межах випадкова величина ε забезпечує виконання (7.27) та можливість вирішення (7.23), тобто отримання шуканої імовірності вибору робочого місця з врахуванням різниці в часі пересування.

Це зміщення означає зміну меж розподілу ψ відносно ε

$$a_\psi = a_\varepsilon + \Delta\tau\,; \qquad b_\psi = b_\varepsilon + \Delta\tau\,, \tag{7.29}$$

де a_ε, a_ψ – нижня межа розподілу випадкових величин ε та ψ відповідно;

b_ε, b_ψ – верхня межа розподілу випадкових величин ε та ψ відповідно.

Наведена методика дає можливість отримання обох складових виразу (7.19) та складання аналітичної залежності виду $\Delta P = f(\Delta\tau)$ для кожного варіанту розподілу загальної ефективності вибору робочого місця та побудови відповідної функції, так як друга складова виразу (7.19) є частковим випадком першої складової при $\Delta\tau = 0$.

З врахуванням (7.20) різниця у часі пересування на робочі місця e та f може коливатися в наступних межах:

$$\Delta\tau \in \left[0; \tau_{\max} - \tau_{\min}\right], \tag{7.28}$$

тому для кожної з отриманих функцій можливе отримання максимального значення імовірності вибору робочого місця, обумовленої більш коротким часом пересування на роботу $\Delta P_{\max}$. Саме це значення може слугувати основою для формулювання висновків відносно ступеню впливу транспортних факторів на імовірність вибору робочого міста.

З одного боку при наявності МПК, отриманої за допомогою масштабних натурних обстежень, яку з високим ступенем вірогідності можна вважати реальним відображенням потреб населення у пересуваннях на період проведення обстеження, оцінка точності є необхідним етапом перевірки якості теоретичних методів моделювання МПК. Справа у тому, що всі відомі натурні методи обстежень потребують значних трудових та часових витрат на їх реалізацію. Це обумовлене властивостями об’єкту моделювання – динамічним характером, великою кількістю ступенів свободи, значними масштабами та іншим, які наряд чи дозволять у доступному для огляду періоді подолати цей недолік. З врахуванням існування значного періоду часу між початком обстеження та отриманням його результатів, який вимірюється роками, результати натурних обстежень значно втрачають свою актуальність на момент реалізації керуючих дій, які виробляються за допомогою натурної МПК. Для отримання МПК, яка відповідає періоду реалізації керуючих дій, об’єктивно необхідним є використання теоретичних методів моделювання, реальна перевірка якості котрих можлива лише за умови наявності спеціальних методів оцінки точності матриць.

З іншого боку, при відсутності натурної МПК, в якості базової матриці, з якою порівнюється інший варіант матриці, може виступати будь-якої варіант розподілу місткостей ТР між кореспонденціями. При цьому оцінка точності моделі потреб населення у пересуваннях означає оцінку розбіжностей між двома варіантами матриць. В такому випадку відсутність спеціальних методів оцінки точності матриць призводить до неможливості зробити висновки про суттєвість розбіжностей між різними варіантами МПК.

Існуючи приклади оцінок точності МПК в основному мають лінійний характер, тому не дозволяють зробити обґрунтованих висновків про стан матриці. Наприклад, наведені цифри про 200 відсоткову розбіжність реальних та розрахункових значень кореспонденції можна вважати більше ніж значними, якщо мова йде про великі кореспонденції. Але, якщо реальне значення кореспонденції дорівнює одному, а розрахункове значення трьом, навряд чи такі розбіжності можуть бути суттєвими при будь-якому цільовому призначенні МПК.

Слід також враховувати, що при відомих та жорстких місткостях ТР з кількості відправлень та прибуттів (7.3), розбіжність в одному значенні кореспонденції в порівнювальних матрицях означає наявність як мінімум трьох розбіжностей в інших кореспонденціях, одної в тому же рядку, та двох в іншому. Це ствердження ґрунтується на аналогії МПК з „ транспортною таблицею ” в лінійній транспортній задачі. Тому, при оцінці розбіжностей матриць, необхідно враховувати складний характер зв’язків в МПК, обумовлений наявністю системи обмежень (7.3).

