Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТЕМАТИЧНА ПІДГОТОВКА В ГАЛУЗЕВОМУ УНІВЕРСИТЕТІ : МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених 27 березня 2026 року

Харків
ХНАДУ
2026

Всеукраїнська науково-методична конференція здобувачів вищої освіти і молодих вчених проведена згідно з планом проведення міжнародних, всеукраїнських та науково-методичних конференцій та семінарів ХНАДУ у 2026 р. **(**Посвідчення УкрІНТЕІ № 976 від «11» грудня 2025 року**)**

Фундаментальна математична підготовка в галузевому університеті: методичні рекомендації здобувачів вищої освіти : матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених. – Харків: ХНАДУ. – 2026. – 107 с.

В збірку включені матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених, в яких розглянуто складні питання класичної математики очима здобувачів, професійно-прикладні математичні задачі як основа фахової підготовки здобувача, проблеми дистанційного опанування математичних дисциплін.

Збірник матеріалів розраховано на здобувачів бакалаврату, магістратури, аспірантів і фахівців, діяльність яких пов’язана з науково-методичною роботою в різних галузях сучасної науки і освіти. Він може бути корисним методистам, викладачам середніх і вищих навчальних закладів, аспірантам та стажерам.

СКЛАДНІ ПИТАННЯ КЛАСИЧНОЇ МАТЕМАТИКИ ОЧИМА ЗДОБУВАЧІВ

ПРОФЕСІЙНО-ПРИКЛАДНІ МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ ЯК ОСНОВА ФАХОВОЇ ПІДГОТОВКИ ЗДОБУВАЧА.

ПРОБЛЕМИ ДИСТАНЦІЙНОГО ОПАНУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

СКЛАДНІ ПИТАННЯ КЛАСИЧНОЇ МАТЕМАТИКИ ОЧИМА ЗДОБУВАЧІВ

Бабаджанян Д. Р. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Сайгак О. О. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – ст. викл. Нестеренко В. О.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗАНІ ДЕЯКИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

При розв'язуванні деяких функціональних рівнянь іноді виникають випадки, коли вони містять складені функції, або функції різного утворення. Наприклад, степенево-показникові функції, показникові та лінійні функції, або інші функції. Такі рівняння не мають якогось усталеного алгоритму їх розв'язання. Тому виникає потреба в якомусь комбінованого підходу до розв'язання, який залучає дослідження функцій за допомогою диференціального числення. Це може бути й дослідження на монотонність (інтервали монотонності), на екстремум функції.

Наприклад, для рівняння вигляду

$$f(x) = g(x)$$

на певному інтервалі ми дослідили обидві функції на монотонність, і нехай функція $f(x)$ монотонно зростає, а функція $g(x)$ монотонно спадає, або є сталою, то на цьому інтервалі задане рівняння має лише єдиний корінь. Тобто, якщо, наприклад, ми бачимо розв'язок, то він є тим єдиним розв'язком. Треба зауважити, що без попереднього дослідження ми не маємо права сказати , що ми маємо єдиний корінь рівняння.

Застосуємо такий підхід до прикладів.

Приклад 1. Знайти значення параметра a , при яких рівняння:

$$x^x = a,$$

має один, два та більше коренів, або їх немає.

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = f(x) = x^x$ і дослідимо її не монотонність та екстремум. Область визначення $D(f) = (0;\ +\infty)$.
Знайдемо похідну цієї функції, для цього зробимо деякі перетворення.

$$y = f(x) = x^x = e^{lnx^x} = e^{x\,lnx},$$

$$y' = e^{xlnx}\left(1 \cdot lnx + x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{xlnx}(lnx + 1).$$

Оскільки, $e^{xlnx} > 0$, як показникові функція, то знак похідної збігається зі знаком множника $lnx + 1$.

$$y' = 0,\ \ lnx + 1 = 0,\ \ lnx = -1, x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Тоді при $x > \frac{1}{e}$, $lnx > -1$, $y' > 0$, ,

функція $f(x)$ зростає на $(\frac{1}{e}; +\infty)$

при $x \in \left(0; \frac{1}{e}\right), lnx < -1$, функція спадає.

В точці $x = \frac{1}{e}$, похідна при переході через цю точку змінює знак з - на +, є екстремум – min, $y_{min} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0{,}692.$

Тоді маємо для $x \in (0; \frac{1}{e}]$, $f(x)$ спадає, та, оскільки $\lim_{x \to +0} x^x = 1$, від 1 до $0{,}692 \approx e^{-\frac{1}{e}}$. Тобто $f(x) \in [e^{-\frac{1}{e}}; 1)$. Для $x \in \left[\frac{1}{e}; +\infty\right), f(x)$ зростає, та $f(x) \in [e^{-\frac{1}{e}}; +\infty)$.

Робимо висновки та відповіді для заданого рівняння, які базуються на монотонності функції:

1.Якщо параметр $a < e^{-\frac{1}{e}}$, то рівняння немає розв'язків.

2. Якщо $a = e^{-\frac{1}{e}}$, то розв'язок один.

3. Якщо $a \in (e^{-\frac{1}{e}}; 1)$, то розв'язків два.

4.Якщо $a \in [1; +\infty)$. то розв'язок один.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^x = 27$.

Розв'язання. Це рівняння співпадає з рівнянням 1 при $a = 27$, тоді за його розв'язанням та висновком 4, приходимо до того, що задане рівняння має один корінь. При $x = 3$ маємо $3^3 = 27$ корінь цього рівняння. Відповідь: 3.

Зауважимо, що без пояснень, про єдність розв'язку, відповідь була б не повною.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2^x = 2x$.

Розв'язання. При $x < 0$ рівняння не має розв'язків, оскільки ліва і права частини рівняння приймають значення різних знаків. Перевіримо $x = 0, 1 \neq 0$ не підходить. Розглянемо $x > 0$ Обидві функції при цьому будуть зростаючими. Перевіримо, що $x = 1, x = 2$ $(2 = 2 \cdot 1, 2^2 = 2 \cdot 2)$ корені цього рівняння. Доведемо, що інших коренів немає. Зведемо рівняння до вигляду $2^x - 2x = 0$ та знайдемо інтервали монотонності функції в лівій частині.

$$f(x) = 2^x - 2x, \qquad f'(x) = 2^x \ln 2 - 2,$$

$$f'(x) = 0, \ \ 2^x \ln 2 - 2 = 0, 2^x = \frac{2}{\ln 2}, x = \frac{\ln 2 - \ln \ln 2}{\ln 2} \approx 1{,}528 = A .$$

Для $x < A$, візьмемо $x = 1$, маємо $f'(1) < 0$, $f(x) \downarrow$, функція спадає .

Для $x > A$, візьмемо $x = 2$, маємо $f'(2) > 0$, $f(x) \uparrow$, функція зростає .

Отже, рівняння має по одному кореню на інтервалах зростання та спадання і співпадають з $x = 1, x = 2$. Відповідь: $x = 1, x = 2$.

Анотація. *В роботі розглядається застосування диференціального числення при досліджені числа розв'язків деяких функціональних рівнянь.*

Ключові слова: монотонність функції, єдиний розв'язок, рівняння з параметром

Література

1.Дубовик В.П.Вища математика: навч.посіб.для студ. вищ.навч. зак. /В.П.Дубовик, І.І.Юрик. – 4 –те вид. – К.: Ігнатекс – Україна.2013.- 648с.

Байдіков В.О., (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Лободовський М.С. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Науковий керівник – доц. Гадецька С.В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ОКРЕМІ АСПЕКТИ ОПАНУВАННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Аналітична геометрія — це не просто розділ математики, а стратегічний фундамент інженерного мислення. Вона виступає містком, що поєднує просторову уяву з безкомпромісною точністю алгебраїчного формулювання. Для студента перехід від шкільної наочності до аналітичного опису об'єктів через числа, координати та рівняння є критичним етапом формування фахової компетентності. Саме такий підхід дозволяє перетворити фізичну модель архітектурної споруди чи механічного вузла на математичний об'єкт, придатний для глибокого дослідження. Згідно з засадами курсу вищої математики, аналітична геометрія оперує векторами та системами рівнянь для визначення положення та властивостей точок, прямих і поверхонь. Проте, візуалізація — ескізи та графіки — залишається невід’ємною частиною розв’язку. Вона дозволяє розпізнати геометричну суть за «сухими» формулами та передбачити характер відповіді ще до початку громіздких обчислень. Перейдемо до аналізу конкретних метричних задач, де цей симбіоз аналітики та інтуїції проявляється найяскравіше.

1. Метричні задачі: Визначення відстаней у складному просторі

Метричні властивості, зокрема, пошук екстремальних відстаней, складають основу оптимізаційних задач в інженерії. У координатному просторі використання векторного добутку стає універсальним інструментом для знаходження найкоротших шляхів або меж впливу об'єктів.

Задача 1. Максимальна відстань від точки до сімейства площин. Необхідно знайти найбільшу відстань від точки $C(3,2,3)$ до площин, що проходять через пряму AB, де $A(1,1,1)$ та $B(2,2,2)$.

Методологічний аналіз: потрібно усвідомити, що відстань від точки до будь-якої площини пучка не може перевищувати відстані від цієї точки до осі пучка — прямої AB. Отже, задача зводиться до пошуку відстані від точки до прямої.

Обчислення: Використовуємо вектори $AB=(1,1,1)$ та $AC=(2,1,2)$. Їх векторний добуток $AB\times AC=(1,0,-1)$. За формулою

$$d=\frac{|AB\times AC|}{|AB|}=\frac{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2/3}.$$

Задача 2. Найменша відстань між параболою та прямою. Знайти мінімальну відстань між $y^2=64x$ та прямою $4x+3y+46=0$.

Аналіз: оскільки парабола з її внутрішньою областю є опуклою фігурою, а задана пряма лежить у її зовнішній області, найменша відстань досягається у точці M_0, де дотична до параболи паралельна заданій прямій. Рівняння дотичної повинно мати той самий кутовий коефіцієнт, що й пряма ($k=-4/3$). Це дає $y_0=-24$, звідки $x_0=9$.

Обчислення**:** Відстань від точки $M_0(9,-24)$ до прямої становить

$$d=\frac{|4(9)+3(-24)+46|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|36-72+46|}{5}=\frac{10}{5}=2.$$

Метричний аналіз подібних конфігурацій є прелюдією до вивчення взаємодії складніших кривих вищого порядку в динамічних системах.

2. Диференціальні методи в аналітичній геометрії: Дотичні та кути.

Синтез геометрії та математичного аналізу дозволяє досліджувати локальні властивості ліній через геометричний зміст похідної. Кутовий коефіцієнт дотичної стає ключем до визначення кутів перетину та умов взаємного дотику кривих. Розглянемо проблему порівняння геометричних умов.

Задача 3. Перетин під кутом. Для еліпса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ та параболи $y^2=2px$ найбільший кут перетину (90°) досягається при виконанні умови ортогональності дотичних $k_1 \cdot k_2=-1$. Аналіз похідних у точці перетину показує, що це можливо за умови $b^2=2a^2$.

Задача 4. Умова дотику. На відміну від перетину, дотик вимагає рівності кутових коефіцієнтів ($k_1=k_2$) у спільній точці. Для параболи $y=ax^2-c$, що дотикається до еліпса $4x^2+5y^2=20$ у точках $A(1,-1)$ та $B(-1,-1)$, рівність похідних ($2a=4$) та підстановка координат дають остаточне рівняння $y=2x^2-3$.

Зауважимо, що знання умов дотику та кутів перетину має критичне значення для проектування оптичних систем та розрахунку напружень у механічних з’єднаннях. Наприклад, ортогональність ліній поля гарантує стабільність фізичних взаємодій, а плавний дотик поверхонь мінімізує знос деталей.

3. Геометричне місце точок (ГМТ): від визначення до канонічних форм. Робота з ГМТ — це вищий рівень математичної майстерності, де рівняння не задається готовим шаблоном, а виводиться безпосередньо з геометричної властивості.

Задача 5. Розглянемо проблему знаходження вершини трикутника, що описує лінію. Дві вершини трикутника зафіксовані, а третя рухається так, що один із кутів при основі трикутника залишається вдвічі більшим за другий. Яку лінію описує третя вершина?

Використовуючи тригонометричну формулу тангенса подвійного кута, ми переходимо від відношення кутів до алгебраїчного рівняння $3x^2-2ax-y^2=0$. Після виділення повного квадрата отримуємо канонічне рівняння гіперболи: $(x-a/3)^2/(a^2/9)-y^2/(a^2/3)=1$.

4. Трансформація координат: переваги полярної та узагальненої систем. Вибір системи координат — це стратегічне рішення, яке визначає складність обчислень. У задачах на обчислення площ, обмежених еліптичними дугами,

перехід до узагальнених полярних координат часто є єдиним раціональним шляхом.

Задача 6. Площа фігури, обмеженої двома еліпсами. Обчислимо площу фігури між еліпсами $x^2/3+y^2=1$ та $y^2/3+x^2=1$. Скористаємося тим, що прямі $y=x$ та $y=-x$ ділять таку фігуру на 4 рівні частини. В узагальненій полярній системі координат маємо: $x=\sqrt{3}r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$. Рівняння еліпса $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ у цій системі координат: r=1; для рівнянь $y=x, y=-x\ (x\geq 0)$ маємо відповідно: φ=π/3, φ=-π/3; елемент площі $dxdy$ приймає вигляд $\sqrt{3}d\varphi dr$. Тоді чверть S_1 шуканої площі S становить: $S_1=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{3}rdr=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}d\varphi=\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, звідки $S=4\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Анотація. *Проведений аналіз проблемних питань аналітичної геометрії демонструє ключові навички, необхідні для успішного опанування дисципліни: 1) синтез інтуїції та аналітики: вміння розгледіти геометричну сутність за алгебраїчними перетвореннями; 2) стратегічний вибір інструментарію: вміння вчасно перейти до полярних координат; 3) використання апарату аналізу: застосування похідних для дослідження метричних властивостей.*

Ключові слова*: аналітична геометрія, аналітичний опис об'єктів, метричні властивості, диференціальні методи.*

Література

1. Міжнародна студентська математична олімпіада IMC. – Режим доступу : http://www.imc-math.org.uk.

2. II (фінальний) етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики / Математичні олімпіади для студентів в Україні. –Режим доступу : http://putnam.ho.ua/vseukr.html.

Берест А. О. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Ганцев О. В. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Науковий керівник – проф. Ємельянова Т.В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

МЕТОДИЧНІ ПРИЙОМИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ У ПРОСТОРІ ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦІ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З КОМПЛЕКСНИМИ ХАРАКТЕРИСТИЧНИМИ КОРЕНЯМИ

Математична модель процесу – інструмент в дослідженні динамічних систем, який дозволяє зрозуміти поведінку системи, її ключові характеристики та властивості.

Відомо, що зміна параметрів системи може привести до зміни поведінки системи, яка визначається розв’язками математичної моделі системи. В дослідженні динамічних систем, стан яких визначається часом, дуже важливу роль грає будування фазових траєкторій станів системи. Простір динамічної задачі це простір (x_1,x_2,t) всіх можливих станів системи, яки описують інтегральні криви. Фазовий простір це простір фазових траєкторій, які є проекціями інтегральних кривих на площину (x_1,O,x_2). Фазова траєкторія відображає стан динамічної системи від часу.

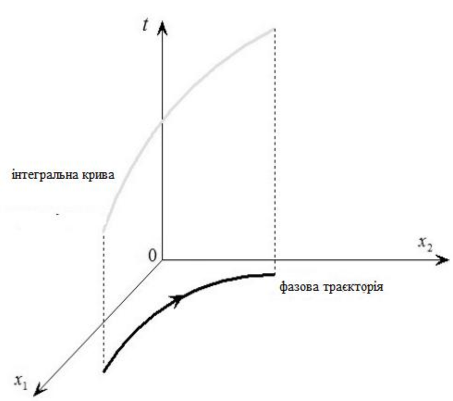


Рис. 1. Фазова траєкторія на площині (x_1,O,x_2)

Фазові траєкторії надають можливість слідкувати за станом системи з часом. Динамічна система характеризується наявністю особливих станів. Ці стани називаються станами рівноваги. Прослідити поведінку системи поблизу особливих точок, точок стійкості, які відповідають станам рівноваги, надають фазові траєкторії системи. Фазові траєкторії полегшують розуміння та аналіз стійкості різних станів системи.

Метою проведеного дослідження було продемонструвати фундаментальний інструмент дослідження стійкості динамічної системи, метод створення фазових траєкторій математичної моделі лінійної системи.

Розглянемо лінійну однорідну систему 2-го порядку з сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

Визначник матриці А не дорівнює нулю, тому система має єдину точку рівноваги у початку координат (0,0).

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для дослідження характеру поведінки фазових траєкторій системи треба знайти власні значенні λ_1, λ_2 та відповідні власні вектори лінійного перетворення, яке задає матриця $\|A\|$. Власні вектори лінійного перетворення позначаємо $\|h_1\|, \|h_2\|$.

Нехай власні значення λ_1, λ_2 комплексні. В такому випадку існує базис з власних векторів $\|h_1\|, \|h_2\|$, які є комплексно спряженими та лінійно незалежними на комплексній площині. Тому, у просторі R^2 вводять дійсні лінійно незалежні вектори $\|p\|,\|q\|$ за правилом

$$\|h_1\| = \|p\| + i\|q\|,$$
$$\|h_2\| = \|p\| - i\|q\|.$$

Розв'язками системи є комплексні вектор-функції $\|x_1(t)\|,\|x_2(t)\|$

$$\|x_1(t)\| = C_1 e^{\lambda_1 t}\|h_1\| = C_1 e^{\lambda_1 t} e^{(\alpha + i\beta)t}(\|p\| + i\|q\|,$$
$$\|x_2(t)\| = C_2 e^{\lambda_2 t}\|h_2\| = C_2 e^{\lambda_2 t} e^{(\alpha - i\beta)t}(\|p\| - i\|q\|,$$

де C_1, C_2 – комплексні сталі.

Сталу C_1 представимо у вигляді

$$C_1 = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0.$$

В такому разі вектор-функція записується

$$\|x_1(t)\| = \rho e^{i\varphi + (\alpha + i\beta)t}(\|p\| + i\|q\|) = \rho e^{\alpha t + i(\beta t + \varphi)}(\|p\| + i\|q\|).$$

Далі, обчислюємо дійсну частину вектор-функції

$$Re\|x_1(t)\| = \|p\|\rho e^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi) - \|q\|\rho e^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi).$$

Вектори $\|p\|,-\|q\|$ лінійно незалежні, їх сприймаємо як направляючи вектори системи. Координатами в цій системі будуть скалярні функції

$$y_1(t) = \rho e^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi),$$
$$y_2(t) = \rho e^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi).$$

Вони визначають рівняння траєкторій на фазовій площині у новому базисі функцій $\|p\|,-\|q\|$ на фазової площині.

Приклад 1. Обчислити напрямні вектори та зробити ескіз фазових траєкторій лінійної автономної системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Визначник матриці А не дорівнює нулю, тому система має єдину точку рівноваги у початку координат (0,0)

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Представимо систему рівнянь у матричній формі

$$\begin{Vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}$$

Корні характеристичного рівняння, власні значення матриці системи

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda)+10 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Власний вектор $\|h_1\|$, що відповідає значенню $\lambda_1 = 1+i$, має координати $\begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Vmatrix}$, тому

$$\begin{Vmatrix} 4-1-i & 2 \\ -5 & -2-1-i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (3-i)\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -5\alpha_1 - (3+i)\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 3-i.$$

Власний вектор $\|h_2\|$, що відповідає значенню $\lambda_2 = 1-i$, має координати $\begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix}$, тому

$$\begin{Vmatrix} 4-1+i & 2 \\ -5 & -2-1+i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (3+i)\beta_1 + 2\beta_2 = 0 \\ -5\beta_1 - (3-i)\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = -2, \beta_2 = 3+i.$$

Власні вектори

$$\|h_1\| = \left\|\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}-2\\ 3-i\end{matrix}\right\|, \|h_2\| = \left\|\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}-2\\ 3+i\end{matrix}\right\|$$

є комплексно спряженими та лінійно незалежними на комплексній площині. Вводимо дійсні лінійно незалежні вектори $\|p\|, \|q\|$ за правилом

$$\|h_1\| = \|p\| + i\|q\| = \left\|\begin{matrix}-2\\ 3\end{matrix}\right\| + i\left\|\begin{matrix}0\\ -1\end{matrix}\right\|,$$

$$\|h_2\| = \|p\| - i\|q\| = \left\|\begin{matrix}-2\\ 3\end{matrix}\right\| - i\left\|\begin{matrix}0\\ -1\end{matrix}\right\|.$$

Розв’язками системи є комплексні вектор-функції $\|x_1(t)\|, \|x_2(t)\|$

$$\|x_1(t)\| = C_1 e^{\lambda_1 t}\|h_1\| = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t}(\|p\| + i\|q\|,$$

$$\|x_2(t)\| = C_2 e^{\lambda_2 t}\|h_2\| = C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}(\|p\| - i\|q\|,$$

де C_1, C_2 – комплексні сталі.

Сталу C_1 представимо у вигляді

$$C_1 = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0.$$

В такому разі вектор-функція записується

$$\|x_1(t)\| = \rho e^{i\varphi+(\alpha+i\beta)t}(\|p\| + i\|q\|) = \rho e^{\alpha t + i(\beta t+\varphi)}(\|p\| + i\|q\|).$$

Далі, обчислюємо дійсну частину вектор-функції $\|x_1(t)\|$

$$Re\|x_1(t)\| = \|p\|\rho e^{\alpha t}\cos(\beta t+\varphi) - \|q\|\rho e^{\alpha t}\sin(\beta t+\varphi).$$

Вектори $\|p\|, -\|q\|$ лінійно незалежні, їх сприймаємо як направляючи вектори системи. Координатами в цій системі будуть скалярні функції

$$y_1(t) = \rho e^{\alpha t}\cos(\beta t+\varphi),$$

$$y_2(t) = \rho e^{\alpha t}\sin(\beta t+\varphi).$$

Вони задають параметричне подання інтегральних кривих у новому базисі $\|p\|,-\|q\|$ на фазової площині (рис.2).

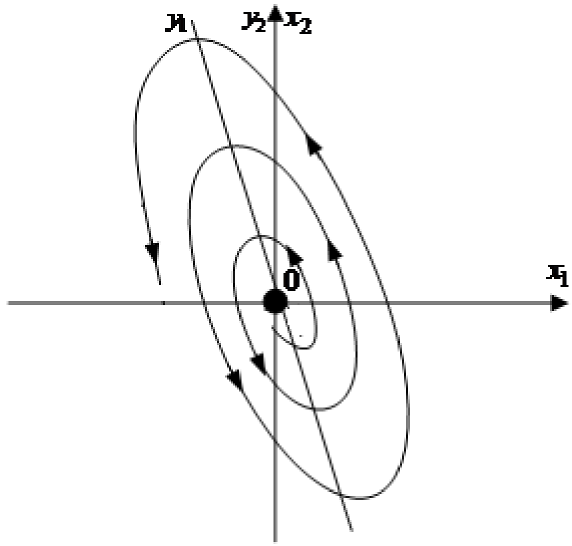


Рис. 2. Фазовий портрет траєкторій на фазовій площині

Оскільки власні значення задовольняють нерівності $Re\lambda_{1.2} > 0$,то з ростом t рух по фазових траєкторіях здійснюється в напрямі від початку координат (рис. 2). Точка рівноваги (0,0) називається нестійким вузлом.

Анотація. *Досліджено якісні характеристики розв'язку лінійної системи 2-ого порядку з комплексними характеристичними коренями. Показано, як будується базис векторного перетворення, який складається з дійсної та уявної частин власних векторів системи. Доведено, як знаходиться розв'язок системи у цьому базисі. Побудовані фазові траєкторії у введеному базисі, вивчено умови, що визначають напрям руху точки вздовж траєкторії.*

Ключові слова: *точка рівноваги, визначник системи, власні вектори системи, фазовий портрет станів системи, фазова траєкторія, фазова площина.*

Література

1. Дослідження стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь: навчально-методичний посібник: [Електронний ресурс]: для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 111 "Математика" / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: А. Л. Гречко, М. Є. Дудкін. – Електронні текстові дані (1 файл: 345Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 25с.

2. Диференціальні рівняння. Конспект лекцій: навчальний посібник / В. Г. Бондаренко. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сикорського, 2023. – 124 с.

3.Прикладні задачі теорії стійкості : посібник / Ф. Г. Гаращенко, В. В. Пічкур. – Київ: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2013. – 120 с.

Бурмістров М. О. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Руднєв А. А. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – ст. викл. Нестеренко В. О.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТАХ ЯК ІНСТРУМЕНТ ОБЧИСЛЕННЯ НЕОБХІДНОЇ ПОТУЖНОСТІ ПОТЯГУ ПРИ РУХУ ПО СКЛАДНОМУ МАРШРУТУ

Основними математичними моделями, що описують якісь технічні процеси, є диференціальні рівняння. Мета нашої роботи полягає в тому, як застосувати криволінійний інтеграл з інтегруванням деяких диференціальних рівнянь. Для цього нам знадобляться властивості цих інтегралів, а саме, властивість про його незалежність від шляху інтегрування.

Нехай задано криволінійний інтеграл

$$I = \int_{L_{AB}} P(x.y)\,dx + Q(x,y)\,dy, ,$$

в якому $P(x,y), Q(x,y)$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, L_{AB} -$ шлях інтегрування, неперервні в деякий області D, то при виконанні хоча б однієї умови 1,2,3,4 цей інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Ці умови сформулюємо в такому вигляді:

1) $\oint_{L_{AB}} P(x.y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ інтеграл по будь якому замкненому контурі в області D дорівнює 0;

2) $\int_{L_{1AB}} P(x.y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{L_{2AB}} P(x.y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$ інтеграл не залежить від шляху інтегрування, який з'єднує т. A та т. B;

3) $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$;

4) Вираз $P(x.y)\,dx + Q(x,y)\,dy = du(x,y)$, є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$.

При вивчені теми про функції багатьох змінних, ми з'ясували, що для диференціального виразу, який є повним диференціалом виконується умова $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, оскільки $P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, Q(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, тоді $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, а це і є умова, що цей диференціальний вираз буде повним диференціалом функції $u(x,y)$.

Тобто маємо

$$\int_{L_{AB}} P(x.y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{L_{AB}} du = \int\limits_{A}^{B} du = u(B) - u(A).$$

Цей інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Виникає питання, чи можна відновити функцію за її диференціалом?

Так можна, якщо візьмемо за точку Aякусь точку з області D з координатами $A(x_A, y_A)$, а точку B з невідомими координатами $B(x,y)$.

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то можемо обрати шлях в вигляді ламаної, відрізки якої паралельні координатним осям, що з'єднує A і B . Запишімо ламані інтегрування у двох варіантах: $L_{AB} \subset D$,

1) $$L_{AB}: \begin{cases} y = y_A, x_A \le x \le x_B(= x), dy = 0 \\ x = x_B(= x), y_A \le y \le y_B(= y), dx = 0 \end{cases},$$

або

2) $$L_{AB}: \begin{cases} x = x_A, y_A \le y \le y_B(= y), dx = 0 \\ y = y_B(= y), x_A \le x \le x_B(= x), dy = 0 \end{cases}.$$

Крім того, $du = d(u + C)$, тоді дістанемо

$$u + C = \int_{L_{AB}} P(x.y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_A}^{x} P(x, y_A)dx + \int_{y_A}^{y} Q(x,y)dy, \quad (1)$$

або

$$u + C = \int_{L_{AB}} P(x.y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{y_A}^{y} Q(x_A, y)dy + \int_{x_A}^{x} P(x,y)dx. \quad (2)$$

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд $y' = f(x, y)$, або $P(x. y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$, оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$. Якщо ліва частина цього рівняння є повний диференціал (такі рівняння називаються диференціальними рівняннями у повних диференціалах), то можна до такого рівняння застосувати формули (1), або (2). За точку A обираємо будь яку, а при наявності початкової умови $y(x_0) = y_0$ доцільно обрати $A(x_0, y_0)$. При цьому слід пам'ятати , щоб на ламаній інтегрування функції $P(x, y), Q(x, y)$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ були неперервні. Оскільки $du = 0$, то $u = C$.

Приклад. Розв'язати рівняння.

$$(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y) = 0.$$

Розв'язання. Перевіримо, що ліва частина рівняння є повний диференціал

$$P(x, y) = y + e^x \sin y\,, Q(x, y) = x + e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = 1 + e^x \cos y, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1 + e^x.$$

Отже $\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ і ліва частина диференціального рівняння є повний диференціал. Для знаходження розв'язку застосовуємо формулу (1), де $A(0,0)$, $B(x, y)$, ламана інтегрування

$L_{AB}: \begin{cases} y = 0, 0 \le x \le x, dy = 0 \\ x = x, 0 \le y \le y, dx = 0 \end{cases}$, і , оскільки $du = 0, u = C$, то дістанемо:

$$C = \int_0^x (0 + e^x \sin 0)dx + \int_0^y (x + e^x \cos y)dy,$$

$$C = 0 + (xy + e^x \sin y)|_0^y = xy + e^x \sin y.$$

Відповідь: Загальний розв'язок рівняння $C = xy + e^x \sin y$.

Примітка. Якщо б мали початкову умову, наприклад, $y_0 = y(-1) = \pi, x_0 = -1$, то значення константи C знаходили після підстановки їх у загальний розв'язок. $C = -1 \cdot \pi + e^{-1} \sin \pi = -\pi$. Частинний розв'язок мав би вигляд
$xy + e^x \sin y + \pi = 0$.

Анотація. *В роботі розглядається методика застосування криволінійного інтеграла по координатах при інтегруванні диференціальних рівнянь у повних диференціалах.*

Ключові слова: *криволінійний інтеграл, незалежність інтеграла від шляху інтегрування, диференціальне рівняння у повних диференціалах.*

Література

1.Дубовик В.П.Вища математика: навч.посіб.для студ. вищ.навч. зак. /В.П.Дубовик, І.І.Юрик. – 4 –те вид. – К.: Ігнатекс – Україна.2013.- 648с.

Головін О. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Козлов Д. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Науковий керівник – доц. Гадецька С.В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ОКРЕМІ АСПЕКТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ КРЕАТИВНОГО СПРЯМУВАННЯ: ВІД ТЕОРІЇ ДО ГЕОМЕРИЧНОї ІНТУЇЦІЇ

Векторна алгебра — це не просто допоміжний розділ математики, це, без перебільшення, фундаментальна мова простору. Студенти часто сприймають вектори лише як "спрямовані відрізки" або набори координат. Проте справжня сутність векторного числення полягає у створенні унікального інтелектуального містка між суворою абстракцією лінійної алгебри та живою, наочною очевидністю геометрії. Стратегічна важливість цього розділу вищої математики випливає з її прикладної потужності. Для фізики, інженерії та технічних наук вектори є природним інструментом опису силових полів, швидкостей, моментів та тензорів напружень. Розв'язання задач креативного спрямування вимагає від студента не простого маніпулювання формулами, а вміння будувати внутрішню геометричну модель задачі. Головна ідея роботи полягає в тому, що елегантність математичного розв'язку є прямим наслідком глибокої просторової інтуїції. Перейдемо від загальних міркувань до конкретних прикладів інтерпретації множин точок.

1. Геометрична інтерпретація векторних виразів та умови колінеарності. Уміння візуалізувати алгебраїчні умови — це перший крок до подолання формалізму. Коли ми бачимо векторне рівняння, ми маємо "бачити" об'єкт, який воно породжує у просторі.

Задача 1 (формування кутових областей). Розглянемо класичну задачу: описати множину точок M, положення яких визначається вектором $OM=\alpha a+\beta b$, де $\alpha,\beta>0$, а вектори a та b виходять із точки O. Це завдання демонструє правило паралелограма у його динамічному аспекті. Якщо α та β — фіксовані числа, ми отримуємо одну точку. Проте, якщо вони вільно змінюються в діапазоні $(0,+\infty)$, точка M заповнює всю внутрішню область нескінченного плоского кута, сторони якого спрямовані вздовж векторів a та b. Висновок: лінійна комбінація векторів з обмеженнями на знаки коефіцієнтів формує не просто лінії, а цілі регіони площини або простору.

Задача 2 (аналіз "видимості" та колінеарність). Розглянемо задачу з прикладним підтекстом, що стосується навігації або оптики. Дано три точки: $A(3-t;6-2t)$, $B(1+t;3-t)$ та $C(1;1)$. Питання: при яких значеннях параметра t з точки A не буде видно точку C? Методично ця задача перекладає побутову концепцію "перешкоди" на мову колінеарності. Щоб точка B заступала точку C для спостерігача в точці A, вона повинна лежати на відрізку AC. Це еквівалентно двом умовам: 1) вектори AB та BC є колінеарними; 2) вектори AB та BC є співнапрямленими ($AB=\lambda BC$, де $\lambda>0$). Тоді $AB=(1+t-(3-t);3-t-(6-2t))=(2t-2;t-3)$, $BC=(1-(1+t);1-(3-t))=(-t;t-2)$.

За умовою колінеарності: $\lambda = \frac{2t-2}{-2} = \frac{-3-3t}{t-2} > 0$, звідки $t = 3 - \sqrt{10}$.

Цей приклад показує, як суха алгебра параметричних координат розв'язує конкретну геометричну ситуацію.

2. Подвійний векторний добуток та варіативність методів розв'язання. Однією з ознак математичної майстерності є вибір методу. В академічній літературі координатний метод іноді називається "силовим", оскільки він гарантує результат ціною великої кількості механічних обчислень, але часто приховує внутрішню красу задачі. На противагу йому, безкоординатний метод на основі векторних тотожностей є втіленням елегантності.

Задача 3. Знайти вектор x, що задовольняє рівнянню: $(a \cdot x)x + (a \times x) \times x = a$.

Зауважимо одразу, що реалізація координатного ("силового") методу - це громіздкий шлях, який вимагає розгортання координат. Тому застосуємо інший підхід. Використовуючи формулу подвійного векторного добутку $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$, перетворимо рівняння до вигляду $2\left(\vec{a} \cdot \vec{x}\right)\vec{x} = \left(\vec{x}^2 + 1\right)\vec{a}$. Оскільки $\left(\vec{x}^2 + 1\right)\vec{a} \neq \vec{0}$, то і $\vec{a} \cdot \vec{x} \neq 0$. Тому $\vec{x} = k\vec{a}$ при деякому $k \in R$. Підставивши цей вираз у рівняння, отримаємо:

$$2k^2\vec{a}^2\vec{a} = \left(k^2\vec{a}^2 + 1\right)\vec{a},\ k^2\vec{a}^2 = 1,\ k = \pm\frac{1}{\sqrt{\vec{a}^2}} = \pm\frac{1}{|\vec{a}|},\ \vec{x} = \pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Отже, шуканий вектор є одиничним і спрямованим вздовж або проти лінії вектора a.

3. Векторна планіметрія: Бісектриси, центри та лінійна залежність

Векторні методи в планіметрії дозволяють замінити складні геометричні побудови лаконічними алгебраїчними рівностями.

Задача 4 (вектор бісектриси та метричні зв'язки). Для виведення вектора бісектриси AD трикутника ABC через AB та AC ми використовуємо фундаментальну властивість, за якою бісектриса ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам: $\frac{\left|\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{DC}\right|}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, звідки $\frac{\left|\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$, де $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Тоді отримуємо відповідь:

$$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{\vec{a}\left|\vec{b}\right|+\vec{b}\left|\vec{a}\right|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}.$$

Такий запис — не просто формула, це демонстрація того, як "вага" кожної сторони (її довжина) визначає напрямок бісектриси у векторному полі трикутника.

4. Конфігурації точок та умови компланарності у просторі. У стереометрії вектори стають ще потужнішими, оскільки змішаний добуток дає нам прямий доступ до обчислення об'ємів.

Задача 5 (трансформація об’єму тетраедра). Об’єм тетраедра $DABC$ дорівнює V. Точки K, L, M, N такі, що $\overline{AK}=\alpha\overline{CA}$, $\overline{CL}=\beta\overline{BC}$, $\overline{DM}=\gamma\overline{AD}$, $\overline{DN}=\delta\overline{CD}$, де $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$. Знайти об’єм тетраедра $LKNM$.

При зміні вершин тетраедра за заданими відношеннями α, β, γ, δ об’єм змінюється згідно з властивостями змішаного добутку. Розклавши вектори $\overline{KL}$, $\overline{KM}$, $\overline{KN}$ за базисом $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$, ми отримуємо коефіцієнт трансформації, звідки маємо

$$V_{LKNM}=\frac{1}{6}\left|\overline{KL}\cdot\left(\overline{KM}\times\overline{KN}\right)\right|=\left|\beta\left(\alpha\delta+\delta-\alpha\gamma+\gamma\delta\right)\right|V.$$

Отриманий результат підкреслює лінійність об’ємних характеристик щодо векторних операцій.

Анотація. *Проведений аналіз проблемних питань векторної алгебри приводить до висновку, що векторна алгебра — це не просто набір обчислювальних схем, а потужний аналітичний інструмент, що перетворює геометричну інтуїцію на точне знання. Ми виділили три ключові уроки: 1) вибір між координатним та безкоординатним методами — це вибір між обчислювальним навантаженням та концептуальною ясністю; 2) кожна* *векторна рівність — це опис фізичної або просторової ситуації; 3) векторний підхід дозволяє вирішувати складні задачі стереометрії та планіметрії значно швидше за класичні методи.*

***Ключові слова**: векторна алгебра, геометрична модель, векторне рівняння.*

Література

1. Міжнародна студентська математична олімпіада IMC. – Режим доступу : http://www.imc-math.org.uk.

2. II (фінальний) етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики / Математичні олімпіади для студентів в Україні. –Режим доступу : http://putnam.ho.ua/vseukr.html.

Грабський Ю. В. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – доц. Вишневецький О. Л.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

СИСТЕМА КОЛЬОРОВИХ МАРКЕРІВ У ПРЕЗЕНТАЦІЯХ ВИКЛАДАЧА: ПОГЛЯД ЗДОБУВАЧІВ НА ЕФЕКТИВНІСТЬ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ.

Сьогодні презентації — це один з головних способів пояснювати матеріал, особливо під час онлайн-занять у ЗВО. Важливо не тільки що ми показуємо, а й як це оформлено. Колір у презентації допомагає зробити текст і формули більш зрозумілими та помітними.

Колір дозволяє виділяти важливі частини тексту, показувати зв'язок між формулами та схемами, а також направляти увагу студентів. Якщо кольори використовувати неправильно або забагато — матеріал стає складним для сприйняття. Тому важливо знати, як правильно застосовувати колір у онлайн-презентаціях.

Мета цієї доповіді — розповісти, як використовувати колір для виділення тексту і зв'язку між текстом, формулами та зображеннями у презентаціях для онлайн-занять і дати кілька порад.

1. Як ми сприймаємо колір. Кожен колір впливає на нас по-різному. Теплі кольори, як-от червоний або жовтий, привертають увагу і виглядають активними. Холодні кольори, як синій чи зелений, здаються спокійними.

Під час створення онлайн-презентацій важливо:

- обирати кольори так, щоб текст добре читався на фоні слайду;
- вибрати головний колір, який задає стиль усієї презентації;
- не використовувати занадто багато кольорів, щоб не відволікати увагу студентів.

Людське око швидко помічає, коли однаковий колір повторюється в різних елементах. Цю властивість можна використовувати, щоб показати, що певні частини тексту, формули та картинки пов'язані.

2. Як виділяти текст кольором

2.1. Основні способи. Колір у тексті допомагає акцентувати увагу на важливих словах або цифрах. Можна:

- змінити колір шрифту;
- підкреслити словами або маркером;
- поєднувати колір з жирним шрифтом або великим розміром.

Головне — не переборщити. Краще використовувати не більше двох-трьох кольорів у презентації.

2.2. Структурування тексту. Кольори можна використовувати, щоб показати, до яких частин презентації належить текст. Наприклад:

- однаковий колір для заголовків;
- однаковий колір для визначень;
- окремий колір для прикладів або пояснень.

Це допомагає студентам швидше орієнтуватися у матеріалі під час онлайн-занять.

3. Використання кольору для кращого сприйняття формул

Формули іноді складно зрозуміти, особливо коли вони йдуть разом з текстовими поясненнями. Студентам важко швидко пов’язати окремі пояснення в тексті з відповідними частинами формул.

Щоб полегшити сприйняття, можна виділяти однаковим кольором відповідні частини формули і тексту. Наприклад:

- змінні у формулі виділяються кольором;
- у тексті ті ж змінні того ж кольору;
- коефіцієнти або інші параметри можуть мати інший узгоджений колір.

Це допомагає студентам швидше зрозуміти формули під час онлайн-занять.

4. Кольори у тексті та картинках

4.1. Чому важливі картинки

Схеми, графіки та діаграми допомагають показати матеріал наочно. Вони допомагають зрозуміти складні ідеї та процеси.

4.2. Зв’язок кольору між текстом і картинками

Якщо кольори у тексті і на схемах однакові, студентам легше зрозуміти, що вони пов’язані. Це допомагає:

- швидко знаходити потрібні елементи;
- уникати плутанини при поясненні;
- краще сприймати матеріал у цілому.

Наприклад, якщо на схемі блоки різних кольорів, у тексті про ці блоки теж краще використовувати ті ж кольори. Так само можна робити для графіків, щоб студентам було легше зрозуміти, яка крива що означає.

5. Практичні поради:

1. Використовувати колір для пояснення, а не просто для краси.
2. Слідкувати, щоб текст добре читався на фоні слайду.
3. Дотримуватися єдиної логіки кольорів у презентації.

4. Використовувати однакові кольори для пов'язаних текстових, формульних і графічних елементів.

Висновки. Колір допомагає зробити онлайн-презентації для університетських занять зрозумілішими. Він дозволяє виділяти важливі частини тексту, показувати зв'язки між формулами та картинками. Це допомагає студентам краще сприймати та розуміти матеріал, запам'ятати його і не перевантажуватися інформацією.