При оцінці точності моделювання потреб населення у пересуваннях необхідно також враховувати територіальний аспект, тобто ступінь складності пересування між ТР. Мається на увазі, що помилка в значенні кореспонденції, яка є суттєвою для результатів транспортних розрахунків при значної відстані між районами прибуття (або відправлення), при незначної відстані між районами може не оказати помітного впливу на результати моделювання та розрахунків.

Завдяки переліченим особливостям питання оцінки розбіжностей варіантів МПК, підвищенню функціональності оцінки також не зможе сприяти використання стандартних статистичних показників ступеню відхилу наборів даних таких як дисперсія або помилка апроксимації, так як вони не враховують ні матричного характеру кореспонденцій, ні територіального розміщення джерела розбіжності.

Тому побудова методів оцінки точності моделі потреб населення у пересуваннях має ґрунтуватися на функціональному призначенні МПК, тобто розгляді підсумків моделювання в якості проміжних результатів вирішення задачі більш високого рівня.

Слід відзначити, що МПК використовується в якості вихідних даних при вирішенні задач лише на загальноміському рівні, тобто коли замовником роботи являється міська влада, або громадські об’єднання, які представляють інтереси пасажирів МПТ. При розгляді системи МПТ з точки зору виконавців роботи на маршрутах, звичайно вирішуються локальні питання окремих транспортних підприємств, які не потребують настільки масштабної інформації. Серед всіх загальноміських задач підвищення ефективності функціонування систем масового пасажирського транспорту можна виділити три рівня планування: стратегічне, поточне та оперативне.

Стратегічною задачею вважається визначення обсягів та напрямків інвестування в розвиток системи МПТ, тобто в розширення комунікацій міських видів транспорту, в розвиток матеріальної бази комунальних транспортних підприємств та придбання транспортних засобів для них.

Поточне планування відповідає вирішенню задачі маршрутизації, яка провадиться за рішенням замовника регулярних перевезень з кінцевою метою складання реєстру маршрутів.

Оперативне планування роботи загальноміської системи МПТ в основному полягає у складанні розкладів руху транспортних засобів на маршрутах, вирішенні поточних питань організації руху в змінних умовах транспортної мережі.

Зі скороченням часового періоду планування роботи МПТ підвищується ступінь деталізації розглянутих питань та, відповідно, зростає рівень вимог до точності. Тож для розробки методів оцінки точності МПК необхідно обрати найбільш детальний рівень планування, на якому вона потрібна та розпочати розгляд з оперативного планування.

Цей рівень пред'являє найбільш високі вимоги до точності МПК, якщо вирішувати його завдання на основі транспортної моделі ММ. Але до такого підходу в нашої країні ще ні готові ні практичні робітники транспортних служб міських органів самоврядування ні наукові дослідники в сфері МПТ. Перші не мають відповідної кваліфікації та інструментарію, а науковці ще не мають достатніх знань для моделювання матриць пасажирських кореспонденцій, різноманітних за цілями пересувань.

Як відзначалось його метою є розробка теоретичних основ моделювання потреб населення міст лише в трудових пересуваннях. Питання моделювання потреб населення в культурно-побутових пересуваннях значно менше вивчене та поки ще остається перспективним етапом досліджень. Але матриця трудових пересувань не дозволяє вирішувати вказані задачі оперативного управління системою МПТ в повному обсязі, із-за часової обмеженості періоду її реалізації.

В той же час без МПК неможливо якісно вирішити основну задачу поточного планування роботи системи МПТ – розробку раціонального варіанта ММ. На цьому рівні матриця трудових пересувань надає достатню інформацію для дослідників та практичних робітників галузі, яка дозволяє проводити зважену оцінку ефективності альтернативних варіантів розвитку системи МПТ.