В цілому, використовувати кольори у презентаціях треба обдумано, щоб онлайн-заняття були ефективними і цікавішими для студентів.

Не використовувати занадто багато кольорів та яскравих відтінків.

***Анотація**. Колір допомагає зробити онлайн-презентації зрозумілішими. Він дозволяє виділяти важливі частини тексту, показувати зв'язки між формулами та картинками. Це допомагає краще сприймати та розуміти матеріал.*

Література

1. Вовк Л. П. Використання мультимедійних презентацій у навчальному процесі закладів вищої освіти // Вісник педагогічних наук. – 2019. – № 3. – С. 45–52.
2. Гаврилюк О. М. Візуалізація навчального матеріалу в умовах дистанційного навчання // Інформаційні технології в освіті. – 2020. – № 2. – С. 18–25.

Дейнека І .М. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Звягінцев І. В. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Науковий керівник – проф. Ємельянова Т.В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ У ПРОСТОРІ ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦІ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З ОДНАКОВИМИ ХАРАКТЕРИСТИЧНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ

Математична модель процесу – інструмент в дослідженні динамічних систем, який дозволяє зрозуміти поведінку системи, її ключові характеристики та властивості.

Відомо, що зміна параметрів системи може привести до зміни поведінки системи, яка визначається розв'язками математичної моделі системи. В дослідженні динамічних систем, стан яких визначається часом, дуже важливу роль грає будування фазових траєкторій станів системи. Простір динамічної задачі це простір (x_1,x_2,t) всіх можливих станів системи, яки описують інтегральні криви. Фазовий простір це простір фазових траєкторій, які є проекціями інтегральних кривих на площину (x_1,O,x_2). Фазова траєкторія відображає стан динамічної системи від часу t.

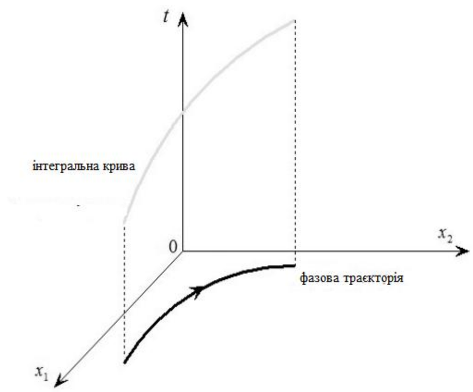


Рис. 1. Фазова траєкторія системи у прострі (x_1,x_2,t)

Фазові траєкторії надають можливість слідкувати за станом системи з часом. Динамічна система характеризується наявністю особливих станів. Ці стани називаються станами рівноваги. Прослідити поведінку системи поблизу особливих точок, точок стійкості, які відповідають станам рівноваги, надають фазові траєкторії системи. Фазові траєкторії полегшують розуміння та аналіз стійкості різних станів системи.

Метою проведеного дослідження було продемонструвати фундаментальний інструмент дослідження стійкості динамічної системи, метод створення фазових траєкторій математичної моделі лінійної системи, у випадку рівних власних коренів системи.

Розглянемо лінійну однорідну систему 2-го порядку з сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

Визначник матриці A не дорівнює нулю, тому система має одну точку рівноваги у початку координат (0,0)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для дослідження характеру поведінки фазових траєкторій системи треба знайти власні значенні λ_1, λ_2 та відповідні власні вектори лінійного перетворення, яке задає матриця $\|A\|$. Власні вектори лінійного перетворення позначаємо $\|h_1\|, \|h_2\|$.

Нехай власні значення дійсні, рівні $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і відрізняються від нуля. В такому випадку існує у системи один власний вектор $\|h_1\|$. Завжди до нього можна додати вектор $\|h_2\|$, не колінеарний вектору $\|h_1\|$. В такому базисі система приймає вигляд

$$\|A\|\|h_1\| = \lambda\|h_1\|,$$
$$\|A\|\|h_2\| = \lambda\|h_2\| + \|h_1\|.$$

Вектор $\|h_2\|$ називають приєднаним вектором до вектору $\|h_1\|$.

Вектор $\|x\|$ в базисі векторів $\|h_1\|, \|h_2\|$ системи має координати y_1, y_2

$$\|x\| = y_1\|h_1\| + y_2\|h_2\|.$$

Розв'язком системи є вектор

$$\|x(t)\| = C_1\|h_1\|e^{\lambda t} + C_2\left(\|h_1\|t + \|h_2\|\right)e^{\lambda t},$$

де вектор $\|h_1\|$ - власний вектор системи, $\|h_2\|$ - приєднаний до нього вектор.

Знаходимо вектор $\|x\|$ у базисі $\|h_1\|, \|h_2\|$

$$\|x(t)\| = (C_1 + C_2 t)\|h_1\| e^{\lambda t} + C_2 \|h_2\| e^{\lambda t}.,$$

В цьому базисі його координати

$$y_1 = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t},$$
$$y_2 = C_2 e^{\lambda t}.$$

де C_1, C_2 - довільні сталі.

Для побудови фазового портрету у фазовому просторі, який є двовимірною площиною (x_1,O,x_2) , треба визначити власні вектори $\|h_1\|, \|h_2\|$ - напрямні вектори фазових траєкторій.

Приклад 1. Обчислити напрямні вектори та зробити ескіз фазових траєкторій лінійної автономної системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$

визначник матриці А якої не дорівнює нулю, тому система має одну точку рівноваги у початку координат (0,0)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Представимо систему рівнянь у матричній формі

$$\begin{Vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}$$

Корні характеристичного рівняння, власні значення матриці системи

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Власний вектор $\|h_1\|$, що відповідає значенню $\lambda = 2$, має координати $\begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Vmatrix}$,

тому

$$\begin{Vmatrix} 3-2 & -1 \\ 1 & 1-2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 1.$$

У системи існує один власний вектор $\|h_1\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. До нього слід додати вектор $\|h_2\|$, не колінеарний вектору $\|h_1\|$. В такому базисі система приймає вигляд

$$\|A\| \cdot \|h_1\| = \lambda \|h_1\|,$$
$$\|A\| \cdot \|h_2\| = \lambda \|h_2\| + \|h_1\|.$$

Вектор $\|h_2\|$ називають приєднаним вектором до вектору $\|h_1\|$.

Координати приєднаного вектора $\|h_2\| = \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix}$ знаходимо з другого рівняння системи

$$\begin{Vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 - \beta_2 = 1 \\ \beta_1 - \beta_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = 1, \beta_2 = 0,$$

$$\|h_2\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язком системи є вектор

$$\|x(t)\| = C_1 \|h_1\| e^{\lambda t} + C_2 \left(\|h_1\| t + \|h_2\| \right) e^{\lambda t},$$

де вектор $\|h_1\|$ - власний вектор системи, $\|h_2\|$ - приєднаний до нього вектор.

Вектор $\|x(t)\|$ в базисі векторів $\|h_1\|, \|h_2\|$ системи має координати $y_1(t)$, $y_2(t)$

$$\|x\| = y_1\|h_1\| + y_2\|h_2\|.$$

Тому, вектор $\|x\|$ у базисі $\|h_1\|,\|h_2\|$ приймає вигляд

$$\|x(t)\| = (C_1 + C_2 t)\|h_1\|e^{\lambda t} + C_2\|h_2\|e^{\lambda t}.,$$

В цьому базисі координати $y_1(t)$, $y_2(t)$

$$y_1 = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t},$$
$$y_2 = C_2 e^{\lambda t}.$$

визначають рівняння фазових траєкторій.

Нехай $0 < \lambda$. Розглянемо траєкторії при $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Вони мають вигляд

$$y_1 = C_2 t e^{\lambda t},$$
$$y_2 = C_2 e^{\lambda t}.$$

При $C_2 > 0$ фазові траєкторії розташовані на площині (y_1, O, y_2) поверх осі Oy_1. При $t=0$ всі траєкторії перетинають ось Oy_2. З ростом часу t траєкторія прямує направо, потім наліво до початку координат, спускаючись до початку координат (0,0).

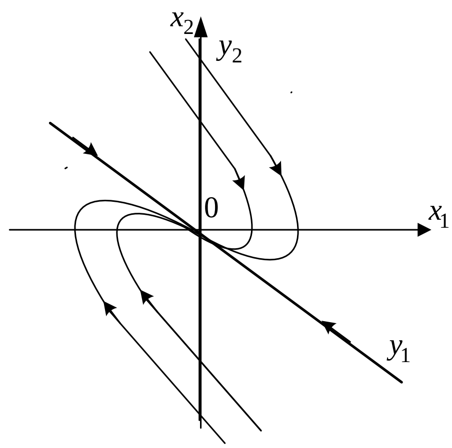


Рис.2. Фазова траєкторія для власного значення $\lambda < 0$ при $C_1 = 0$

При прямуванні t до $-\infty$ точка траєкторії рухається наліво, однак піднімається вгору повільно (рис. 2).

Примітка. При $C_2 > 0$ всі траєкторії знаходяться на площини поверх осі Oy_1, при $C_2 < 0$ всі траєкторії знаходяться на нижній частині площини (y_1,O,y_2)

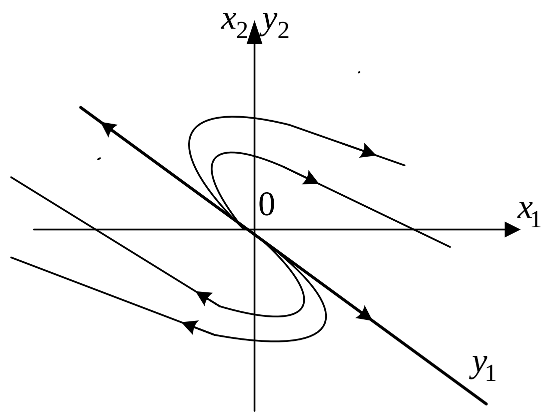


Рис. 3. Фазова траєкторія для власного значення $\lambda > 0$

На рис. 3 представлені графіки фазових траєкторій для власних значень $\lambda > 0$. Всі точки на траєкторіях рухаються у протилежному напрямі, прямують до нескінченності з ростом змінної t.

Анотація. *Досліджено якісні характеристики розв'язку лінійної системи 2-ого порядку з парними власними значеннями. Показано, як будується базис векторного перетворення, який складається з власного вектора та приєднаного вектора системи. Доведено, як знаходиться розв'язок системи у цьому базисі. Побудовані фазові траєкторії у введеному базисі, вивчено умови, що визначають напрям руху точки вздовж траєкторії.*

Ключові слова: *точка рівноваги, визначник системи, власні вектори системи, фазовий портрет станів системи, фазова траєкторія, фазова площина.*

Література

1. Дослідження стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь: навчально-методичний посібник: [Електронний ресурс]: для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 111 "Математика" / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: А. Л. Гречко, М. Є. Дудкін. – Електронні текстові дані (1 файл: 345Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 25 с.

2. Диференціальні рівняння. Конспект лекцій: навчальний посібник / В. Г. Бондаренко. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сикорського, 2023. – 124 с.

3.Прикладні задачі теорії стійкості : посібник / Ф. Г. Гаращенко, В. В. Пічкур. – Київ: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2013. – 120 с.

Єсіпов О. А. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Задорожний Д. С. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Науковий керівник – доц. Гадецька С.В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ОКРЕМІ АСПЕКТИ ТЕОРІЇ ВИЗНАЧНИКІВ НА ПРИКЛАДАХ ЗАДАЧ ПІДВИЩЕНОГО РІВНЯ

У межах сучасної теоретичної лінійної алгебри визначник розглядається не просто як обчислювальна можливість для застосування формул Крамера, а як фундаментальна характеристика лінійного оператора. Визначник є ключем до розуміння властивостей векторних просторів, оскільки він безпосередньо відображає зміну орієнтації та коефіцієнт трансформації n-мірного об'єму при лінійних відображеннях. Робота з визначниками високих порядків вимагає розвиненої «математичної культури мислення», що полягає у здатності ідентифікувати приховані симетрії та застосовувати апарат структурних перетворень для мінімізації обчислювальної складності, переходячи від алгоритмічного обчислення до аналітичного синтезу.

Переходячи від загального теоретичного значення визначника, розглянемо його внутрішню структуру на прикладі знакових характеристик членів розкладу. Аналіз знакової структури членів розкладу визначника є критичним для розуміння механізмів, що забезпечують симетрію лінійних форм. Центральною проблемою тут виступає доведення неможливості ситуації, за якої всі члени розкладу є одночасно додатними. Розглянемо розклад довільного визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Якщо серед елементів визначника є нулі, то в розкладі цього визначника є члени, які дорівнюють нулю, тобто недодатні. Нехай всі елементи визначника відмінні від нуля. Тоді з очевидної рівності

$$(a_{11}a_{22}a_{33})\cdot(a_{12}a_{23}a_{31})\cdot(a_{13}a_{21}a_{32}) = -(-a_{13}a_{22}a_{31})\cdot(-a_{12}a_{21}a_{33})\cdot(-a_{11}a_{23}a_{32})$$

випливає, що в розкладі визначника є як додатні, так і від'ємні члени. Отже, всі шість членів у розкладі визначника третього порядку не можуть бути одночасно додатними.

При масштабуванні на вищі порядки закономірність посилюється. Для визначника 4-го порядку (24 члени розкладу) мінімальна кількість від'ємних членів складає не менше чотирьох. Логіка цього масштабування базується на рекурсивному розкладі за рядком: оскільки кожен елемент a_{ij} множиться на відповідний мінор ($n-1$)-го порядку (який сам містить від'ємні члени) та враховує знак алгебраїчного доповнення $(-1)^{i+j}$, виникає каскадний ефект розподілу знаків, що унеможливлює позитивну однозначність розкладу.

Від аналізу знаків окремих членів перейдемо до способу обчислення визначників n-го порядку через системні структурні перетворення. Рекурентні методи є стратегічним інструментом оптимізації, що дозволяє привести довільний порядок n до базових випадків. Розглянемо алгоритм для матриці з елементами $a_{ij}=|i-j|$. Процес зведення до трикутного вигляду включає послідовну зміну стовпців та рядків, що призводить до обнулення більшості елементів. Фінальна аналітична формула для такої структури має вигляд: $\Delta_n=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

Розглянемо застосування алгебраїчних властивостей коренів многочленів у структуру визначника. Взаємозв'язок теорії рівнянь та лінійної алгебри дозволяє використовувати корені поліномів як структурні одиниці матриці. Згідно з узагальненою теоремою Вієта, коефіцієнти рівняння безпосередньо пов'язані із симетричними многочленами від його коренів, що є визначальним для обчислення визначників.

Представимо проблему обчислення визначника $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$,

де α, β, γ – корені многочлена $x^3 + px^2 + q$. Обчислимо $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha\beta\gamma - \left(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3\right)$. Згідно з теоремою Вієта, якщо α, β, γ–корені

кубічного рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, то

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\dfrac{b}{a}, \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \dfrac{c}{a}, \\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Виконуючи послідовні перетворення, приходимо до результату:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha\beta\gamma - \left(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3\right) = 3\alpha\beta\gamma - \left(-3q - p\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)\right) = p^3.$$

Аннотація. *Проведене дослідження підтверджує, що теорія визначників є дисципліною, де обчислювальна практика невіддільна від глибокого структурного аналізу. Розглянуті методи демонструють важливість аналітичного підходу в роботі з багатовимірними системами.*

Ключові слова *лінійна алгебра, визначник, теорема Вієта, структурний аналіз.*

Література

1. Міжнародна студентська математична олімпіада IMC. – Режим доступу : http://www.imc-math.org.uk.

2. Hefferon J. Linear Algebra / Jim Hefferon. – University Press of Florida, 2009. – 449p.

Замятін В. О. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Каганець М. В. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Науковий керівник – доц. Вишневецький О. Л.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДІВ ЗНАХОДЖЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ПРИ ІНТЕГРУВАННІ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Раціональним дробом називається відношення двох многочленів. Інтегрування таких дробів є важливою частиною теми «Невизначений інтеграл». Раціональний дріб називається:

- *правильним*, якщо степінь його чисельника менше степеня знаменника
- *неправильним* у протилежному випадку (степінь чисельника не менше степеня знаменника).

Для інтегрування правильний раціональний дріб розкладають на елементарні дроби з невизначеними коефіцієнтами. Зауважимо, що цей розклад визначається знаменником дробу, що розкладається. На цьому кроці чисельник майже не використовується; єдина вимога до нього – щоб вихідний раціональний дріб був правильним.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів спочатку елементарні дроби додають, потім прирівнюють чисельник їхньої суми чисельнику вихідного раціонального дробу. Виходить тотожна рівність двох многочленів, в один з яких входять шукані невизначені коефіцієнти. Ці невизначені коефіцієнти можна знаходити двома шляхами: підставляючи корені знаменника та/або прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях невідомого x.

Кожен з цих двох шляхів має свої переваги та недоліки, які, як правило, не вказані у підручниках. Обговоримо їх з метою знаходження найбільш раціонального способу.

- Метод прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях невідомого застосовний завжди, але призводить до необхідності розв'язування системи лінійних рівнянь, яка може бути досить складною.

- Метод підстановки коренів знаменника простіший, бо вимагає розв'язання декількох рівнянь з одним невідомим кожне. Але у випадку, коли знаменник раціонального дробу має кратні корені, цих рівнянь не достатньо для знаходження усіх невизначених коефіцієнтів, тому доводиться використовувати метод прирівнювання коефіцієнтів. Строго кажучи, методом підстановки коренів знаменника все-таки можна знайти всі невизначені коефіцієнти (як це зробити – у підручниках не пишуть), але таке знаходження вимагає знаходження похідних раціонального дробу, причому чим вища кратність коренів знаменника, тим вище порядок потрібних похідних. Тому цей спосіб складний і практично не використовується.

Нашою метою є запропонувати якомога більш простий спосіб знаходження невизначених коефіцієнтів.

Таким способом є наступна комбінація двох вказаних вище методів. А саме, треба спочатку знайти невизначені коефіцієнти методом підстановки коренів знаменника, причому використати усі такі корені (можна і комплексні), а якщо після цього залишаться не знайдені невизначені коефіцієнти, то прирівняти коефіцієнти при однакових степенях невідомого.

Приклад. Знайти невизначені коефіцієнти A, B, M, N у розкладі раціонального дробу:

$$\frac{2x-1}{(x^2+1)x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Додаємо елементарні дроби:

$$\frac{2x-1}{(x^2+1)x^2}=\frac{Ax\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+\left(Mx+N\right)x^2}{(x^2+1)x^2}$$

Прирівнюємо чисельники:

$$2x-1=Ax\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+\left(Mx+N\right)x^2.$$

$$2x-1=Ax^3+Ax+Bx^2+B+Mx^3+Nx^2$$

Єдиним дійсним коренем знаменника вихідного дробу є $x=0$. Використаємо спочатку цей корінь. Підставляємо $x=0$ у останню рівність, а потім прирівнюємо коефіцієнти при x, x^2 та x^3 у лівій та правій частинах:

$$\begin{array}{c|l} x=0 & -1=B \\ x & 2=A \\ x^2 & 0=B+N \Rightarrow N=1 \\ x^3 & 0=A+M \Rightarrow M=-2 \end{array}$$

Таким чином, шуканий розклад має вид:

$$\frac{2x-1}{(x^2+1)x^2}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{-2x+1}{x^2+1}$$

Наприкінці заважимо, що використання комплексного кореня знаменника $x=i$ спростило б знаходження невизначених коефіцієнтів A, M, N, причому ця підстановка цього одного комплексного кореня дозволила б знайти одразу два невизначені коефіцієнти.

Анотація. *Запропонований простий спосіб знаходження невизначених коефіцієнтів розкладу раціонального дробу.*

Література

Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навч.посібник. -.К. : Вища шк., 2015 – 648 с.

Іваненко А. В. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Слюнкіна С. А. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Осова Д. О. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – доц. Михайленко І. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА ЧЕРЕЗ МОНІТОР: АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ ТА ТРУДНОЩІВ САМОСТІЙНОГО ЗАСВОЄННЯ

Дистанційна освіта розглядається як форма організації навчального процесу, у межах якої взаємодія між викладачем і здобувачем освіти відбувається опосередковано - із використанням цифрових технологій та мережевих ресурсів. На відміну від традиційного аудиторного навчання, вона не прив’язана до конкретного місця проведення занять, що дозволяє розширити доступ до освітніх можливостей. Важливою характеристикою дистанційної освіти є поєднання самостійної роботи здобувачів із керованою діяльністю під супроводом викладача. Навчальний процес у такому форматі передбачає використання електронних курсів, відеоматеріалів, інтерактивних завдань і засобів контролю знань. При цьому ефективність навчання значною мірою залежить від здатності здобувача організовувати власну діяльність і працювати з інформацією.

Організація дистанційного навчання базується на принципах, що забезпечують його цілісність та результативність. Одним із ключових є принцип структурованості, який передбачає логічну послідовність подання навчального матеріалу та чітке розмежування тем і завдань. Не менш важливим є принцип зворотного зв’язку, що дозволяє своєчасно оцінювати результати навчання та коригувати освітній процес. Інтерактивність забезпечує активну участь здобувачів через виконання завдань, обговорення та використання цифрових інструментів. Також значну роль відіграє принцип індивідуалізації, відповідно до якого враховуються рівень підготовки, темп роботи та освітні потреби кожного студента.