В зв’язку з цим поточне планування являється основним рівнем, на якому потрібна якісна МПК та саме маршрутизація МПТ повинна виступати в якості головного функціонального призначення моделі потреб населення у пересуваннях. Це означає що ступень суттєвості розбіжностей між різними варіантами МПК необхідно оцінювати впливом відхилень в значеннях матриці на критерій ефективності маршрутної системи та імовірність прийняття різних рішень відносно варіантів розвитку ММ при використанні різних МПК.

В якості критерію ефективності маршрутної системи при оцінці точності МПК доцільно прийняти загальний час пересування. З одного боку він є найбільш поширеним варіантом критерію при вирішенні задачі маршрутизації з позицій розглянутих замовників. З іншого боку час пересування дозволяє повністю врахувати територіальний фактор при оцінці точності моделі потреб населення у пересуваннях, якщо в якості основної характеристики трудності пересування також використовувати його загальний час, з врахуванням всіх елементів витрат часу пасажирами на пересування.

Тема 8. Аналітичне моделювання процесів функціонування місць пересічення потоків учасників руху

Моделі затримки й черги транспортних засобів припускають, що всі транспортні засоби, що прибувають до пересічення, розміщаються на стоп-лінії. У вільних умовах руху дане допущення є прийнятним. В умовах насиченого руху стає важливим не тільки кількість автомобілів у черзі, але і її просторово-тимчасовий розподіл. Необхідність обліку просторово-тимчасового розподілу черги по транспортному зв'язку розглянемо на прикладі, наведеному на рис. 8.1. Уведемо наступні позначення для опису динаміки черги: fin - положення фронту черги, м; fout - положення фронту від'їзду транспортних засобів, що визначає крапку від'їзду чергового транспортного засобу. Положення фронту черги f_{in} визначає крапку зупинки, що прибувають транспортних засобів.

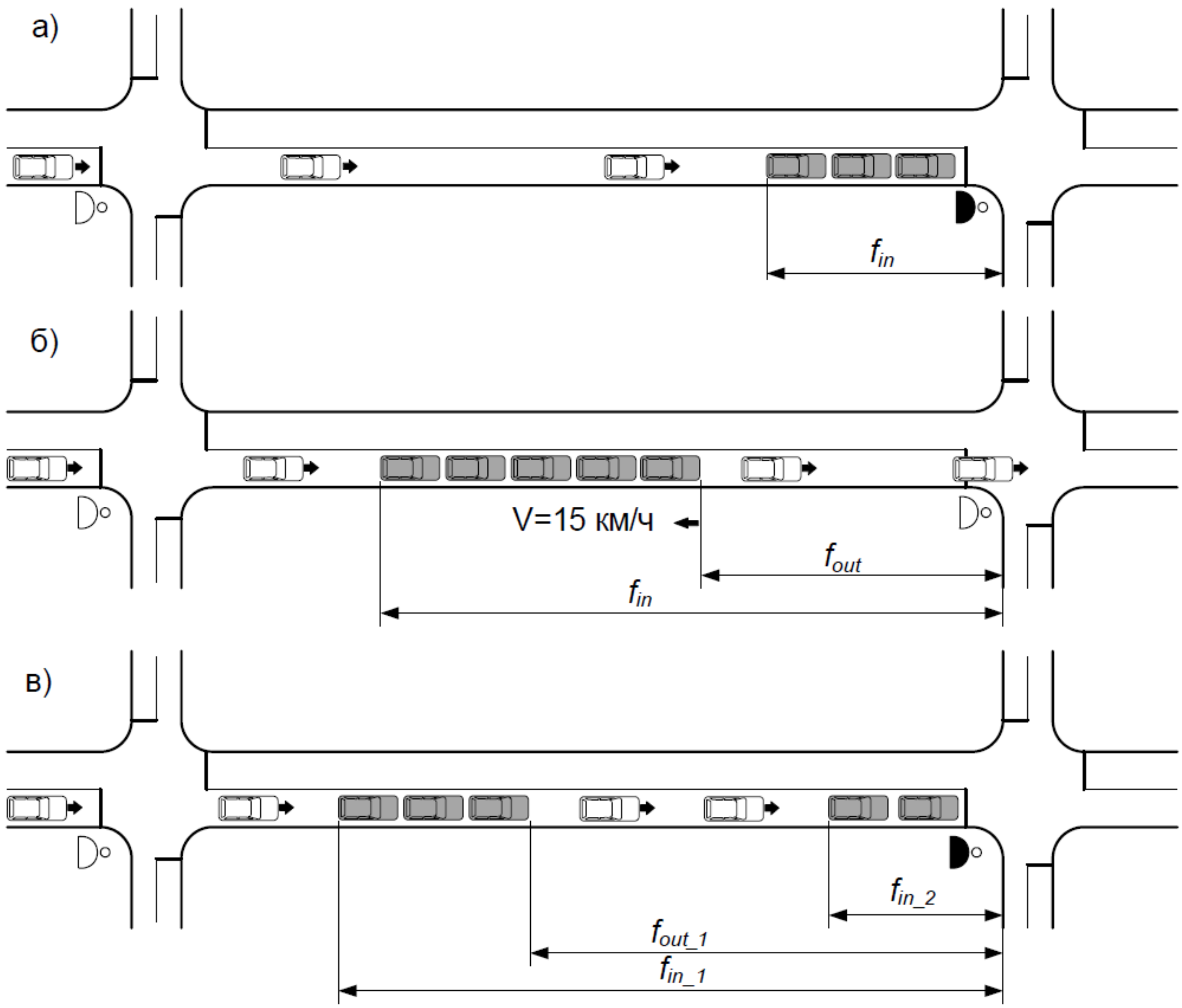

Рисунок 8.1 – Динаміка утвору черги при насиченому русі

При відсутності залишкової черги, у момент включення заборонного сигналу формується черга, фронт якої в дискретному виді визначається вираженням (рис. 8.1):

$$f_{in}(k+1) = f_{in}(k) + q(k) \cdot L_{\text{twch}} \cdot \Delta \tag{8.1}$$

де $f_{in}(k)$ - положення фронту черги в теперішній момент, м; $f_{in}(k+1)$ - положення фронту черги в наступний момент, м; Δ - крок моделювання, с; L_{vech} - середній динамічний габарит автомобіля в черзі, м; q(k) - інтенсивність руху, авт/с.

У зазначених умовах положення фронту черги також може бути визначене як:

$$f_{in}(k+1) = Q(k+1) \cdot L_{vech} \tag{8.2}$$

При включенні дозволяючого сигналу від'їжджаючі транспортні засоби формують фронт від'їзду f_{out} (рис. 8.1). При цьому черга розпадається на дві частини. Першу частину становлять нерухливі транспортні засоби, другу ті, що рухаються от фронту роз'їзду до стоп-лінії. Можемо записати наступне вираження, що визначає положення фронту від'їзду:

$$f_{\text{out}}(k+1) = f_{\text{out}}(k) + V_{\text{out}} \cdot \Delta \tag{8.3}$$

де V_{out} - швидкість поширення фронту від'їзду. Динаміка f_{out} визначається особливостями руху транспортних коштів по смузі без можливості здійснення обгону - рух n+1 автомобіля можливо після того, як почне рух n автомобіль.

Динаміка f_{out} визначається особливостями руху транспортних коштів по смузі без можливості здійснення обгону - рух n+1 автомобіля можливо після того, як почне рух n автомобіль.