Математичні дисципліни відрізняються високим ступенем абстракції, що зумовлює особливі вимоги до організації їх викладання. Засвоєння математичного матеріалу пов'язане не лише з запам'ятовуванням фактів, а передусім із розумінням зв'язків між поняттями та вмінням будувати логічно обґрунтовані міркування. У дистанційному форматі навчання роль логічного мислення зростає, оскільки здобувач освіти часто працює без безпосередньої підтримки викладача. Це потребує створення таких навчальних матеріалів, які стимулюють аналіз, порівняння та самостійне формулювання висновків.

Практична діяльність є основою засвоєння математичних знань. Саме в процесі розв'язування задач відбувається закріплення теоретичних положень і формування стійких умінь. У дистанційному навчанні особливого значення набуває систематичність виконання завдань і наявність різнорівневих вправ. Це дозволяє враховувати індивідуальні можливості студентів і поступово ускладнювати навчальний матеріал. Крім того, використання автоматизованих систем перевірки сприяє оперативному отриманню результатів.

В домашніх умовах зникає «академічна атмосфера». Психологічно важко підтримувати інтенсивність інтелектуальної напруги, необхідної для математики, коли поруч є побутові подразники. Дослідження показують, що відсутність безпосереднього візуального контакту з лектором призводить до швидкої втомлюваності та втрати концентрації вже на 20-й хвилині заняття. При дистанційній формі обсяг самостійної роботи зростає до 60%. Для опанування складних математичних алгоритмів здобувачеві часто бракує навичок самоосвіти, які в аудиторії зазвичай вирішуються миттєвою консультацією.

Специфіка математики −у живому виводі формул. Використання статичних презентацій замість динамічного написання доведень на дошці перешкоджає формуванню логічного мислення у студентів, оскільки вони бачать готовий результат, а не процес його отримання. Тому методика викладання математики «через монітор» потребує адаптації інструментарію до віртуального середовища. Матеріально-технічне забезпечення є фундаментом, без якого педагогічні зусилля викладача знецінюються. Більшість систем дистанційного навчання недостатньо адаптовані для математичного запису. Складність введення формул та перевірки рукописних робіт у цифровому форматі сповільнює комунікацію та оцінювання результатів.

Нерівномірність технічних можливостей студентів створює бар'єри для синхронної участі в заняттях. Будь-яка затримка зв'язку під час пояснення алгоритму розриває логічний ланцюжок і демотивує студента. Тому важливо студенту навчитись самостійно планувати, контролювати та оцінювати власну навчальну діяльність. Саме цей аспект є критичним для успіху в дистанційній математиці, оскільки роль викладача зміщується від «транслятора знань» до «тьютора-фасилітатора».

Серед шляхів подолання проблем та підвищення ефективності навчання математичним дисциплін дистанційно ми виділяємо наступні:

− використанням графічних планшетів або трансляцією процесу розв’язування через камеру, що дозволяє відтворити звичний формат роботи та зробити кожен етап розв’язання зрозумілим, це дозволяє краще контролювати хід виконання завдань і сприяє глибшому засвоєнню матеріалу);

− інтерактивність та індивідуалізація навчання (поєднання візуалізації, самостійної роботи та швидкого зворотного зв’язку дозволяє зробити навчальний процес більш ефективним, використання інтерактивних дошок, цифрових зошитів і спеціалізованих платформ створює можливість не лише отримувати знання, а й одразу перевіряти правильність виконання завдань та аналізувати помилки);

− адаптація навчальних матеріалів до умов дистанційного викладання (структурованість навчальних матеріалів, поетапне пояснення та активне використання візуалізації, унаслідок цього інформація сприймається легше навіть без безпосереднього контакту).

Поєднання різних форматів навчання дозволяє підвищити ефективність опанування математичних дисциплін і зробити цей процес більш зручним та результативним.

Висновок. Дистанційне навчання математичних дисциплін є ефективною, але складною формою освіти, що супроводжується психолого-педагогічними, методичними та технічними труднощами. Їх подолання можливе за умови використання сучасних цифрових інструментів, візуалізації, інтерактивних методів і активної самостійної роботи здобувачів вищої освіти.

Анотація. *У роботі проведено комплексний аналіз особливостей вивчення вищої математики в дистанційному форматі. Досліджено ключові чинники, що впливають на ефективність опанування математичних дисциплін без безпосереднього контакту з викладачем. У статті виокремлено головні труднощі самоосвіти: когнітивний бар'єр при сприйнятті абстракцій та проблему самодисципліни На основі аналізу літератури сформовано рекомендації щодо підвищення якості самостійного навчання за умови використання сучасних цифрових інструментів та візуалізації даних.*

Ключові слова: *вища математика, дистанційне навчання, здобувачі вищої освіти.*

Література

1.Жалдак, М. І. (2005). *Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі*. НПУ імені М. П. Драгоманова.

2.Кіяновська, Н. М., Семеріков, С. О. (2014). *Теоретико-методичні засади використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні вищої математики студентів інженерних спеціальностей*. Видавничий відділ НМетАУ.

3.Працьовитий, М. В., Гончаренко, Я. В. (2019). *Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів*. НПУ імені М. П. Драгоманова.

4.Гущина, Н. І., Орлова, Т. Г., Кондратова, Л. Г. **(**2026). *Нова школа: Організація дистанційного та змішаного навчання*. ВІППО.

Кравцов В. Д. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Кучер І. О. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Науковий керівник – доц. Гадецька С.В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМНИХ ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ

Вивчення матриць та операцій над ними є фундаментом сучасної лінійної алгебри, оскільки вони виступають потужним інструментарієм для аналізу складних систем у наукових, технічних та економічних розрахунках. Хоча перше знайомство з матрицями зазвичай відбувається через системи лінійних рівнянь, сфера їх застосування значно ширша.

Метою цієї роботи є дослідження специфічних властивостей матричних операцій, розв'язання нетривіальних рівнянь та аналіз типових помилок, що виникають через хибне перенесення законів звичайної алгебри на матричну.

1. Пастки алгебраїчних аналогій у матричних рівняннях. Однією з головних проблем для студентів є некритичне застосування законів скалярної алгебри до матриць. Наприклад, при розв'язанні рівняння

$$\left(2X^2\right)^{-1} = 2X^{-1}$$

можна отримати правильну відповідь $X=\frac{1}{4}E$ шляхом формальних перетворень. Проте, виникають проблемні моменти при спробі скорочення виразів, що потребують коректних підходів. Важливо пам'ятати: добуток двох матриць може дорівнювати нульовій матриці ($AB=0$), навіть якщо жодна з них не є нульовою. Це унеможливлює пряму аналогію з числами, де $ab=0$ означає $a=0$ або $b=0$. Так само, рівняння $A^2=0$ для матриць другого порядку має безліч розв'язків, окрім очевидного $A=0$, що підкреслює специфічність матричної структури.

2. Комутативність та формули скороченого множення. Основна відмінність матричної алгебри полягає у відсутності комутативності множення ($AB \neq BA$). Це

безпосередньо впливає на перетворення матричних виразів: 1) вираз $(A+B)(A-B)$ після розкриття дужок набуває вигляду $A^2-AB+BA-B^2$ і не може бути спрощений до A^2-B^2, оскільки $-AB$ та BA не взаємознищуються; 2) формули скороченого множення діють лише для перестановочних матриць. Прикладом таких є матриці A та одинична матриця E, або матриці виду $(A-mE)$ та $(A-nE)$; 3) якщо дві матриці A та B є перестановочними і мають обернені, то їхні обернені матриці A^{-1} та B^{-1} також будуть перестановочними.

3. Проблема існування оберненої матриці: від часткового до загального. Цікавою є задача про зв'язок матриць $C=E+AB$ та $D=E+BA$. Якщо існує обернена матриця до C, то чи існує вона для D? Для матриць другого порядку це можна довести через пряме обчислення елементів та використання властивості визначника добутку: $\det(AB)=\det(A)\det(B)$. Виявляється, що визначники таких матриць співпадають.

Для матриць довільного порядку n використовується більш загальний підхід через алгебраїчні перетворення: $D=E+BA=E+BC^{-1}CA=\ldots$. Цей метод дозволяє довести, що D є невиродженою, впроваджуючи у вираз матрицю C. Такі задачі формують навички строгої математичної аргументації.

4. Нільпотентні матриці та їх властивості. Нільпотентною називається квадратна матриця A, для якої існує таке натуральне k, що $A^k=0$. Дослідження показують, що для нільпотентних матриць другого порядку степінь нільпотентності не перевищує двох ($A^2=0$). Загальний вигляд усіх матриць другого порядку, квадрат яких є нульовим, описується формулою:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, a^2=-bc.$$

Аналогічно, пошук матриць, для яких $A^2=E$, показує, що таких матриць "набагато більше", ніж аналогічних чисел (які дорівнюють лише ±1).

5. Обчислення високих степенів та метод індукції. При обчисленні виразів типу A^{100} стандартною стратегією є знаходження перших кількох степенів (A^2, A^3), виявлення закономірності та її доведення методом математичної індукції. Такі задачі вимагають ретельного відстеження індексів та акуратних перетворень.

6. Власні числа та спеціальні випадки множення. Дослідження власних чисел часто потребує побудови характеристичного рівняння та аналізу отриманих функцій на екстремум. Наприклад, для матриці, елементи якої залежать від параметра x, можна знайти мінімальне власне число як функцію $\lambda_{\min}(x)$ та дослідити її графічно. Також існують задачі на доведення неможливості існування певних матриць. Наприклад, для специфічної нільпотентної матриці A третього порядку не існує матриці B, такої що $B^2=A$. Доведення від супротивного в таких випадках базується на ортогональності рядків та стовпчиків і властивостях визначників.

Анотація. *Дослідження проблемних задач теорії матриць демонструє, що матрична алгебра є набагато гнучкішою та складнішою за скалярну. Розуміння таких концепцій, як відсутність комутативності, нільпотентність та специфіка існування обернених матриць, є критично важливим для уникнення некоректних розрахунків. Опанування методів математичної індукції та аналізу від супротивного дозволяє розв'язувати задачі високого рівня складності.*

Ключові слова: *класифікаційне рішення, системах розпізнавання образів, аналіз даних, статистичний апарат.*

Література

1. Міжнародна студентська математична олімпіада IMC. – Режим доступу : http://www.imc-math.org.uk.
2. Hefferon J. Linear Algebra / Jim Hefferon. – University Press of Florida, 2009. – 449р.

Павлюх К. А. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Стрижаков І. О. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Науковий керівник – проф. Ємельянова Т.В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

МЕТОДИКА ПОБУДОВИ ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ У ПРОСТОРІ ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ДІЙСНИМИ ХАРАКТЕРИСТИЧНИМИ КОРЕНЯМИ

Математична модель процесу – інструмент в дослідженні динамічних систем, який дозволяє зрозуміти поведінку системи, її ключові характеристики та властивості.

Відомо, що зміна параметрів системи може привести до зміни поведінки системи, яка визначається розв'язками математичної моделі системи. В дослідженні динамічних систем, стан яких визначається часом, дуже важливу роль грає будування фазових траєкторій станів системи. Простір динамічної задачі це простір $(x_1,x_2;t)$ всіх можливих станів системи, яки описують інтегральні криви. Фазовий простір це простір фазових траєкторій, які є проекціями інтегральних кривих на площину (x_1,O,x_2). Фазова траєкторія відображає стан динамічної системи від часу

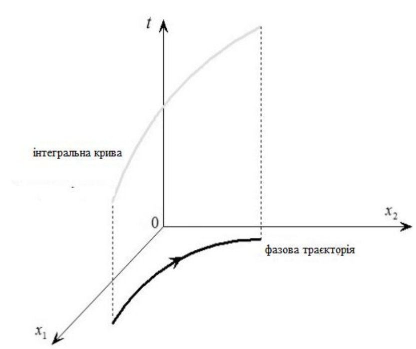


Рис.1. Фазові траєкторії станів системи у просторі $(x_1,x_2;t)$

Фазові траєкторії надають можливість слідкувати за станом системи з часом. Динамічна система характеризується наявністю особливих станів. Ці стани називаються станами рівноваги. Прослідити поведінку системи поблизу особливих точок, точок стійкості, які відповідають станам рівноваги, надають фазові траєкторії системи. Фазові траєкторії полегшують розуміння та аналіз стійкості різних станів системи.

Метою проведеного дослідження було продемонструвати фундаментальний інструмент дослідження стійкості динамічної системи, метод створення фазових траєкторій математичної моделі лінійної системи.

Розглянемо лінійну однорідну систему 2-го порядку з сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

визначник матриці A якої не дорівнює нулю, тому система має одну точку рівноваги у початку координат (0,0).

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для дослідження характеру поведінки фазових траєкторій системи треба знайти власні значенні λ_1, λ_2 та відповідні власні вектори лінійного перетворення, яке задає матриця $\|A\|$. Власні вектори лінійного перетворення позначаємо $\|h_1\|, \|h_2\|$.

Нехай власні значення λ_1, λ_2 дійсні, різні і відрізняються від нуля. В такому випадку існує базис з власних векторів $\|h_1\|, \|h_2\|$, в якому система приймає вигляд

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2. \end{cases}$$

Відповідно, розв'язки системи

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

де C_1, C_2 - довільні сталі.

Для побудови фазового портрету у фазовому просторі, який є двовимірною площиною x_1Ox_2, треба визначити власні вектори $\|h_1\|, \|h_2\|$ - напрямні вектори фазових траєкторій.

Приклад 1. Обчислити напрямні вектори та зробити ескіз фазових траєкторій лінійної автономної системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Визначник матриці А якої не дорівнює нулю, тому система має одну точку рівноваги у початку координат (0,0)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Представимо систему рівнянь у матричній формі

$$\begin{Vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}$$

Корні характеристичного рівняння, власні значення матриці системи

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4.$$

Власний вектор $\|h_1\|$, що відповідає значенню $\lambda_1 = 1$, має координати $\begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Vmatrix}$,

тому

$$\begin{Vmatrix} 2-1 & 2 \\ 1 & 3-1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1.$$

Власний вектор $\|h_2\|$, що відповідає значенню $\lambda_2 = 4$, має координати $\begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix}$, тому

$$\begin{Vmatrix} 2-4 & 2 \\ 1 & 3-4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2\beta_1 + 2\beta_2 = 0 \\ \beta_1 - \beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = 1, \beta_2 = 1.$$

Власні вектори

$$\|h_1\| = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \|h_2\| = \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

лінійного перетворення, яке задає матриця $\|A\|$, визначають нову систему координат на фазовій площині (x_1,x_2). В цьому базисі задана система приймає вигляд

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 \cdot y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 \cdot y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = 1 \cdot y_1, \\ \dot{y}_2 = 4 \cdot y_2. \end{cases}$$

Відповідно, розв’язками системи є функції

$$y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \Rightarrow y_1(t) = C_1 e^{t},$$
$$y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow y_2(t) = C_2 e^{4t},$$

де C_1 , C_2 - довільні сталі.

Рівняння фазових траєкторій отримані методом виключення змінної t мають вигляд

$$y_2 = C_2 \left(\frac{y_1}{C_1} \right)^4, C_1 \neq 0,$$

$$y_2 = \frac{C_2}{C_1{}^4} \left(y_1 \right)^4.$$

Оскільки власні значення задовольняють нерівності $0 < \lambda_1 < \lambda_2$,то ось Oy_1 є дотичною до фазових траєкторій, а з ростом t рух по фазових траєкторіях здійснюється в напрямі від початку координат (рис. 2). Точка рівноваги (0,0) називається нестійким вузлом.

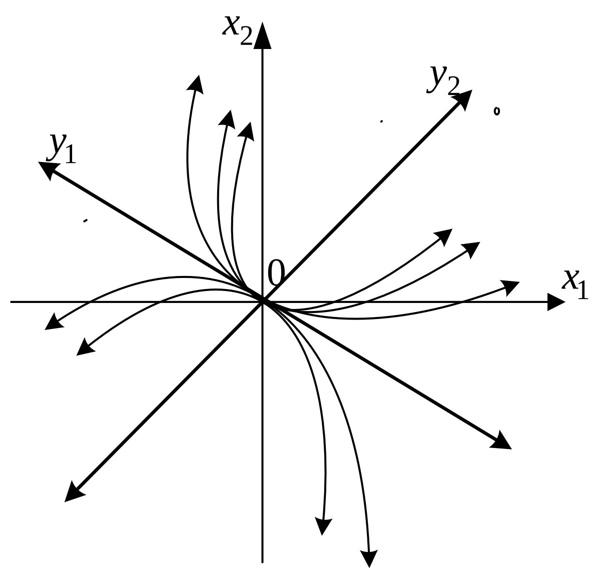


Рис. 2. Фазовий портрет траєкторій на фазовій площині (y_1,O,y_2)

Анотація. *Досліджено якісні характеристики розв'язку лінійної системи 2-ого порядку з дійсними власними значеннями. Показано, як будується базис векторного перетворення, який складається з власних векторів системи. Доведено, як знаходиться розв'язок системи у цьому базисі. Побудовані фазові траєкторії у введеному базисі, вивчено умови, що визначають напрям руху точки вздовж траєкторії.*

Ключові слова: *точка рівноваги, визначник системи, власні вектори системи, фазовий портрет станів системи, фазова траєкторія, фазова площина.*

Література

1. Дослідження стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь: навчально-методичний посібник: [Електронний ресурс]: для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 111 "Математика" / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: А. Л. Гречко, М. Є. Дудкін. – Електронні текстові дані (1 файл: 345Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 25с.
2. Диференціальні рівняння. Конспект лекцій: навчальний посібник / В. Г. Бондаренко. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сикорського, 2023. – 124 с.
3.Прикладні задачі теорії стійкості : посібник / Ф. Г. Гаращенко, В. В. Пічкур. – Київ: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2013. – 120 с.

Скрипник О. Д. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – ст. викл. Мороз І. І.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

НАЦІОНАЛЬНА ОСВІТНЯ МАТЕМАТИЧНА СПАДЩИНА ХАРКІВШИНИ В XIX-XX СТОЛІТТЯ: МЕТОДИЧНИЙ АКЦЕНТ

Харківщина – потужний осередок математичної науки, де працювали видатні вчені світового рівня, які зробили фундаментальний внесок у створення харківської математичної школи, яку було засновано на при кінці 19-го століття.

У 1879 році з ініціативи професора Харківського університету професора В.Г. Імшенецького було засновано Харківське математичне товариство (ХМТ). Згідно зі статутом, метою ХМТ було «сприяння розробці як чисто наукових, так і педагогічних питань у галузі математичних наук». Засідання з науковими доповідями проводилися, як правило, щомісяця, а матеріали засідань регулярно друкувалися – спочатку в окремих збірках протоколів і повідомлень математичного товариства при Харківському університеті, а потім як окремий журнал «Повідомлення Харківського математичного товариства».

У 1885 році до Харкова переїхав О.М. Ляпунов, учень П.Л. Чебишова. У Харкові О.М. Ляпунов займався дослідженнями з теорії стійкості, теорії потенціалів та теорії ймовірностей, завдяки яким здобув світову славу. О.М. Ляпунов відігравав провідну роль у діяльності ХМТ, завдяки йому математичні дослідження та доповіді на засіданнях досягли набагато вищого рівня, ніж був до нього. За 17 років з 1885 до 1902 року О.М. Ляпунов зробив 27 доповідей про свої наукові результати на засіданнях ХМТ. Пізніше, з 1902 року по 1906 рік, головою ХМТ був В.А. Стеклов, учень О.М. Ляпунова, відомий своїми роботами з математичної фізики та математичного аналізу.

Протягом 40 років, з 1906 по 1946, головою ХМТ був Д.М. Синцов, який працював у галузі геометрії та геометричної теорії рівнянь Пфаффа та Монжа. Д.М. Синцов був активним учасником руху та реформ у шкільної освіті з математики, працював у міжнародному комітеті з просування цих реформ, який очолював Ф. Кляйн. Завдяки ініціативі Д.М. Синцова ХМТ брав активну участь у покращенні математичної освіти в школах Харківської області, доклав значних зусиль для підтримки математичної бібліотеки ХМТ.

З 1908 по 1933р. у Харкові працював С.Н. Бернштейн, один з провідних математиків XX-сторіччя. У ці роки всі види діяльності ХМТ перебували під його впливом. Багато відомих результатів досліджень С.Н. Бернштейна були вперше оприлюднені на засіданнях ХМТ, а потім опубліковані у «Повідомленнях ХМТ». Серед його учнів були В.Л. Гончаров та Я.Л. Геронімус, які згодом стали відомими математиками. Після 1917 року С.Н. Бернштейн використовував свою високу міжнародну репутацію для підтримки та подальшого розвитку математики у Харкові. У 1929 році він організував Інститут математики в Харкові, який дав змогу багатьом математикам проводити наукові дослідження. В 1930 році у Харкові відбувся Перший Всесоюзний Математичний Конгрес, у якому взяли участь також багато іноземних математиків, серед яких були Ж. Адамар, Д. Данжуз та П. Монтель. Невдовзі, після конфлікту з харківськими лідерами комуністичної партії, С.Н. Бернштейн був змушений покинути Харків, але перед тим запросив Н.І. Ахієзера переїхати до Харкова, В 1933 році Н.І. Ахієзер став директором Інстітуту математики, а з 1947 року головою ХМТ. Пізніше ХМТ очолювали О.В. Погорелов, В.О. Марченко, Й.В. Островський, а з 2013 року президентом ХМТ є Є.Я. Хруслов.