Відповідно швидкість поширення фронту від'їзду може бути визначена як:

$$V_{\text{out}} = \frac{L_{\text{vech}}}{\tau_{\text{out}}} \tag{8.4}$$

При середньому динамічному габариті автомобіля 5,3 м і часу реакції водія 1,2 зі швидкість поширення фронту від'їзду складе 4,42 м/с (15,9 км/ч). Дані натурних досліджень, наведені в показали, що швидкість поширення фронту від'їзду постійна й у середньому становить V_{out}=15 км/ч. З урахуванням стабільності V_{out} формулу (5.61) запишемо в такий спосіб:

$$f_{\text{out}}(k+1) = f_{\text{out}}(k) + 4{,}167 \cdot \Delta \tag{8.5}$$

Слід зазначити, що при включенні дозволяючого сигналу світлофора (крапка b на рис. 8.2) кількість автомобілів у черзі починає скорочуватися, в той час як положення фронту черги продовжує збільшуватися. Відповідно вираження (f_{in} (k +1)) кількість, що містить, автомобілів у черзі, уже не може бути використане для обчислення фронту черги. Зникнення фронту черги, і відповідно початок руху всіх транспортних засобів (крапка *a* на рис. 8.2) відбувається при виконанні умови:

$$f_{in}(k) = f_{\text{out}}(k) \tag{8.6}$$

З урахуванням f_{in} (k) положення фронту черги буде визначатися в такий спосіб:

$$f_{\text{in}}(k+1) = \begin{cases} 0 \text{ при } f_{\text{оит}}(k) = f_{\text{in}}(k) \\ f_{\text{in}}(k) + q(k) \cdot L_{\text{vech}} \cdot \Delta \end{cases} \tag{8.7}$$

Відзначимо, що черга транспортних засобів після зникнення фронту черги продовжує існувати (на ділянці від крапки *a* до mQ(k) > 0).