Роботи Н.І. Ахієзера з теорії апроксимації, проблеми моментів та теорії операторів добре відомі сьогодні, а його книги на ці теми стали зразком математичної літератури. Н.І. Ахієзеру вдалося створити сильну математичну спільноту у Харкові, до якої належали такі видатні математики другої половини ХХ-сторіччя: Я.П. Бланк, В.М. Борок, І.М. Глазман, Г.І. Дрінфельд, Е.М. Жмудь, В.Е. Кацнельсон, М.Й. Кадець, Б.Я. Левін, М.С. Лівшиць, Ю.І. Любіч, А.Д. Мишкіс, О.Я. Повзнер, В.П. Потапов, Л.І. Ронкін, А.К. Сушкевич, І.Д. Чуєшов та В.О. Щербіна.

У 1950 році рішенням радянського уряду Харківський Інститут математики було закрито. Важливою подією стало заснування в 1960 році Харківського фізико-технічного інституту низьких температур, засновником і першим директором якого був фізик Б.І. Веркін, людина широкого кругозору з великою повагою до чистої математики. Він запросив провідних харківських математиків Н.І. Ахієзера, І.М. Глазмана, Б.Я. Левіна, В.О. Марченка, О.В. Погорелова та А.Д. Мишкіса приєднатися до інституту разом із групою колишніх учнів та продовжити математичні дослідження, що надало поштовху до подальшого розвитку математичним дослідженням у Харкові. Було засновано Математичне відділення інституту, першим керівником якого був Л.А Пастур. Великою честю для харківських математиків стало нагородження у 1980 році В.Г. Дрінфельда медаллю Філдса (аналог Нобілевської премії для математиків).

До 1992 року ХМТ зазвичай проводило щомісячні наукові семінари з доповідями харківських математиків і їх подальшим виданням у журналі «Теорія функцій, функціональний аналіз і їх застосування». Після розпаду СРСР та припинення фінансування наукових досліджень багато харківських математиків знайшли роботу за кордоном, що завдало серйозної шкоди роботі ХМТ. Тим не менш, ХМТ продовжувало проводити наукові семінари. Так, Марина В'язовська, наукова діяльність якої тісно пов'язана с традиціями харківської математичної школи, отримала у 2022 році медаль Філдса і стала другою жінкою в світі, яка отримала цю почесну нагороду.

Після початку повномасштабної війни Росії проти України у 2022році Харків став прифронтовим містом і постійно перебуває під ворожими обстрілами, тому багато харківських математиків вимушені були залишити Харків, але ХМТ продовжує працювати, організовуючи періодичні онлайн-зустрічи, присуджує стипендії імені Н.І. Ахієзера для заохочення молодих математиків.

Література

1.Математика України. Електрон. ресурс.- Режим доступу:http://www.refine.org.ua/pageid – 2962-2.html.

2.Ostrovskii I.V. “Kharkov Mathematical Society.” European Mathematical Society, December, 1999, 34,26-27.

ПРОФЕСІЙНО-ПРИКЛАДНІ МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ ЯК ОСНОВА ФАХОВОЇ ПІДГОТОВКИ ЗДОБУВАЧА

Алексієнко С.В. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – ст. викл. Мороз І. І.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

МАТЕМАТИКА В ОСНОВІ ВИНАХОДІВ І ТЕХНОЛОГІЙ: МЕТОДИЧНИЙ АСПЕКТ

Математика – це спосіб мислення. Математика – це такий спосіб мислення**,** який розвиває аналітичні здібності, вчить страктувати інформацію та знаходити креативні рішення складних проблем. Тому математичний склад розуму високо цінується роботодавцями в багатьох сферах науки та виробництва. Математика лежить в основі таких сучасних професій: програмування, інженерія, економіка, фінанси, робототехніка, які спираються на математичні закони та алгоритми. Навіть у творчих професіях, таких як дизайн чи архітектура, використовуються геометричні принципи та розрахунки. Математика – це не просто наука, а спадщина, яка передається з покоління в покоління і збагачується новими ідеями та застосуваннями.

ТОП-професій майбутнього, де потрібна математика.

Розглянемо конкретні приклади професій, де математика відіграє ключову роль. Це допомагає зрозуміти практичне значення математики і надихає на вибір майбутньої спеціальності.

Аналітик даних – це сучасний дизайнер інсайтів. Він занурюється у величезні масиви даних, шукає приховані закономірності та тренди, які допомагають компаніям приймати зважені рішення. Цифри для аналітика це код, який вони розшифровують за допомогою статистики.

Розробник програмного забезпечення це архітектор цифрового світу, їхні будівельні блоки це математичні алгоритми та логіка, з яких вони створюють програми та додатки, що робить наше життя зручнішим.

Фінансовий аналітик це навігатор у світі грошей. Він аналізує біржові дані, економічні тренди та допомагає інвесторам і компаніям знаходити найбільш вигідні можливості для зростання капіталу.

Інженер це творець матеріального світу. Від хмарочосів та літаків усе це втілення законів математики, фізики та креативності людського розуму. Інженери проектують і будують речі, які забезпечують подальший прогрес людства.

Логістик це спеціаліст з логістики - науки про планування, реалізацію і контроль ефективних і економних з точки зору витрат операцій переміщення і зберігання матеріалів, напівфабрикатів і готової продукції, а також пов'язану з ними інформацію про постачання товарів від місця виробництва до місця споживання відповідно до вимог клієнтури. Він шукає оптимальних рішень, що дозволяють економіці ефективно освоїти необхідні об'єми перевезень при можливо малих витратах засобів і сприяє стабілізації і подальшому підйому промисловості і сільського господарства.

Економіст це дослідник економічних процесів. Використовуючи математичні моделі, він аналізує тенденції та фактори, що впливають на розвиток економіки країн, галузей та компаній. Економічні прогнози допомагають у прийняті важливих рішень.

Робототехнік це творець розумних машин, що створює роботів, які можуть виконувати різні операції, досліджувати небезпечні місця. Робототехніка поєднує механіку,електроніку та програмування, де математика відіграє ключову роль.

3-D-дизайнер це цифровий скульптор. За допомогою геометрії та алгоритмів візуалізації він створює фотореалістичні 3-D-моделі, які використовуються у різних сферах діяльности.

Бізнес-аналітик це діагност та консультант для компаній. Він аналізує бізнес-проекти, виявляє можливості для оптимізації витрат та розробляє стратегії зростання прибутку, спираючись на методи математичного моделювання.

Фахівець з кібербезпеки це цифровий захисник. Він застосовує математичні методи криптографії та аналізу ризиків, щоб захистити комп'ютерні системи та мережі від хакерських атак.

Це лише невеликий перелік професій, де математика має велике значення. Насправді, математичні знання і навички потрібні в багатьох сферах – від мистецтва до психології, адже математика формує таке креативне мислення, яке допомагає страктувати інформацію, знаходити і приймати зважені рішення.

Чи замінить штучний інтелект людину в сучасних професіях ?

З розвитком **ШІ** з'явилася думка, що він витіснить людину з деяких професій. Важко прогнозувати майбутнє, поки зрозуміло лише те, що деякі з професій можуть бути частково автоматизовані, але ключова роль людини та фахівця точно збережеться. Наведемо декілька прикладів:

Аналітик даних **ШІ** може аналізувати великі обсяги даних і точніше, ніж людина. Однак для інтерпретації результатів та прийняття рішень все ще потрібен людський досвід і концептуальне рішення.

Фінансовий аналітик машинного навчання вже використовується для аналізу ринкових трендів і прийняття інвестиційних рішень. Але для глибокого розуміння економічних факторів потрібен людський розум.

Штучний інтелект швидше доповнить та розширить можливості цих професій, а не повністю замінить їх. Співпраця людини і **ШІ** може привести до кращих результатів і відкрити нові можливості в кожній сфері. Ключовим є розвиток навичок, які відрізняють людей від машин – креативність, критичне мислення, емоційний інтелект та здатність приймати етичні рішення.

Література

1.Айзексон Волтер, Інноватори, Київ:Наш формат, - 2017. - 488 с.

2.Стівен Строгац. Екскурсія математикою, 2019. - 256 с.

Білий І.А. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – ст. викл. Мороз І. І.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ФУНДАМЕНТАЛЬНЕ ПОНЯТТЯ АЛГОРИТМУ В СУЧАСНІЙ МАТЕМАТИЧНІЙ НАУЦІ

Алгоритм – це впорядкований набір інструкцій, який визначає послідовність дій для виконання певного завдання. Іншими словами, це покрокова інструкція, яку потрібно виконати,щоб отримати конкретний результат.

Алгоритм – це, по суті, покрокова інструкція для виконання завдання. Наприклад, ви хочете приготувати страву, тоді вам потрібен рецепт, де вказано, що і в якому порядку треба робити. Так само працює алгоритм: він каже, які дії потрібно виконати і в якому порядку, щоб досягти потрібного результату. Наприклад, у комп'ютерній програмі алгоритм визначає, як програма буде обробляти дані і що робити в кожній ситуації. Деякі алгоритми можуть мати чітко визначені кроки, а інші можуть допускати варіанти, коли рішення залежить від конкретних умов.

Алгоритми зустрічаються не тільки в програмах, вони зустрічаються в нашому повсякденному житті. Наприклад, коли ми плануємо свій день або розв'язуємо якусь задачу, то несвідомо користуємось алгоритмами.

Алгоритми допомагають розв'язувати математичні задачі, у математичних розрахунках та в оптимізації процесів у різних сферах. Вони стали основою для багатьох сучасних технологій, включаючи штучний інтелект, де алгоритми допомагають машинам виконувати складні завдання.

Розглянемо види алгоритмів. Серед різноманіття алгоритмів можна виділити три основні види: лінійні алгоритми, алгоритми з розгалуженнями та алгоритми з повтореннями.

Лінійні алгоритми.

Лінійний алгоритм – це алгоритм, у якому всі дії виконуються послідовно, одна за одною. Кожен крок такого алгоритму здійснюється після попереднього, і цей процес не передбачає відхилень або вибору. Такий алгоритм можна уявити як прямий шлях, де кожна наступна дія виконується лише після завершення попередньої.

Лінійні алгоритми часто використовуються в математичних задачах, які не потребують складних рішень або вибору між варіантами. Вони прості та зрозумілі у виконанні.

Алгоритми з розгалуженнями.

Алгоритм з розгалуженням – це алгоритм, який передбачає виконання різних дій залежно від певних умов. Він схожий на роздоріжжя, де людина обирає один з декількох шляхів залежно від ситуації. Наприклад, в задачах математики, логістики серед деяких можливих варіантів розв’язання обирають оптимальний.

Такі алгоритми широко використовуються в програмуванні, коли потрібно приймати рішення на підставі певних умов. Вони дозволяють створювати більш гнучкі програми, які можуть адаптуватися до різних ситуацій.

Циклічні алгоритми.

Циклічний алгоритм (або алгоритми з повторенням) – це алгоритм, у якому певна дія або послідовність дій повторюється кілька разів. Такі алгоритми використовуються тоді, коли необхідно виконати ту саму операцію багаторазово.

Алгоритми з повтореннями часто використовуються там, де потрібно обробити великі обсяги даних або виконати одну й ту саму задачу кілька разів.

Вони є важливим елементом у програмуванні, наприклад, під час роботи з циклами в коді.

Розглянемо приклади використання алгоритмів в різних аспектах роботи комп'ютерів і програм:

Обробка даних: Алгоритми використовуються для сортування, пошуку і фільтрації даних. Наприклад, алгоритми сортування, такі як швидке сортування або сортування злиттям, дозволяють ефективно організовувати великі обсяги даних.

Шифрування: Алгоритми відіграють ключову роль у захисті інформації. Наприклад, алгоритми шифрування, такі як AES або RSA, використовуються для захисту даних під час передачі через інтернет.

Пошук інформації: Пошукові системи, як-от Google, використовують складні алгоритми для пошуку інформації в інтернеті та її ранжування.

Штучний інтелект: У галузі штучного інтелекту алгоритми використовуються для навчання моделей на великих обсягах даних, розпізнавання зображень, обробки природної мови та ухвалення рішень.

Оптимізація: Алгоритми оптимізації використовуються для пошуку найкращих рішень у задачах, що вимагають максимізації або мінімізації певних параметрів. Наприклад, алгоритми лінійного програмування дозволяють знаходити оптимальні шляхи в транспортних задачах.

Комп'ютерна графіка: Алгоритми застосовуються для побудови та відтворення зображень, анімації та 3D-моделей. Вони визначають, як пікселі відображаються на екрані, як об'єкти рухаються в просторі, як обчислюються відображення світла на поверхні.

Створення алгоритму починається з чіткого розуміння задачі. Програміст повинен визначити, які саме кроки необхідні для досягнення мети, і як ці кроки можуть бути впорядковані для забезпечення найбільш ефективного виконання.

Основні етапи створення алгоритму включають:

Аналіз задачі: Визначення вхідних та вихідних даних, а також умов, які мають бути виконані.

Розробка плану: Розбиття задачі на під задачі та визначення послідовності дій для їх вирішення.

Написання алгоритму: Формулювання алгоритму у вигляді кроків або інструкцій. Це може бути зроблено природною мовою, за допомогою псевдокоду або блок-схеми.

Тестування: Перевірку алгоритму на різних наборах даних, щоб переконатися, що він працює правильно і ефективно.

Оптимізація: Поліпшення алгоритму для підвищення його ефективності, наприклад, зменшення кількості операцій або використання меншої кількості ресурсів.

Алгоритми є основою програмування. Вони допомагають комп'ютерам виконувати завдання ефективно і надійно. Розробка якісних алгоритмів дозволяє створювати програми, які працюють швидко і з мінімальними витратами ресурсів.

Анотація. *Алгоритми також відіграють важливу роль у розвитку нових технологій, таких як штучний інтелект і великі дані. Вони допомагають розв'язувати складні задачі і відкривають нові можливості в комп'ютерних науках.*

Література

1.Глібовець М.М. Основи комп'ютерних алгоритмівКиїв:Києво –Могилянська академія,2003. - 450 с.

2.Зубенко В.В., Омельчук Л.А. Програмування.-К.: «Київський університет»,2011. – 623 с.

Ведмідько Д. О. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – доц. Михайленко І. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ЧОМУ КАЛЬКУЛЯТОР НЕ ЗАМІНИТЬ РОЗУМІННЯ ІНТЕГРАЛА? ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ТРАНСПОРТНОЇ ГАЛУЗІ ОЧИМА МАЙБУТНЬОГО ФАХІВЦЯ

У сучасних умовах стрімкого розвитку цифрових технологій математична освіта зазнає суттєвих змін. Студенти технічних спеціальностей сьогодні мають доступ до великої кількості програмних продуктів, онлайн-калькуляторів, мобільних застосунків та спеціалізованих математичних платформ, які здатні виконувати складні обчислення практично миттєво. Однією з тем, яка особливо часто пов’язується з використанням цифрових інструментів, є інтегральне числення. Багато сучасних математичних сервісів дозволяють не лише обчислити інтеграл, а й побудувати графік функції, показати покрокове розв’язання та надати числовий результат. Проте виникає важливе питання: чи може звичайний калькулятор або комп’ютерна програма повністю замінити глибоке математичне розуміння інтеграла?

Для майбутніх фахівців транспортної галузі це питання є особливо актуальним. Математика у технічній освіті виступає не просто навчальною дисципліною, а фундаментом професійної підготовки інженера, логіста, механіка чи спеціаліста з транспортних систем. Саме математичні знання формують здатність аналізувати технічні процеси, прогнозувати результати, оцінювати ризики та приймати ефективні рішення у реальних виробничих умовах. Інтеграл, у свою чергу, займає важливе місце серед математичних інструментів, які використовуються у професійній діяльності майбутніх спеціалістів транспортної сфери. Дослідження показують, що інтегральне числення є однією з базових складових інженерної математичної підготовки, проте студенти часто мають труднощі саме з глибоким розумінням цього поняття.

Однією з головних причин такого явища є надмірна орієнтація на отримання швидкого результату. Сучасний студент часто сприймає математичний калькулятор як основний засіб вирішення задачі. Якщо необхідно знайти визначений інтеграл, достатньо ввести формулу в програму і через кілька секунд отримати відповідь. Проте математичний результат без розуміння його змісту не завжди має практичну цінність. Калькулятор не пояснює, чому використовується саме інтегрування, не показує фізичного змісту площі під графіком функції та не формує вміння інтерпретувати отриманий результат у прикладній задачі.

Для прикладу, у транспортній галузі часто виникає необхідність визначити шлях транспортного засобу за умов змінної швидкості руху. У таких випадках застосовується інтегральне числення.

Крім визначення шляху, інтеграл активно використовується для аналізу витрат пального транспортних засобів. У реальних умовах витрати пального змінюються залежно від навантаження двигуна, дорожніх умов, швидкості руху, погодних факторів та технічного стану автомобіля. Якщо спеціаліст не розуміє принципів побудови математичної моделі, то навіть наявність сучасного програмного забезпечення не гарантує правильного аналізу ситуації.

Також інтегральне числення використовується при розрахунках механічного навантаження на деталі транспортних конструкцій. При проектуванні мостів, дорожніх покриттів, залізничних систем або автомобільних вузлів важливо правильно визначити розподіл сил, де інтегральні методи виступають одним із ключових математичних інструментів. У сучасній інженерній практиці прикладні задачі інтегрального числення мають безпосередній зв’язок з транспортним моделюванням та аналізом швидкісних характеристик руху.

Не менш важливою є проблема формального навчання. Коли студент використовує калькулятор без розуміння математичних основ, формується поверхневе засвоєння матеріалу. Він може отримати правильну відповідь, але не здатний самостійно адаптувати метод до нестандартної задачі. У професійній діяльності транспортного спеціаліста такі ситуації трапляються постійно, оскільки виробничі умови рідко відповідають типовим навчальним прикладам. Саме тому розвиток математичного мислення має більшу цінність, ніж автоматичне виконання обчислень.

Дослідження в галузі математичної освіти свідчать, що студенти інженерних спеціальностей часто сприймають інтеграл лише як набір формул і алгоритмів, не усвідомлюючи його геометричного, фізичного та прикладного змісту. Це значно ускладнює подальше застосування математичних знань у професійній діяльності.

Разом з тим не можна заперечувати позитивний вплив сучасних цифрових технологій. Використання математичних калькуляторів, програм моделювання та спеціалізованих систем комп’ютерної математики значно спрощує перевірку результатів, прискорює складні розрахунки та дозволяє працювати з великими масивами даних. Дослідження показують, що використання цифрових інструментів може покращувати навчання, але лише за умови поєднання технологій із фундаментальним математичним розумінням.

Висновки. Інтегральне числення займає важливе місце у професійній підготовці майбутніх фахівців транспортної галузі. Незважаючи на широкі можливості сучасних цифрових технологій, калькулятор не здатний повністю замінити глибоке розуміння математичної сутності інтеграла. Саме усвідомлення фізичного змісту математичних моделей, вміння аналізувати отримані результати та адаптувати математичні методи до реальних інженерних задач формує компетентного спеціаліста. Використання цифрових технологій є ефективним лише тоді, коли вони доповнюють фундаментальні знання, а не підміняють їх.

Анотація. *У статті досліджено роль інтегрального числення у професійній підготовці майбутніх фахівців транспортної галузі. Проаналізовано можливості використання сучасних цифрових обчислювальних засобів у процесі вивчення математики. Розглянуто прикладні задачі транспортної сфери, у яких використовується інтеграл. Обґрунтовано, чому цифрові калькулятори не можуть повністю замінити глибоке математичне розуміння інтегрального числення.*

Ключові слова: *інтеграл, математична освіта, транспортна галузь, інженерна підготовка, цифрові технології, прикладна математика.*

Література

1. Almeida M. E., Queiruga-Dios A., Cáceres M. J. Differential and Integral Calculus in First-Year Engineering Students: A Diagnosis to Understand the Failure. *Mathematics*. 2021. Vol. 9, № 1. P. 61. DOI: doi.org.
2. Nilsen H. K., Knutsen K. H. First-Year Engineering Students' Interpretations of Differentials and Definite Integrals. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 2023. Vol. 9, № 1. P. 173–200. DOI: doi.org.
3. Bueno S., Burgos M., Godino J. D., Pérez O. Intuitive and formal meanings of the definite integral in engineering education. *Relime: Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. 2022. Vol. 25, № 2. P. 135–168. DOI: https://doi.org/10.12802/relime.22.2521.
4. Dudek S., Szydło R. Applications of integral calculus. *Calculus for Engineering Students: Fundamentals, Real Problems, and Computers* / ed. by J. Rodriguez et al. Academic Press, 2020. Ch. 13. P. 331–360. DOI: doi.org.
5. Gawarecki L., Dong Y. Redesigned Application-oriented Integral Calculus Curriculum. *ResearchGate*. 2020. URL: https://www.researchgate.net/publication/344818156 (date of access: 21.05.2024).