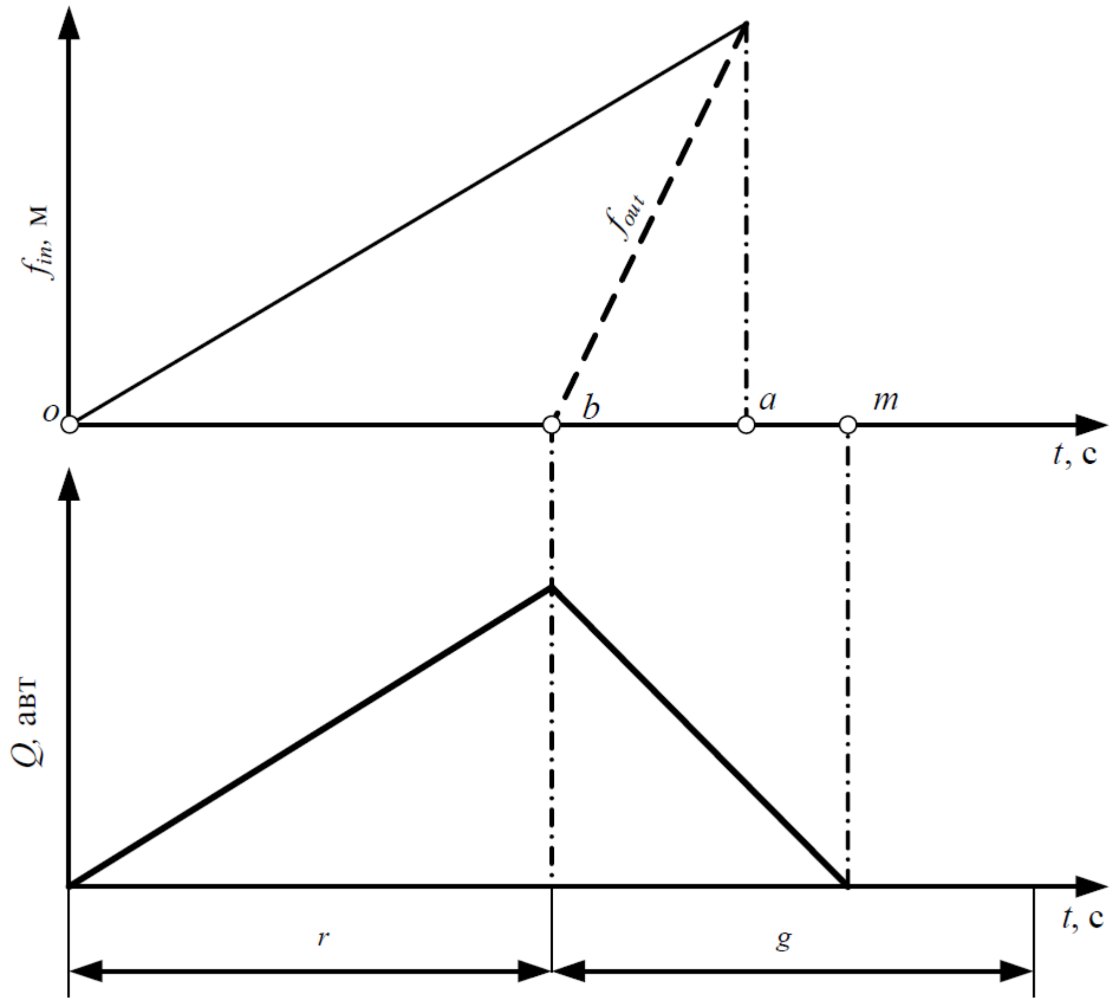

Рисунок 8.2 – Діаграма співвідношення черги транспортних засобів і положення фронту черги

Вимикання дозволяючого сигналу світлофора знову ініціює процес утвору фронту черги. При досить великій довжині перегону й інтенсивності руху можливо одночасний наявність двох і більш фронтів черги й роз'їзду на перегоні (рис. 8.1в). Таким чином, кожний світлофорний цикл ініціює на транспортному зв'язку формування власного фронту утвору й роз'їзду черги. Сформулюємо умову блокування вхідних у перегін транспортних зв'язків з обліком наведених вище залежностей:

$$f_{im}(k) > L_{edg} \tag{8.8}$$

де L_{edg} - довжина перегону, м.

Вираження ($f_{in}(k)$) визначає умова блокування вхідних транспортних зв'язків у довільний момент часу, у тому числі й при розв'язному сигналі світлофора. Визначимо момент зникнення фронту черги і його положення при цьому на транспортному зв'язку. Виділимо в циклі регулювання два характерні моменти часу. У перший момент часу включений заборонний сигнал світлофора й формується фронт черги:

$$f_{in}^{I} = Q_o \cdot L_{vech} + \sum_{r}^{i=0} q_i \cdot L_{vech} \tag{8.9}$$

де Q_o - залишкова черга на зв'язку, авт; q_i - кількість прибулих автомобілів в інтервалі i, авт; r - тривалість заборонного сигналу.

У другий період включається розв'язний сигнал і положення фронту черги з обліком (f_{in}) буде визначено в такий спосіб:

$$f_{in}^{II} = Q_o \cdot L_{vech} + \sum_{b}^{i=0} q_i \cdot L_{vech} + \sum_{a}^{j=b} q_j \cdot L_{vech} \tag{8.10}$$

де a - тривалість дозволяючого сигналу, під час якого існує фронт черги.

Момент зникнення фронту черги визначається положенням крапки a, обчисливши яку можемо розв'язати поставлене завдання. Згідно рис. 8.2, крапка a може бути знайдена з вираження:

$$f_{\text{out}} = V_{\text{out}} \cdot (a - b) \tag{8.11}$$

Одержимо рівняння:

$$V_{\text{out}} \cdot (a - b) = Q_o \cdot L_{\text{vech}} + \sum_{i=0}^{b} q_i \cdot L_{\text{vech}} + \sum_{j=b}^{a} q_j \cdot L_{\text{vech}} \tag{8.12}$$

Розв'язок даного рівняння відносно а при завданні інтенсивності руху у вигляді циклічних профілів можливо чисельними методами.