Vasylets Mykhailo (undergraduate student, 1year),
Technical university, Kosice, Slovakia,
Ovcharenko Daria (undergraduate student, 1year)),
Research Advisor - Associate Professor O. Ptashnyi
Kharkiv National Automobile and University «KNAHU»

EFFECTIVENESS OF CONSIDERING PARADOXES FOR UNDERSTANDING THE CONNECTION BETWEEN PROBABILISTIC CONCEPTS AND REALITY

1. Introduction: The Problem of Understanding Probability. A recurring difficulty in teaching probability theory is that students quickly learn computational techniques while remaining uncertain about the meaning of probability itself. Formulas are applied mechanically, often without reflection on what numerical probabilities represent in real situations.

Unlike many areas of mathematics, probability theory forces us to confront uncertainty directly. Students frequently ask whether probability describes genuine randomness in the world or merely our lack of knowledge. This question has no simple answer, and misunderstanding it often leads to systematic errors of reasoning.

The goal of this exposition is therefore pedagogical: to clarify how probability theory should be interpreted and how its concepts relate to intuition, modeling, and decision making.

2. Different Faces of Probability. Probability appears in several seemingly different forms.

Classical probability. In its simplest formulation,

$$P(A) = \frac{\text{number of favorable outcomes}}{\mathit{number}\ \text{of all outcomes}},$$

assuming all outcomes are equally likely.

Geometric probability. When outcomes form a continuous space, probability may be interpreted as a ratio of measures, for example,

$$P(A) = \frac{Area(A)}{Area(\Omega)}.$$

Decomposition into cases. Many problems are solved by constructing probability trees, decomposing complicated events into simpler conditional possibilities.

Although these approaches look different, they share a common mathematical foundation: all are special cases of a *measure*. Probability theory ultimately studies measures normalized so that

$$P(\Omega) = 1.$$

This unifying viewpoint explains why probability theory extends naturally from finite counting problems to continuous models and stochastic processes.

3. Determinism, Randomness, and Human Error. Probability becomes philosophically subtle when contrasted with determinism.

Consider a fair coin that has produced the sequence [H,H,H,H,H.] What is the probability that the next toss yields tails? The correct answer remains 0,5. Any different answer reflects the well-known *gambler's fallacy:* the mistaken belief that past independent events influence future outcomes.

Now consider a different experiment. A die produces the sequence [1,2,4,6,4,2,. . .]. One might again conclude that the probability of obtaining 3 equals 1/6. How-ever, suppose the die is secretly biased and never produces the number 3. The apparent randomness hides an underlying deterministic structure unknown to the observer.

These examples reveal an essential point: probability describes not the mechanism itself but the information available to us about the mechanism.

4. Probability as a Model of Knowledge. The question whether genuine randomness exists in nature remains open in physics and philosophy. Probability theory, however, does not require an answer. Its purpose is different.

Probability theory provides a mathematical model for reasoning when too many factors influence an outcome to be tracked individually. Like all models, it simplifies reality. The probabilistic description replaces detailed causal information with structured uncertainty.

Several counterintuitive facts follow from this modeling viewpoint. For in-stance, an event may have probability zero without being impossible; continuous probability spaces contain infinitely many such events.

Understanding probability therefore requires intellectual caution. Numerical results must always be interpreted relative to the assumptions of the model being used.

5. When Probability Defies Intuition. Human intuition about randomness is notoriously unreliable. Famous paradoxes illustrate situations in which mathematical reasoning contradicts expectation.

5.1. The Birth day Paradox. The birthday paradox asks: in a group of n people, what is the probability that at least two share a birthday? Surprisingly, with only $n = 23$, the probability exceeds 1/2.

Calculation: Let $P(n)$ denote the probability that no two people share a birthday (ignoring leap years):

$$P(n)=\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-n+1}{365}.$$

Then the probability that at least two share a birthday is $1 - P(n)$.

For $n = 23$:

$$P(23) \approx 0.4927 \;\Rightarrow\; 1 - P(23) \approx 0.5073 > 1/2.$$

Intuition fails here because humans underestimate the number of possible pair wise comparisons among n individuals.

5.2. The Monty Hall Problem. In the Monty Hall problem, a contestant chooses one of three doors; behind one door is a prize. The host, who knows the prize location, opens another door revealing no prize, then, offers the contestant a chance to switch.

Question: Should the contestant switch?

Solution: Let C be the chosen door, P the prize door. Initially, $P(C$ chosen) = 1⁄3, P (other) = 2⁄3. Switching gives the contestant the remaining probability, 2⁄3, of winning. Thus, switching doubles the chance of success.

For better understanding one can imagine the same situation but with 10^6 doors where the price is just behind one and host opens every door except one. The unopened door takes probability of all open. The key idea that messes with intuition is that host does know behind which door there is a price. His choice on what doors to open is dependant on what door player chose as first. Drawing a probability tree can be helpful.

6. Expectation and Rationl Decision Making. A central concept in probability theory is the m expectation. For a discrete random variable X taking values x_i with probabilities p_i, the expectation is defined as

$$E[X] = \sum_i x_i p_i .$$

Expectation admits a natural interpretation as a fair price in repeated games. If a player pays less than the expected value, the game is favorable in the long run; if the price exceeds the expectation, losses become likely over many repetitions.

This interpretation leads to the famous *St. Petersburg paradox*. A game with theoretically infinite expected payoff appears irrational to play for large amounts of money. The paradox is resolved by recognizing that the subjective value of money is not linear. If utility is modeled by a logarithmic function,

$$U(x) = \log x,$$

the corresponding expected utility becomes finite, reconciling mathematical prediction with human behavior.

6.1. The St. Petersburg Paradox. Consider a game: a fair coin is tossed until the first head appears. If the first head appears on the n-th toss, the player wins 2^n dollars. The expected payoff is

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Mathematically, the expected value is infinite, yet in practice, no one would pay a huge amount to play.

Resolution via utility: Introduce a utility function $U(x)$ representing subjective value. For example, logarithmic utility:

One can interpret this by example: one dollar for the man with 10 dollars and 1000 dollars does not mean the same.

$$U(x) = \log x.$$

Then expected utility is

$$E\left[U\left(X\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log\left(2^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log 2}{2^n} = \left(\log 2\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ converges: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

$$E\left[U\left(X\right)\right] = 2\log 2 < \infty.$$

Interpretation: once we account for diminishing marginal utility (logarithmic in money), the paradox disappears; the expected utility is finite, aligning theory with intuition.

7. Conclusion. Probability theory should not be understood as a direct description of how the world operates. Rather, it is a mathematical language for organizing uncertainty and guiding rational decisions when knowledge is incomplete.

Students often struggle with probability because they attempt to interpret formulas without understanding their modeling assumptions. True mastery re-quires recognizing probability as a framework for reasoning rather than a col-lection of computational rules.

Careful interpretation, awareness of hidden assumptions, and reflection on real-world meaning are therefore essential components of learning probability theory. Only then do probabilistic formulas become intellectually transparent rather than mechanically applied tools.

Abstract. *Many students successfully apply formulas from probability theory while lacking a clear understanding of what probability actually represents. This paper discusses probability theory from a pedagogical and philosophical perspective. Rather than treating probability as a description of randomness in nature, we present it as a mathematical framework for reasoning under uncertainty. By examining classical interpretations of probability, common misconceptions, paradoxes, and the notion of expectation, we aim to clarify how probability theory models human under-standing rather than objective randomness itself.*

References

1. W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Princeton University. – 683 p.
2. S. Ross, A First Course in Probability. Pearson Prentice Hall, 2010. – 530 p.
3. D. Kahneman, Thinking, Fast and Slow. Farrar, Straus and Giroux. – 512 p.

Гнатко Д. С. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Крамчанін Є. А. (здобувач бакалаврату, 2 курс),
Науковий керівник - проф. Ярхо Т.О.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ТЕОРІЯ ТА АЛГОРИТМ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛІ СМО ТРАНСПОРТНОЇ ГАЛУЗІ ЗА РОЗМІЧЕНИМ ГРАФОМ ЇЇ СТАНІВ

В майбутній професійній діяльності здобувачів затребуваними є здатності забезпечення оптимальної діяльності підприємств обслуговування і управління транспортної галузі на основі застосувань теорії систем масового обслуговування (СМО). СМО включено до змісту Програми єдиного державного кваліфікаційного іспиту (ЄДКІ) зі спеціальності «Транспортні технології» на першому рівні вищої освіти.

У навчальних випробуваннях та практичних задачах часто виникає необхідність визначення моделі СМО (її типу та кількості каналів обслуговування) за наявним розміченим графом станів системи. Це необхідно для подальшого правильного здійснення розрахунку показників ефективності системи.

Розмічений граф станів СМО являє собою геометричну схему математичної моделі системи, де вершини відображають її можливі стани, а напрямлені дуги (стрілки) — переходи між ними з підписаними інтенсивностями відповідних потоків подій.

Розрізняємо наступні типи СМО: з відмовами, з необмеженою чергою, з обмеженою чергою. За кількістю каналів, виділяємо одно- канальні і багатоканальні СМО.

На рис. 1 - 6 представлено розмічені графи станів одноканальних і багатоканальних СМО зазначених вище типів:

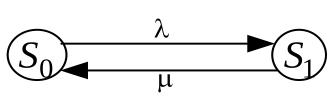


Рис. 1. Одноканальна СМО з відмовами

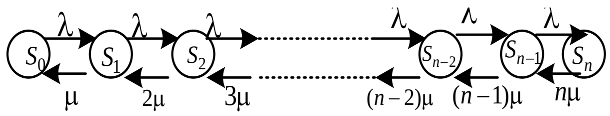


Рис. 2. Багатоканальна СМО з відмовами

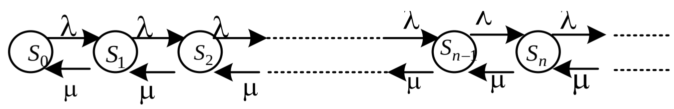


Рис. 3. Одноканальна СМО з необмеженою чергою

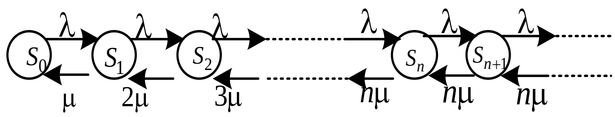


Рис. 4. Багатоканальна СМО з необмеженою чергою

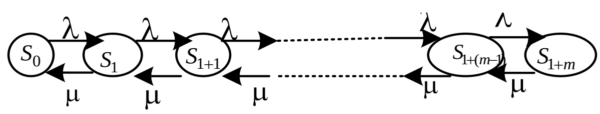


Рис. 5. Одноканальна СМО з обмеженою чергою

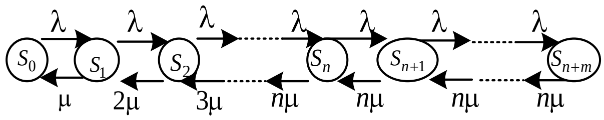


Рис. 6. Багатоканальна СМО з обмеженою чергою

Алгоритм ідентифікації моделі СМО складається з трьох послідовних кроків, кожен з яких дозволяє уточнити її характеристики.

Крок 1. Аналіз кількості станів у розміченому графі.

1.1. Якщо розмічений граф системи містить два стани, то він відповідає одноканальній СМО з відмовами.

1.2. Якщо розмічений граф системи містить нескінченну кількість станів S_0, S_1 , S_2 , …, то він відповідає СМО з необмеженою чергою.

1.3. В інших випадках розмічений граф відповідає багатоканальній СМО з відмовами або СМО з обмеженою чергою.

Таким чином, за результатами кроку 1 вдається ідентифікувати одноканальну СМО з відмовами; визначити СМО з необмеженою чергою (

група 1); виокремити сукупність систем, що містить багатоканальну СМО з відмовами, а також СМО з обмеженою чергою (група 2).

Крок 2. Аналіз перших двох значень інтенсивностей потоку обслуговування.

2.1. Якщо перші два значення інтенсивності потоку обслуговування, представлені в розміченому графі станів СМО групи1, є однаковими і дорівнюють μ, то СМО з необмеженою чергою є одноканальною. В іншому випадку вона є багатоканальною.

2.2. Якщо перші два значення інтенсивності потоку обслуговування, представлені в розміченому графі станів СМО групи 2, є однаковими і дорівнюють μ, то розмічений граф станів відповідає одноканальній СМО з обмеженою чергою.

2.3. В іншому випадку маємо багатоканальну СМО з відмовами або з обмеженою чергою.

Таким чином, за результатом кроку 2 вдається ідентифікувати одноканальну і багатоканальну СМО з необмеженою чергою, а також одноканальну СМО з обмеженою чергою.

Крок 3. Аналіз усієї представленої послідовності значень інтенсивностей потоку обслуговування багатоканальних СМО.

На цьому етапі залишається ідентифікувати багатоканальну СМО з відмовами і багатоканальну СМО з обмеженою чергою.

3.1. Якщо послідовність значень інтенсивностей потоку обслуговування, при її розгляді зліва направо від нульового стану системи, являє собою

$$\mu,\ 2\mu,\ 3\mu,\ \ldots,\ n\mu,$$

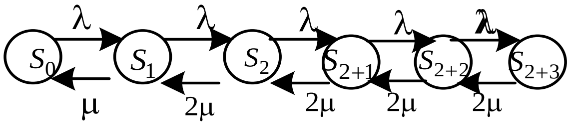
то маємо багатоканальну (n – кількість каналів) систему з відмовами.

3.2. В іншому випадку, якщо зазначена послідовність має вигляд

$$\mu,\ 2\mu,\ 3\mu,\ \ldots,\ n\mu,\ n\mu,\ldots,\ n\mu,$$

то маємо багатоканальну (n – кількість каналів) систему з обмеженою чергою.

Приклад застосування алгоритму. Ідентифікувати модель СМО за розміченим графом її станів



Розв'язання.

Крок 1. Кількість станів СМО дорівнює шести. Отже, виконуються умови п. 1.3, і розмічений граф належить до **СМО групи 2** (багатоканальні СМО з відмовами або СМО з обмеженою чергою).

Крок 2. У СМО групи 2 перші два значення інтенсивностей потоку обслуговування **не збігаються**. Таким чином, виконуються умови п. 2.3, і розмічений граф може відповідати **багатоканальній СМО з відмовами** або **багатоканальній СМО з обмеженою чергою**.

Крок 3. Аналізуємо всю послідовність інтенсивностей потоку обслуговування. Маємо:

$$\mu,\ 2\mu,\ 2\mu,\ 2\mu,\ 2\mu.$$

Ця послідовність відповідає умовам п. 3.2, оскільки після досягнення значення 2μ інтенсивність залишається сталою.

Висновок. Розмічений граф станів відповідає багатоканальній СМО з обмеженою чергою**, де кількість каналів обслуговування дорівнює двом, а довжина черги — трьом місцям (кількості повторів значення 2μ після досягнення максимуму в послідовності).**

Анотація. *У статті представлено теоретичні основи та покроковий алгоритм визначення, за розміченим графом станів, моделей систем масового обслуговування (СМО), які є надзвичайно важливими в майбутній професійній діяльності здобувачів транспортних спеціальностей.*

Ключові слова: *система масового обслуговування, розмічений граф станів, інтенсивність потоку обслуговування, модель СМО, тип СМО.*

Література

1. Ярхо Т.О. Системи масового обслуговування транспортної галузі: підручник /Т.О.Ярхо, Ю.О. Бекетов, Т.В. Ємельянова, К.Г. Ковцур. – Харків: ФОП Бровін О. В., 2025. – 132 с.
2. Дмитрієв І. А. Математичні методи в економічних дослідженнях: навч. посібник / І. А. Дмитрієв, О. І. Дмитрієва, Т. В. Ємельянова, І. Ю. Шевченко, Т. О. Ярхо. – Харків: ФОП Бровін О. В., 2021. – 180 с.

Друцул А. І. (магістрант, 1 курс),
Науковий керівник – доц. Кузьмич В. І.
Херсонський державний університет

ВИВЧЕННЯ ЗАДАЧ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ У КУРСІ «ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ» ПРИ ПІДГОТОВЦІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Підготовка майбутнього вчителя математики в університеті потребує поєднання ґрунтовної математичної освіти з методичною, психолого-педагогічною та практичною підготовкою. Сучасна школа вимагає вчителя, здатного формувати ключові компетентності, критичне мислення та застосовувати інноваційні технології навчання [1]. Актуальність теми дослідження зумовлена сучасними тенденціями реформування освіти, переходом до компетентнісної моделі навчання та зростанням вимог до професійної підготовки вчителя математики. Водночас спостерігається певний розрив між теоретичною математичною підготовкою студентів і практичними потребами сучасної школи.

Умови цифровізації освіти, інтеграції STEM-підходів, впровадження формувального оцінювання та індивідуалізації навчання висувають нові вимоги до змісту й методики підготовки майбутніх учителів математики в університеті [2]. Водночас спостерігається певний розрив між теоретичною математичною підготовкою студентів і практичними потребами сучасної школи. Метою дослідження є теоретичне обґрунтування та визначення ефективних підходів до вивчення задач економічного змісту в університеті з метою формування професійної компетентності майбутніх учителів математики.

Методична підготовка майбутніх учителів математики в університеті спрямована на поєднання глибокої теоретичної математичної бази з умінням трансформувати наукові знання у доступний для учнів зміст шкільного курсу математики. Важливо формувати в студентів здатність аналізувати навчальний матеріал з позицій шкільного курсу математики, добирати доцільні методи, прийоми та засоби навчання, враховуючи вікові особливості учнів і вимоги сучасних освітніх стандартів [3].

Особливу роль у підготовці майбутніх учителів математики відіграє курс методики навчання математики, який формує методичне мислення, уміння використовувати уроки різних типів, розробляти дидактичні матеріали та здійснювати оцінювання навчальних досягнень учнів [3]. Ефективність підготовки підвищується за умови використання активних та інтерактивних форм навчання: проблемного викладу, дослідницьких завдань, проєктної діяльності, моделювання педагогічних ситуацій.

Важливою складовою професійної підготовки є вивчення задач економічного змісту у курсі «Елементарна математика». Такі задачі забезпечують поєднання математичних знань із практичними аспектами економічної діяльності та сприяють формуванню прикладного мислення і навичок математичного моделювання [4].

Задачі економічного змісту пов’язані з реальними економічними процесами, такими як доходи, витрати, прибуток, податки, банківські вклади, кредити, сімейний бюджет, продуктивність праці. Їх використання сприяє формуванню в учнів економічної компетентності та фінансової грамотності [4]. У процесі розв’язування таких задач учні вчаться аналізувати економічну інформацію, будувати математичні моделі реальних ситуацій, виконувати необхідні обчислення та інтерпретувати отримані результати.

У шкільному курсі математики задачі економічного змісту використовуються під час вивчення різних тем, зокрема:

5-6 класи – відсотки, пропорції, текстові задачі практичного змісту, сімейний бюджет;

7-8 класи – лінійні рівняння, системи лінійних рівнянь, пропорції та відсоткові розрахунки, задачі на продуктивність праці;

9 клас – складні відсотки, функції та їх застосування, задачі на прибуток, банківські вклади, кредити [5].

У шкільних підручниках містяться задачі на відсоткові розрахунки, банківські операції, знижки, прибуток і продуктивність праці, що мають економічний зміст. Наведемо приклад задачі економічного змісту, яка ілюструє доцільність поєднання економічних знань та математичних методів при її розв‘язанні.

Приклад. *Початкова ціна товару становила 100 грн. Після двох знижок вона становила 72 грн. Причому, друга знижка була вдвічі більшою за першу. Знайдіть величину кожної знижки у відсотках.*

Ідея розв'язання задачі полягає у складанні відповідного рівняння та знаходженні його коренів**.** Нехай перша знижка становить x%, тоді друга буде становити $2x$%. За умовою задачі отримуємо рівняння:

$$100\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{100}\right)=72.$$

Розв'язавши відповідне квадратне рівняння, знаходимо два значення: 140 і 10. З економічного змісту задачі слідує, що перше значення не може бути розв‘язком задачі, оскільки після знижки ціна товару має бути меншою за початкову, тому залишається друге значення, яке і дає шукану відповідь: перша знижка становить 10%, а друга – 20%.

Використання задач економічного змісту сприяє підвищенню практичної спрямованості навчання та формуванню професійної готовності майбутніх учителів до роботи в умовах сучасної школи.

Результати дослідження свідчать про те, що ефективність методики викладання елементарної математики, при вивченні задач практичного змісту, передбачає поєднання теоретичної підготовки з практичною діяльністю, використання інноваційних технологій та формування елементів економічного мислення здобувачів. Реалізація компетентнісного підходу сприяє розвитку професійної готовності майбутніх педагогів до роботи в умовах сучасної школи.

Анотація. *У роботі розглянуто особливості вивчення задач економічного змісту у курсі «Елементарної математики», здобувачами*

першого (бакалаврського) рівня освіти, за освітньою програмою «Середня освіта (математика)».