Прийнявши допущення про рівномірний характер розподілу інтенсивності руху в циклі регулювання, перетворимо попереднє рівняння до наступного виду:

$$V_{\text{out}} \cdot (a-b) = Q_o \cdot L_{\text{vech}} + q \cdot b \cdot L_{\text{vech}} + q \cdot (a-b) \cdot L_{\text{vech}} \tag{8.13}$$

де q - середня інтенсивність руху в циклі регулювання, авт/с.

Вирішуючи попереднє рівняння відносно *а* одержимо:

$$a = \frac{\left(Q_o + q \cdot b\right) \cdot L_{vech}}{V_{out} - q \cdot L_{vech}} + b \tag{8.14}$$

Максимальне видалення фронту черги від стоп-лінії F^{in} у світлофорному циклі будемо обчислювати як:

$$F^{in} = a \cdot q \cdot L_{vech} \tag{8.15}$$

або з урахуванням формули (*а*):

$$F^{in} = \left[\frac{\left(Q_o + q \cdot b\right) \cdot L_{vech}}{V_{out} - q \cdot L_{vech}} + b \right] \cdot q \cdot L_{vech} \tag{8.16}$$

При використанні сигнальних планів гарантувати відсутність блокування транспортному зв'язку можна при включенні дозволяючого сигналу із запізнюванням, рівним часу поширення фронту роз'їзду черги по всьому транспортному зв'язкові:

$$\delta_{sat} = \frac{L_{edg}}{4,167} \tag{8.17}$$

де δ_{sat} - зрушення включення дозволяючого сигналу при заторі. Використання зрушення включення дозволяючого сигналу світлофорів, обчисленого згідно з вираженням (δ_{sat}), дозволить виключити блокування магістрального напряму.

Оцінка залишкової черги.

Виміру стану транспортного потоку виконуються детекторами транспорту, принцип роботи й технічні можливості. У незалежності від використовуваної технології виявлення транспортних засобів, детектори транспорту дозволяють виконувати точкову оцінку наступних параметрів транспортного потоку:

- інтенсивності руху у вигляді посекундного профілю q(t) або усереднених значень $q = \sum q(t)$

- середньої швидкості транспортного потоку v;

- зайнятості контрольованого перетину $\varphi = \sum t_{\text{vech}} / t$ (t_{vech} - час знаходження автомобілів у зоні контролю, t - тривалість спостереження).

Необхідна для виконання обчислень затримки транспортних засобів величина залишкової черги Q_o не може бути безпосередньо обмірювана детекторами транспорту. Вона може бути обчислена, враховуючи закономірності формування й роз'їзду черги. Розглянемо функціонування детектора транспорту, розташованого на відстані L_{BQ} від стоп-лінії (рис. 8.2). Обчислення залишкової черги може бути виконане двічі за цикл регулювання в характерні моменти часу.

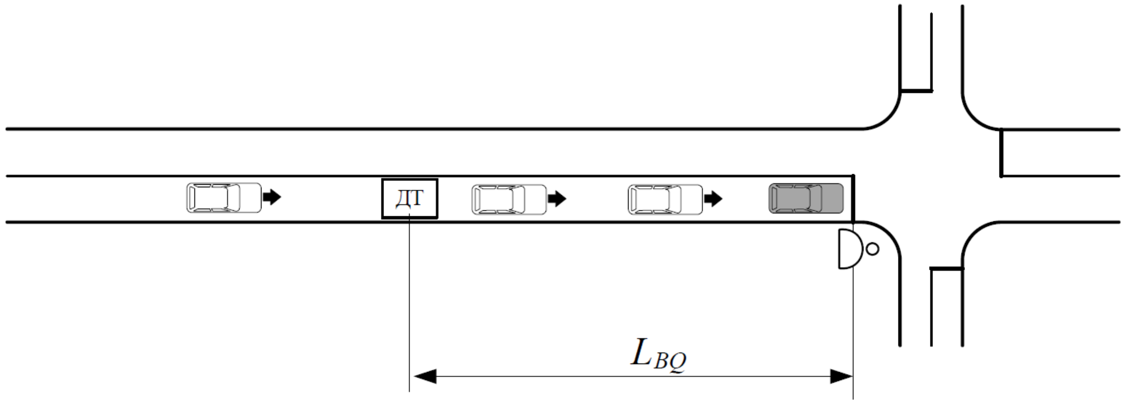

Рисунок 8.3 – Схема до визначення залишкової черги за допомогою детектора транспорту