Умови задач економічного змісту пов’язані з основними економічними поняттями (відсотки, прибуток, витрати, кредити, податки тощо). Вони спрямовані на застосування математичних знань у реальних життєвих ситуаціях, формування економічної компетентності та розвиток практичного мислення. Крім того, такі задачі сприяють розвитку навичок аналізу, моделювання та прийняття обґрунтованих рішень, а також підвищують мотивацію до вивчення математики через її зв’язок із повсякденним життям.

Ключові слова: *заклад вищої освіти, методика викладання математики, елементарна математика, професійна підготовка вчителя, компетентнісний підхід, задачі економічного змісту.*

Література

1. Закон України «Про освіту». Київ, 2017.
2. Міністерство освіти і науки України. Концепція Нової української школи. Київ, 2016.
3. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. Київ: Вища школа, 2006. – 582 с.
4. Крамаренко Т. Г. Прикладна спрямованість навчання математики в школі. Київ: Освіта, 2010.
5. Мерзляк А., Полонський В., Якір М. **Алгебра. 9 клас**. Харків: Гімназія, 2021.

Максимченко О. В. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – доц. Михайленко І. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ГЕОМЕТРІЯ ТА МЕХАНІКА ТРАС: ЯК ПРИКЛАДНІ МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ ГОТУЮТЬ ЗДОБУВАЧА ДО РОБОТИ З ДОРОЖНІМИ КОНСТРУКЦІЯМИ

Сучасне дорожнє будівництво - це не лише асфальтобетонне покриття, а складна інженерна система, надійна робота якої залежить від точності математичних розрахунків. Для майбутнього фахівця опанування геометрії та механіки трас є фундаментом професійної компетенції. Розв’язання прикладних задач під час навчання дозволяє зрозуміти, як абстрактні формули перетворюються на безпечні та довговічні дороги.

Коли ми на парах бачимо нескінченні розрахунки перехідних кривих або модулів пружності, часто виникає питання: «Навіщо це мені, якщо є софт, який порахує все сам?». Але насправді ці прикладні задачі — це наша «тренажерка» для мізків. Сьогодні я хочу розказати, як саме геометрія та механіка готують нас до того, що нас чекає на справжньому будівництві.

Коли ми їдемо сучасною швидкісною трасою, ми рідко замислюємося над тим, що кожен поворот, кожен підйом і навіть жорсткість асфальту - це результат вирішення сотень складних математичних рівнянь.

Для студента-дорожника фраза «прикладна математика» - це не просто розділ у підручнику, а реальний інструмент, який гарантує, що дорога не «попливе» після першого дощу, а автомобілі не вилітатимуть у кювет на віражах.

Якщо ти помилився в розрахунку віражу на папері - ти отримав «мінус бал». Якщо ти помилився в реальному проекті - фуру винесе з траси на першому ж повороті. Саме задачі на геометрію трас привчають нас думати про безпеку водія на рівні інстинктів.

Геометрія повороту – це більше, ніж просто циркуль. Уявіть собі проектування повороту. Якби ми просто з'єднували дві прямі ділянки дугою кола, водій відчував би різкий удар відцентрової сили в момент входу в поворот. Щоб цього уникнути, математика пропонує перехідні криві.

Розрахунок такої кривої вимагає від студента розуміння того, як змінюється кривизна дороги та як поступово наростає відцентрове прискорення. Це готує майбутнього інженера до роботи з геодезичними приладами та системами автоматизованого проектування, де помилка в кілька сантиметрів на папері може перетворитися на небезпечну ділянку в реальності.

Дорожня конструкція постійно перебуває під впливом динамічних навантажень від транспорту. Прикладні задачі з механіки допомагають студентам зрозуміти напружено-деформований стан багатошарових систем. Математичні моделі допомагають розрахувати, як тиск від колеса величезної фури розподіляється через асфальтобетон, щебінь і пісок аж до самого ґрунту. Таким чином здобувач вчиться підбирати товщину матеріалів (щебінь, пісок, асфальт) так, щоб конструкція не руйнувалася під вагою вантажівок, що готує його до реального проектування згідно з державними будівельними нормами.

Вирішуючи задачі з механіки, студент вчиться прогнозувати:

- напружено-деформований стан (як полотно реагуватиме на літню спеку (розширення) та зимові морози);

- втомну міцність (скільки мільйонів циклів навантаження витримає конструкція до появи першої тріщини).

Вода - головний ворог дороги. Щоб вона не затримувалася на поверхні, проектуються поперечні та поздовжні ухили. Розрахунок цих «невидимих» кутів - це чиста тригонометрія. Геометрія поверхонь є критичною для розрахунку водовідведення. Задачі на визначення похилів (поздовжніх та поперечних) вчать запобігати аквапланууванню. Студент має ідеально володіти розрахунками стоку, щоб правильно розмістити лотки, кювети та водопропускні труби. Без математичного обґрунтування цих елементів будь-яка дорога приречена на руйнування.

Сьогодні математичні задачі з паперу перейшли в комп'ютерне моделювання (BIM-технології). Проте, щоб програма видала правильний результат, фахівець повинен розуміти алгоритми, які лежать у її основі.

Математична підготовка формує головну навичку - алгоритмічне мислення. Це здатність розбити будівництво складної розв'язки на послідовність чітких, логічних і вимірюваних етапів.

Висновки. Отже, геометрія та механіка трас — це не спроба нас завантажити зайвою математикою. Це спосіб навчити нас бачити дорогу «наскрізь»: від того, як розподіляється тиск у ґрунті, до того, як машина входить у поворот. Це те, що відрізняє звичайного виконроба від крутого інженера, який будує дороги на десятиліття.

Прикладні математичні задачі - це свого роду «тренажер» для мозку майбутнього дорожника. Вони вчать бачити за цифрами реальні бетонні конструкції та сталеві естакади. Саме цей фундамент дозволяє студенту згодом впевнено брати на себе відповідальність за безпеку та довговічність наших шляхів. Адже хороша дорога починається не з асфальтоукладальника, а з правильно розв’язаного рівняння.

Анотація. *У роботі розглянуто роль прикладних математичних задач у процесі підготовки майбутніх інженерів дорожньої галузі. Акцентовано увагу на взаємозв’язку між теоретичними знаннями з геометрії та механіки трас і їх практичним застосуванням під час проектування та експлуатації дорожніх конструкцій. Описано, як розв’язання задач на розрахунок перехідних кривих, напружено-деформованого стану покриття та водовідведення формує професійні компетенції здобувачів освіти. Результати підкреслюють, що розв'язання прикладних задач готує здобувача до прийняття відповідальних рішень у складних умовах реального будівництва.*

Ключові слова: *геометрія трас, механіка дорожнього одягу, прикладні математичні задачі, дорожні конструкції, професійна підготовка.*

Література

1. Білятинський, О. А., Котляренко, В. В. (2014). *Проектування автомобільних доріг: Геометричне проектування траси*. НТУ.
2. Гамеляк, І. П., Дмитрієв, М. М. (2018). *Механіка дорожніх конструкцій: Напружено-деформований стан багатошарових систем*. Автошляховик України.
3. Мозговий, В. В., Онищенко, А. М. (2020). *Прикладні задачі математичного моделювання у дорожньому будівництві*. Основа.
4. Славінська, О. С. (2017). *Геометрія та водовідведення з поверхні автомобільних доріг: Навчальний посібник*. Знання.

Мануйлов М. С. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – доц. Михайленко І. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

МАТЕМАТИКА В ОСНОВІ ІНЖЕНЕРНИХ РІШЕНЬ: ЯК ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ФОРМУЮТЬ КРИТИЧНЕ МИСЛЕННЯ МАЙБУТНЬОГО ФАХІВЦЯ

Сучасна автомобільно-дорожня галузь характеризується активним технологічним розвитком, упровадженням цифрових інструментів, нових конструктивних рішень та постійним удосконаленням методів проєктування й будівництва. За таких умов значно підвищуються вимоги до професійної підготовки майбутніх інженерів. Сучасний фахівець повинен не лише володіти необхідними теоретичними знаннями, а й бути здатним аналізувати складні технічні ситуації, критично оцінювати наявну інформацію та знаходити раціональні способи розв'язання професійних завдань. Однією з ключових складових підготовки таких спеціалістів є математична освіта. Її значення полягає не тільки в опануванні формул, алгоритмів і способів обчислення. Значно важливішим є те, що математика розвиває логічність мислення, уважність до деталей, послідовність міркувань і вміння аргументовано обґрунтовувати власні висновки. Для майбутніх фахівців автомобільно-дорожнього напряму математична підготовка має особливу цінність, адже значна частина їхньої професійної діяльності базується на аналізі числових даних, виконанні технічних розрахунків та оцінюванні параметрів інженерних конструкцій. Важливим інструментом формування професійного мислення є прикладні математичні задачі. Саме вони забезпечують зв'язок між теоретичним матеріалом і реальною практикою, дозволяючи студентам застосовувати набуті знання в умовах, максимально наближених до майбутньої професійної діяльності.

На відміну від стандартних навчальних вправ, прикладні задачі передбачають комплексний підхід до аналізу проблеми. Студент має не просто виконати обчислення, а визначити суттєві параметри задачі, оцінити умови, перевірити достовірність вихідних даних і проаналізувати можливі наслідки отриманого результату. Саме в цьому процесі формується критичне мислення. Майбутній спеціаліст навчається ставити уточнювальні запитання, сумніватися в очевидних рішеннях, шукати альтернативні підходи та перевіряти правильність власних висновків. Показовим прикладом є задачі, пов'язані з проєктуванням дорожнього покриття. Для визначення його оптимальних параметрів необхідно враховувати не лише технічні характеристики матеріалів, а й інтенсивність транспортного руху, сезонні температурні коливання, особливості місцевого клімату, стан основи та прогнозований термін експлуатації.

Розв’язуючи таке завдання, студент змушений працювати з великою кількістю взаємопов’язаних факторів. Це сприяє формуванню навичок аналізу складних систем та розвитку здатності приймати виважені рішення. Не менш значущими є задачі, що стосуються організації транспортних потоків. У сучасних містах питання оптимізації дорожнього руху набуває особливої актуальності через постійне збільшення кількості транспортних засобів. Для розв’язання подібних проблем використовуються математичні методи статистичного аналізу, теорія ймовірностей та моделювання. Робота з такими задачами вчить студентів аналізувати статистичну інформацію, знаходити закономірності, будувати прогнози та критично оцінювати достовірність отриманих результатів. Ще одним важливим напрямом є математичне моделювання інженерних процесів. Воно дозволяє досліджувати поведінку технічних систем без необхідності практичного втручання. Наприклад, моделювання транспортної розв’язки дає можливість проаналізувати ефективність різних варіантів організації руху, оцінити ризик виникнення заторів та обрати найбільш доцільну схему. Такі завдання формують системне бачення проблеми, адже студент починає розглядати інженерний об’єкт не як сукупність окремих елементів, а як складну багаторівневу систему, у якій усі компоненти взаємодіють між собою.

Окремої уваги заслуговує аналіз помилок. У процесі розв’язання прикладних задач студент нерідко стикається з неправильними або суперечливими результатами. Саме вміння знайти причину помилки, проаналізувати логіку власних дій та скоригувати хід розрахунків є важливою складовою критичного мислення. У майбутній професійній діяльності це набуває особливого значення, оскільки навіть незначна неточність у розрахунках може призвести до серйозних технічних або економічних наслідків. Значні можливості для розвитку аналітичних здібностей відкривають сучасні цифрові технології. Використання спеціалізованих програмних комплексів дозволяє виконувати складні розрахунки, будувати математичні моделі та аналізувати різні сценарії розвитку подій. Проте ефективне використання таких інструментів можливе лише за умови достатнього рівня математичної підготовки. Без розуміння математичної основи програмного забезпечення студент не зможе критично оцінити правильність результатів, а лише механічно сприйматиме отримані дані. Саме тому поєднання класичних математичних методів із сучасними цифровими технологіями є найбільш ефективним підходом до професійної підготовки майбутніх дорожників.

Важливою умовою успішного формування критичного мислення є практична спрямованість навчальних завдань. Чим ближчими вони є до реальних виробничих ситуацій, тим більшою є їхня навчальна цінність. Студент, який бачить безпосередній зв'язок між математичними знаннями та майбутньою професійною діяльністю, більш усвідомлено ставиться до навчання та виявляє більшу зацікавленість у розв'язанні складних задач.

Висновки. Отже, прикладні математичні задачі є ефективним засобом формування критичного мислення майбутніх фахівців автомобільно-дорожньої галузі.

Вони сприяють розвитку аналітичних здібностей, формують навички самостійного прийняття рішень, вчать системно оцінювати професійні ситуації та знаходити оптимальні шляхи їх вирішення.

Таким чином, математика є не лише фундаментальною навчальною дисципліною, а й важливим інструментом професійного становлення сучасного інженера.

Анотація. *У статті розглянуто значення прикладних математичних задач у розвитку критичного мислення майбутніх фахівців автомобільно-дорожньої галузі. Обґрунтовано роль практично орієнтованого навчання у формуванні професійних компетентностей студентів та їхньої здатності приймати ефективні інженерні рішення.*

Ключові слова: *критичне мислення, прикладні задачі, дорожні галузь, майбутні фахівці.*

Література

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. Київ : Освіта, 2023. 432 с.
2. Бевз Г. П. Практичне застосування математичних методів у підготовці майбутніх інженерів. *Педагогіка і сучасність*. 2022. № 4. С. 61–68.

3. Костенко О. М. Застосування інтегрального числення в економіці. *Вісник економіки транспорту і промисловості*. 2021. № 74. С. 45–52.
4. Вдовиченко В. О., Кузьмін А. А. Моделювання попиту на вантажні перевезення в регіоні. *Автомобільний транспорт*. 2023. Вип. 52. С. 112–119.
5. Петренко С. І. Математичне моделювання транспортних систем. Харків : ХНАДУ, 2024. 286 с.

Мусієнко І. І. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – доц. Михайленко І. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

МАТРИЧНІ МЕТОДИ В ОПТИМІЗАЦІЇ ВАНТАЖОПОТОКІВ

Для підприємств дорожньо-будівельної галузі раціональна організація вантажопотоків є критично важливим завданням. Доставка інертних матеріалів (щебеню, піску, асфальтобетону) потребує значних фінансових ресурсів через високу масу вантажу, тому витрати на транспорт складають вагому частину загального бюджету будівництва. Як доводять сучасні логістичні дослідження, для економії коштів необхідно уникати зустрічних перевезень (коли транспортні засоби рухаються назустріч один одному з ідентичним вантажем). Крім того, впровадження системи тягових плечей дозволяє усунути порожні пробіги рухомого складу. На практиці комплексне застосування таких оптимізаційних рішень дозволяє автотранспортним підприємствам знизити витрати на вантажні перевезення приблизно на 15 % [2].

Для алгоритмічного пошуку найдешевшого маршруту використовується «транспортна задача» лінійного програмування. Її головна мета – скласти такий план перевезень, щоб загальна вартість доставки була мінімальною [1, с. 43].

У математичній моделі цієї задачі існують постачальники із заданими запасами a_i та споживачі з відповідними потребами b_j. Також задається тариф c_{ij} – вартість перевезення 1 тони вантажу між конкретними пунктами. Цільова функція пошуку мінімальних витрат записується так:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Для того щоб задача мала коректний розв’язок без залишків продукції, сума всіх наявних запасів має дорівнювати сумі всіх потреб (умова закритої або збалансованої моделі):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

У разі порушення цього балансу (відкрита модель) вводяться фіктивні постачальники або споживачі з нульовими тарифами, що дозволяє штучно збалансувати систему для подальшого розрахунку.

Умови транспортної задачі найзручніше подавати у табличній формі, тобто у вигляді матриці [1, с. 44]. Розглянемо практичний приклад: розрахунок постачання щебеню для капітального ремонту ділянок траси М-03 у Харківській області.

Вихідні дані: наявні 3 постачальники щебеню (А1 – кар’єр с. Мерефа, запас 300 т; А2 – АБЗ м. Харків, запас 400 т; А3 – кар’єр м. Чугуїв, запас 300 т). Загальна пропозиція становить 1000 тонн. Споживачами виступають 4 ремонтні ділянки дороги М-03 (B1 – потреба 200 т; B2 – потреба 300 т; B3 – потреба 250 т; B4 – потреба 250 т). Загальний попит також становить 1000 тонн, отже, умова балансу виконується. Оскільки попит і пропозиція рівні, модель є закритою.

Процес оптимізації зазвичай проходить у два етапи:

1. **Побудова опорного плану.** Використовується метод мінімального елемента, де вантаж розподіляється починаючи з клітинок з найнижчим тарифом. Це дозволяє вже на старті отримати економічно вигідну схему.

2. **Перевірка на оптимальність.** Застосовується метод потенціалів. Якщо для кожної вільної клітинки виконується умова

$$u_i + v_j \le c_{ij},$$

то план є ідеальним. В іншому випадку проводиться перерозподіл вантажу за циклом перерахунку.

Побудуємо матрицю транспортних витрат. У клітинках через дріб вказано тариф перевезення однієї тони та розрахований обсяг вантажу, який планується перевезти. Для знаходження початкового опорного плану використано алгоритм методу мінімального елемента (вантаж розподіляється починаючи з найменшого тарифу).

Таблиця 1. Матриця транспортної задачі та початковий план

Постачальники / Споживачі	**B1 (200 т)**	**B2 (300 т)**	**B3 (250 т)**	**B4 (250 т)**	**Запаси, т**
A1 (Мерефа)	50 / 200	120 / –	80 / 100	150 / –	300
A2 (Харків)	90 / –	60 / 300	110 / 100	70 / –	400
A3 (Чугуїв)	140 / –	100 / –	90 / 50	60 / 250	300
Потреби, т	200	300	250	250	1000

За правилом мінімального елемента в першу чергу були закриті потреби на маршрутах з тарифами 50 та 60 грн/т. Розрахуємо значення цільової функції, тобто добові транспортні витрати підрядника за цим планом:

$$Z = (200 \times 50) + (100 \times 80) + (300 \times 60) + (100 \times 110) + (50 \times 90) +$$
$$+ (250 \times 60) = 66\,500 \text{ грн.}$$

Подальша оптимізація цієї матриці методом потенціалів дозволяє перевірити, чи є цей план фінальним, чи існують приховані можливості для ще більшого зниження витрат. Такий системний підхід усуває хаотичність перевезень та забезпечує ритмічність поставок на об'єкти дорожнього будівництва.

Висновки. Розрахунок маршрутів за допомогою матричного моделювання гарантовано унеможливлює зустрічні перевезення та мінімізує нераціональний пробіг техніки. Це дозволяє підприємствам отримувати реальну фінансову економію. Дослідження оптимізації маршрутів на прикладі міжнародних перевезень підтверджують, що завдяки математичному підходу загальну вартість доставки можна зменшити на 38,6 % [3].

Анотація. *У статті розглядається застосування матричних методів математичного моделювання для розв'язання задачі оптимізації транспортних вантажопотоків. Обґрунтовано актуальність математичного апарату для мінімізації логістичних витрат. Наведено практичний приклад побудови матриці транспортних витрат для інфраструктурного об'єкта.*

Ключові слова: *вантажопотік, матриця, транспортна задача, логістика, мінімізація витрат.*

Література

1. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації : навч. посіб. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 608 с.
2. Ремех І. О. Підвищення ефективності перевезень вантажів автомобільним транспортом у міжнародному сполученні : дис. ... д-ра філософії : 275 / Нац. трансп. ун-т. Київ, 2023. 196 с.
3. Курпіль Д. А. Підвищення ефективності перевезень вантажів в міжнародних транспортних коридорах. *Збірник тез доповідей здобувачів вищої освіти*. Харків : ХНАДУ, 2022.

Ptashniy Maxim (master's student, 1year),
Jagiellonian University, Krakow, Poland
Tayisia Vydrina (undergraduate student, 1year)),
Research Advisor - Associate Professor O. Ptashnyi
Kharkiv National Automobile and University «KNAHU»

ELEMENTS OF TOPOLOGY AS A MEANS TO STRENGTHEN THE MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF ENGINEERING EDUCATION

1. Introduction: Three Perspectives on Topology. When students first hear the word *topology*, they often associate it with mysterious objects such as coffee cups turning into donuts or highly abstract constructions far removed from familiar mathematics. One difficulty in teaching topology lies in the fact that the subject admits several equally valid interpretations.

The first perspective views topology as a generalization of geometry. Classical geometry studies shapes together with measurements such as length, angles, and curvature. Topology, in contrast, focuses on properties preserved under continuous deformation. From this viewpoint, topology investigates those aspects of space that remain unchanged when stretching or bending is allowed but tearing or gluing is forbidden. One can say, that while geometry studies which way between two points is the shortest one, topology studies ,if this path exists at all.

A second perspective describes topology as the study of *topological invariants*. These are properties of spaces that remain unchanged under continuous transformations. Concepts such as connectedness, compactness, or the number of holes provide ways of distinguishing spaces without relying on numerical measurements. This approach emphasizes classification and structural under-standing.

In this exposition, however, we adopt a third perspective: topology as an extension of ideas from mathematical analysis. Historically and pedagogically,
many students find topology more accessible when it is introduced as a natural attempt to understand continuity, limits, and convergence in settings where the usual notion of distance may no longer exist. This viewpoint provides a smooth transition from familiar analytical concepts toward abstract structures.