Перший раз - у момент досягнення фронтом черги детектора транспорту при включенні заборонного сигналу, другий - у момент роз'їзду черги на розв'язний сигнал. Розглянемо докладніше кожний із зазначених варіантів оцінки величини залишкової черги Q_o. При включенні заборонного сигналу світлофора, як відзначено раніше, формується фронт черги, що поширюється від стоп-лінії в напрямку детектора транспорту. Положення фронту черги визначається вираженням (F^{in}). Підставимо в ліву частину зазначеного вираження положення детектора транспорту LBQ:

$$L_{BQ} = \left(Q_o + q \cdot t \right) \cdot L_{vech} \tag{8.18}$$

З отриманого рівняння виразимо шукану величину залишкової черги Q_o:

$$Q_o^{obs} = \max\left(0, \frac{L_{BQ}}{L_{\mathrm{vech}}} - \overset{\text{Ï}}{q} \cdot t \right) \tag{8.19}$$

При завданні інтенсивності руху у формі циклічного профілю величина залишкової черги Q_o обчислюється по формулі:

$$Q_o^{obs} = \max\left(0, \frac{L_{BQ}}{L_{vech}} - \sum_{T}^{t_c=g} q(t)\right) \quad (8.20)$$

При включенні дозволяючого сигналу роз'їзд черги характеризується наявністю потоку насичення, що дозволяє ідентифікувати його закінчення по тимчасових інтервалах між транспортними засобами

$$f^{\text{clear}}\left(\Delta_{\text{vech}}\right) = \begin{cases} 1 \text{ если } \Delta_{\text{vech}} > \Delta_{\text{crit}} \\ 0 \text{ иначе,} \end{cases} \quad (8.21)$$

де Δ_{vech} - інтервал між автомобілями, з; Δ_{crit} - критичний інтервал, що визначає наявність потоку насичення, с.

Кількість автомобілів, зупинених за цикл регулювання, буде обчислено в такий спосіб:

$$Q^{obs} = \frac{L_{BQ}}{L_{vech}} + \sum_{t_{clom}}^{t=g} q(t) \quad (8.22)$$

де t_{clear} - час роз'їзду черги в зоні детектування, з; q(t) - кількість автомобілів, що проїхали через детектор транспорту за цикл вимірів, авт/с.

Величину залишкової черги знайдемо як різницю між спостережуваною чергою Q^{obs} і очікуваної Q^p при відсутності залишкової черги:

$$Q_o^{obs} = Q^{obs} - Q^p \quad (8.23)$$

Величину очікуваної черги Q_p обчислимо

$$Q^{p} = PF_{2}\frac{\frac{v_{L}C}{3600}\left(1-\frac{g}{C}\right)}{1-\min\left(1, X_{L}\right)\frac{g}{C}} + 0.25\cdot c_{L}T\left[\left(X_{L}-1\right)+\sqrt{\left(X_{L}-1\right)^{2}+\frac{8k_{B}X_{L}}{c_{L}T}}\right] \tag{8.24}$$

Отримані вираження дозволяють визначити як величину залишкової черги, так і кількість зупинених автомобілів. При виборі місця установки детекторів транспорту слід ураховувати наступні фактори:

- оцінка залишкової черги можлива тільки при досягненні фронтом черги детектора транспорту;

- довжина оцінюваної залишкової черги не може перевищувати відстані від стоп-лінії до крапки установки детектора транспорту.