2. From Metric Spaces to Open Sets. A natural starting point is the notion of a metric space. Students already possess an intuitive understanding of distance from Euclidean geometry. A metric formalizes this intuition by assigning a distance between any two points while satisfying several simple axioms.

Metric spaces allow mathematicians to define convergence of sequences, continuity of functions, and neighborhoods of points. Importantly, many different mathematical objects can be equipped with meaningful metrics: sequences, functions, probability distributions, or even spaces of solutions to differential equations.

2.1. Metric Spaces: Formalizing Distance. A metric space is a pair (X, d) consisting of a set X and a function

$$d : X \times X \rightarrow \mathrm{R}$$

satisfying for all $x, y, z \in X$: $d(x, y) \geq 0$,

$d(x, y) = 0 \Leftarrow\Rightarrow x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$,

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

This formal definition captures the intuitive idea of measuring distance. Several examples help illustrate the flexibility of the concept.

Euclidean metric:

$$d\left(x, y\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - y_i\right)^2}.$$

Manhattan metric:

$$d\left(x, y\right) = \sum_{i=1}^{n}\left|x_i - y_i\right|\left(\quad\right)^2.$$

Discrete metric: $d\left(x, y\right) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$

These examples demonstrate that different notions of distance may exist even on the same underlying set.

When studying convergence in metric spaces, one repeatedly encounters sets containing all points sufficiently close to a chosen point. These sets, called open balls, play a central role in analysis. Gradually, it becomes clear that many analytical notions depend not on the exact values of distances but rather on which points are considered “nearby.”

2.2. Open Sets as Union of Balls. Given a metric space (X, d) and a point $x \in X$, an open ball of radius $r > 0$ is defined as

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

A subset $U \subset X$ is called open if for every $x \in U$ there exists $r > 0$ such that

$$B_r(x) \subset U.$$

Open sets therefore arise naturally as unions of open balls. One can verify that the collection of open sets satisfies three fundamental properties:

- the empty set and X are open;
- arbitrary unions of open sets are open;
- finite intersections of open sets are open.

These properties suggest that openness, rather than distance itself, carries the essential information needed for analysis.

This observation motivates a radical idea: instead of starting from a metric and deriving open sets, one may begin directly with a collection of sets satisfying the properties above. This leads to the notion of a topological space.

3. Topological Spaces and the Loss of Distance. A topological space emerges when the concept of openness is taken as fundamental. Formally, a topology on a set is a collection of subsets satisfying several natural closure properties. While this definition may initially appear abstract, it represents a conceptual simplification rather than an additional complication.

3.1. A Non –metrizable Example. Consider the set

$$X = \{a, b, c\}$$

with topology

$$\tau = \{\emptyset, \mathrm{X}, \{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b,c}\}\}.$$

This collection satisfies the axioms of a topology but does not arise from any metric. Simply because if such a metric existed, there would exist open set with b but without c and vice versa Such examples show that topological spaces may behave differently from metric spaces.

In this space, a sequence may possess more than one limit, illustrating that uniqueness of limits is not a purely topological phenomenon but rather a consequence of additional structure present in metric spaces. We consider that se-quince has a limit if at one moment every element of sequence gets in the neighborhood of the element. Sequence b,c,b,c,b,c has two limits b and c.

Historically, one of the central questions of topology has been the characterization of metrizable spaces, that is, determining when a topology can be generated by a metric.

In moving from metric spaces to topological spaces, mathematics deliberately forgets precise measurements. What remains is the structure necessary to discuss continuity. A function between topological spaces is continuous precisely when inverse images of open sets remain open, a definition that no longer requires distances or limits expressed numerically.

For beginners, this shift often feels unsettling. Without coordinates or measurements, spaces may behave in unexpected ways. Yet this apparent strangeness is pedagogically valuable: it reveals which aspects of analysis depend on geometry and which rely only on qualitative structure. Students begin to recognize that continuity is fundamentally about preservation of neighborhood structure rather than numerical approximation.

4. Variety and Classification of Spaces. One of the central goals of topology is the classification of spaces according to their intrinsic properties. Different topological spaces exhibit diverse behaviors, motivating the introduction of concepts such as connectedness, compactness, and separability.

Topology therefore becomes a language for comparing mathematical worlds. Two spaces may look different geometrically yet share identical topological properties, while seemingly similar spaces can differ in essential ways. Learning topology means learning to recognize which properties matter.

Examples of topological thinking appear throughout mathematics. Functional analysis studies infinite-dimensional spaces using topological ideas. Modern physics employs topology in the study of phase transitions and field theories. Even contemporary data analysis uses topological methods to identify patterns in complex datasets. These applications demonstrate that topology is not merely an abstract curiosity but a unifying framework across disciplines.

4.1. Fundamental Topological Properties. Several properties play a central role in the classification of spaces.

Connectedness. A space is connected if it cannot be represented as a union of two disjoint nonempty open sets.

Compactness. A space is compact if every open cover admits a finite subcover.

Hausdorff Property. A space is Hausdorff if any two distinct points can be separated by disjoint open neighborhoods.

These notions allow mathematicians to distinguish spaces according to qualitative behavior rather than numerical measurements.

4.2. An Application from Functional Analysis. Topology plays a decisive role in functional analysis. For instance, in finite-dimensional vector spaces all norms are equivalent. A key ingredient in the proof is the compactness of closed and bounded subsets. Since the unit sphere in a finite-dimensional normed space is compact, every continuous norm attains its maximum and minimum on it. This guarantees that different norms generate the same topology, illustrating how topological compactness leads to strong analytical conclusions.

4.3. Equivalent Norms. Let V be a vector space and let $\| \cdot \|_1$ and $\| \cdot \|_2$ be two norms on V. They are called *equivalent* if there exist constants $c, C > 0$ such that

$$c \| x \|_1 \leq \|x \|_2 \leq C \| x \|_1 \text{ for all } x \in V.$$

Equivalent norms generate the same topology on V, meaning that they define the same notion of convergence and continuity.

4.4. Why All Norms Are Equivalent in Finite Dimensions. Let V be a finite-dimensional vector space. Consider the unit sphere with respect to the first norm:

$$S = \{x \in V : \|x\|_1 = 1\}.$$

In finite dimensions, closed and bounded sets are compact. The function

$$f(x) = \|x\|_2$$

is continuous, therefore it attains its minimum and maximum on S:

$$\mathrm{m} = \min_{x \in S} \|x\|_2, \qquad M = \max_{x \in S} \|x\|_2$$

Since S does not contain the zero vector, we have $m > 0$. For arbitrary $x \neq 0$ which implies

$$m \| x \|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \| x \|_1.$$

Thus all norms on a finite-dimensional space are equivalent.

5. Conclusion: Why Topology Matters. Although topology initially appears highly abstract, its pedagogical power lies precisely in this abstraction. By removing dependence on measurement, topology expands mathematical intuition beyond geometric visualization and computational techniques. Introducing topology through analytical motivation allows non-specialists to perceive it not as a collection of unfamiliar definitions but as a natural continuation of ideas they already understand. The transition from distance to openness illustrates a broader lesson of modern mathematics: progress often arises from identifying which structures are essential and which can be discarded.

Ultimately, topology equips students with a deeper conceptual flexibility. It encourages thinking about mathematics in terms of structure, relationships, and invariance. For this reason, topology plays a fundamental role in contemporary mathematics and serves as an indispensable step toward a more mature mathematical worldview.

Abstract. *Topology is often perceived as one of the most abstract areas of modern mathematics. For students encountering the subject for the first time, its definitions may appear detached from geometric intuition or computational practice. This paper proposes a pedagogical approach to introducing topology to non-specialists by presenting three complementary perspectives on the subject and emphasizing topology as a natural extension of ideas originating in mathematical analysis. The goal is not formal completeness but conceptual accessibility and intellectual orientation.*

References

1.J. Munkres, Topology, Prentice Hall. 2000. – 537 p.
2.S. Willard, General Topology, Dover Publications. 2012. – 384 p.
3.J. R. Munkres, Analysis on Manifolds, Westview Press. 1997. – 380 p.

ПРОБЛЕМИ ДИСТАНЦІЙНОГО ОПАНУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН.

Александров Д. М. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – доц. Михайленко І. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ВИКЛИКИ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНІЧНИХ ЗВО ТА ШЛЯХИ ПІДВИЩЕННЯ ЙОГО ЕФЕКТИВНОСТІ: ПОГЛЯД ЗДОБУВАЧА

Перехід освітнього процесу в дистанційний формат став серйозним викликом для здобувачів вищої освіти, особливо під час вивчення фундаментальних дисциплін. Класична математика (математичний аналіз, лінійна алгебра, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей) формує основу інженерного мислення та є необхідною передумовою для подальшого опанування фахових дисциплін.

Для здобувачів дорожньо-будівельного факультету математика має безпосередній прикладний характер. Розрахунок прогинів мостових конструкцій, аналіз напружено-деформованого стану дорожніх покриттів, моделювання навантажень на аеродромні плити, оцінювання стійкості насипів та укосів ґрунту — усі ці завдання базуються на використанні диференціальних рівнянь, методів інтегрування, векторного аналізу та чисельних методів. Без глибокого розуміння математичного апарату виконання інженерних розрахунків стає формальним і не забезпечує необхідної точності.

В умовах аудиторного навчання складні теоретичні положення супроводжуються детальним поясненням викладача та графічними побудовами. У дистанційному форматі така взаємодія ускладнюється, що призводить до підвищення рівня абстракції та зниження якості первинного сприйняття матеріалу.

Аналіз досвіду дистанційного навчання дозволяє виокремити кілька ключових проблем.

По-перше, це обмеженість зворотного зв'язку. Відсутність миттєвої реакції аудиторії ускладнює виявлення моменту, коли група втрачає логіку математичних міркувань.

По-друге, труднощі з цифровим записом математичних виразів знижують ефективність комунікації. Складні формули, системи рівнянь та інтеграли важко оперативно вводити за допомогою стандартних засобів текстового спілкування.

По-третє, спостерігається когнітивне перевантаження. Велика кількість формул і доведень, поданих у вигляді статичних презентацій, зменшує концентрацію уваги та сприяє формуванню так званої «ілюзії розуміння», коли студент пасивно сприймає матеріал, але не здатен самостійно застосувати його під час виконання інженерних розрахунків.

Для подолання зазначених труднощів доцільним є впровадження комплексу практичних рекомендацій. Інструментальний аспект передбачає використання інтерактивних математичних середовищ та візуалізаторів [1], а також інтеграцію математичних розрахунків із системами автоматизованого проектування.

Застосування програмних засобів для побудови схем мостових елементів або моделювання геометрії дорожніх конструкцій дозволяє поєднати аналітичну формулу з її інженерною інтерпретацією [2].

Методологічний аспект пов'язаний з алгоритмізацією розв’язування задач. Перед виконанням розрахунку студент повинен визначити тип задачі, записати базові співвідношення, перевірити умови застосування формул та лише після цього переходити до числових обчислень. Такий підхід формує системність мислення та запобігає механічному копіюванню розв’язків.

Комунікативний аспект передбачає активну взаємодію у цифровому середовищі. Створення малих навчальних груп для спільного аналізу задач із розрахунку мостових прогонів або дорожніх конструкцій дозволяє відтворити атмосферу аудиторного обговорення та сприяє глибшому розумінню матеріалу.

Доцільним є розгляд дистанційного опанування класичної математики як трикомпонентної моделі навчального процесу. Перший компонент - теоретичний, що передбачає системне засвоєння понять, означень та математичних співвідношень. Другий - інженерно-прикладний, який полягає у перенесенні абстрактних формул у площину галузевих задач (розрахунок мостових конструкцій, аналіз напружено-деформованого стану дорожніх покриттів, моделювання навантажень на аеродромні споруди). Третій - цифровий, що забезпечує візуалізацію, перевірку та інтерпретацію результатів за допомогою сучасних програмних засобів. Взаємодія зазначених компонентів формує цілісне математичне мислення та зменшує ризик формального засвоєння матеріалу.

Висновки. Отже, дистанційне опанування класичної математики в технічному університеті є складним, але керованим процесом. Ефективність фундаментальної математичної підготовки визначається активною позицією здобувача, раціональним використанням цифрових інструментів та усвідомленням прикладного значення математичних методів у проектуванні та експлуатації мостів, доріг і аеродромних споруд.

Анотація. *У статті розглядаються основні проблеми дистанційного вивчення класичної математики здобувачами вищої освіти технічних спеціальностей. Проаналізовано труднощі, пов'язані з втратою зворотного зв'язку, цифровим записом математичних виразів та когнітивним перевантаженням. Особливу увагу приділено ролі фундаментальної математичної підготовки у формуванні професійних компетентностей майбутніх інженерів дорожньо-будівельної галузі. Запропоновано комплекс практичних рекомендацій щодо підвищення ефективності засвоєння математичних дисциплін у дистанційному форматі.*

Ключові слова: *дистанційне навчання, вища математика, інженерна підготовка, дорожнє будівництво, цифрові інструменти, самостійна робота.*

Література

1. Петрук, В. А., Клєопа, І. А. (2021). Дистанційне навчання вищої математики студентів технічного університету. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, (60), 290–299.
2. Кіяновська, Н. М. (2015). Використання систем комп'ютерної математики у процесі навчання вищої математики студентів технічних ВНЗ. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, (41), 337–342.

Приходько О. П. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Марчук Н. О. (здобувач бакалаврату, 1 курс),
Науковий керівник – доц. Михайленко І. В.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ДИСТАНЦІЙНА МАТЕМАТИКА ОЧИМА СТУДЕНТІВ: ВІД ТЕХНІЧНИХ БАР’ЄРІВ ДО КОГНІТИВНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

В умовах сучасної цифровізації освітнього процесу дистанційне навчання стало важливою складовою освітнього процесу, що особливо наглядно видно у викладанні математичних дисциплін. Саме онлайн-формат проведення лекційних та практичних занять, відкрив нові можливості для навчання, але при цьому виявив низку технічних та психолого-педагогічних проблем. Особливо гостро ці проблеми виявились у вивченні математики, яка потребує системності, високого рівня абстрактного мислення, а найголовніше – постійної взаємодії викладача зі студентом.

З огляду на проблематику цього питання необхідно зазначити таке. Освітній процес, організований з використанням цифрових технологій за умовами дистанційного навчання передбачає відсутність безпосереднього контакту студента та викладача. Однак, специфіка викладання математичної дисципліни передбачає окрім всього іншого поетапне пояснення матеріалу з постійною регулярною практикою та зворотнім зв’язком студента з викладачем. Саме тому, можна стверджувати, що просто перенести викладання математики до онлайн формату не дасть бажаного результату – потрібно саме адаптація його до цифрового середовища. [1]

Технічні бар'єри. Особливо гостро ця проблема постає перед студентом під час організації зв'язку: нестабільне з'єднання з мережею Інтернет, відсутність у студента належного забезпечення якісного обладнання та програмного забезпечення. Поряд з цим, доцільно зазначити, найбільш критичним аспектом є відсутність енергозабезпечення, що унеможливлює будь-яке онлайн-навчання взагалі. Перелічені проблеми безпосередньо є наслідком відсутності ефективності навчання та в подальшому можуть призвести до втрати матеріалу. [5]

Потрібно звернути увагу ще й на те, що на засвоєння математичного матеріалу студентом великий вплив має і недосконалість освітніх платформ. Сьогодні держава намагається прискорити розробку та впровадження програмного забезпечення, однак й досі існує досить багато неподоланих проблем: складність інтерфейсу (за відсутності спеціального методичного матеріалу користувачам досить важко користуватися освітніми платформами) відсутність інтерактивності (не має тісної взаємодії студента з матеріалом, викладачем та іншими студентами, наслідком чого є погане засвоєння матеріалу); постійні технічні збої під час проведення занять не дають змогу студенту згрупувати матеріал, визначити, що є важким у засвоєнні та потребує додаткового розгляду.

Дистанційний формат обмежує можливість ставити питання викладачу в реальному часі з отриманням оперативного зворотного зв'язку у тому числі під час опрацювання матеріалу у колективі. Особливо критичним це є для математики, оскільки пояснення «на місці» покращують розуміння матеріалу здобувачами.

Необхідно також врахувати проблему самостійного навчання студентів. Проведені нещодавно дослідження вказують, що до 40 % матеріалу здобувачі мають опанувати самостійно, при цьому більшість першокурсників не мають достатніх навичок для самоорганізації власного навчання. Наслідком цього є накопичення нерозуміння матеріалу, втрата мотивації для подальшого засвоєння, та формальне виконання завдань, без належного оформлення та розуміння.

Когнітивне навантаження. Навантаження, яке відчувають здобувачі, має свій негативний вплив і безпосередньо на когнітивні здібності студента: обсяг інформації, який може обробити його робоча пам'ять доволі швидко зменшується. До причин цього у дистанційному форматі можна віднести надлишок інформації у поєднанні з поганою структурованістю матеріалу та надмірним використанням різних каналів (текст, відео, графіка). До надмірного когнітивного навантаження здобувачів зокрема можна віднести наступне: довгі відео лекції, відсутність сегментації матеріалу, несуттєва, а іноді і навіть зайва інформація.

Тому ефективність дистанційного навчання можна досягти чітким структуруванням матеріалу, виділенням в ньому ключових елементів, та узгодження візуальної та вербальної частин інформації. [3]

Підвищене когнітивне навантаження призводить до швидкої втоми здобувача, студент втрачає концентрацію, що призводить до поверхневого засвоєння матеріалу. В подальшому останньому важко пригадати, що саме розглядалося на минулому занятті та прив'язати його до нового розглянутого матеріалу.

Переваги. Однак, поряд з негативними сторонами дистанційного навчання необхідно розглянути і позитивні. Онлайн-формат навчання дозволяє студентові вибудувати свій гнучкий графік навчання та забезпечує можливість повторного перегляду матеріалу (наприклад у проміжках між відсутністю електропостачання). Дистанційний формат надає здобувачу можливість доступу до великої кількості ресурсів для самонавчання, тим самим розвиваючи абстрактне та аналітичне мислення студента. За правильної організації процесу дистанційне навчання може бути ефективним, або навіть зрівнятися по ефективності з традиційним очним. [4]

Слід підкреслити, що шляхами подолання проблем з дистанційним навчанням є запровадження роботи стабільних освітніх платформ, що не залежать від зовнішніх чинників з одночасним належним рівнем доступу до Інтернету. Державі необхідно створити умови для гідного забезпечення здобувачів офісною технікою. Якщо розглянути це питання ще ширше, викладачеві необхідно забезпечити чітку адаптацію матеріалу до онлайн формату з використанням візуалізації та цікавими інтерактивними завданнями. Не зайвим буде і використання під час навчання математиці коротких відео сюжетів, що чітко узгоджуються зі структурою лекцій з поступовим ускладненням матеріалу для найкращого засвоєння.

Висновок. Дистанційне навчання математики є складним напрямом розвитку освіти, однак і найперспективнішим. Очима студентів такий вид навчання виглядає як баланс між технічними труднощами, організаційними викликами та когнітивним перевантаженням. Ефективність онлайн-формату залежить не лише від технологічного розвитку, а й від грамотного професійно-педагогічного погляду викладача, що враховує особливості сприйняття інформації кожним студентом окремо.

Анотація. *У статті розглянуто особливості дистанційного навчання математичних дисциплін очима студентів. Проаналізовано основні технічні бар'єри, зокрема нестабільність інтернет-з'єднання, недосконалість освітніх платформ та обмежений доступ до технічних засобів. Окрему увагу приділено проблемі відсутності інтерактивності та її впливу на ефективність засвоєння матеріалу. Досліджено вплив дистанційного формату на когнітивне навантаження студентів, визначено причини його зростання та наслідки для навчальної діяльності. Запропоновано можливі шляхи підвищення ефективності дистанційного навчання математики.*

Ключові слова: *дистанційне навчання, математична освіта, когнітивне навантаження, інтерактивність, онлайн-освіта, освітні платформи, технічні бар'єри.*

Література

1. Петрук В.А., Клєопа І.А., Дубова Н.Б. *Проблеми математичної дистанційної освіти студентів.* - URL: http://ir.lib.vntu.edu.ua
2. Petruk V. et al. *Distance learning of higher mathematics in technical universities.* - URL: https://www.researchgate.net/
3. Шишенко І. *Використання відео в дистанційному навчанні.* - URL: oip-journal.org

4. Драгієва Л.В. *Особливості дистанційного навчання математики*. - URL: academy-vision.org
5. Lytvynova S., Demeshkant N. *Distance learning during COVID-19*. URL: arxiv.org
6. Гриб'юк О.О. *Комп'ютерно орієнтоване середовище навчання.* URL: lib.iitta.gov.ua.

Наукове видання

ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТЕМАТИЧНА ПІДГОТОВКА В ГАЛУЗЕВОМУ УНІВЕРСИТЕТІ : МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених

27 березня 2026 року

Відповідальний за випуск *Ємельянова Т.В.*

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка *Купіної Н.А.*

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61200, Харків-МСП, вул. Ярослава Мудрого, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-72; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія № ДК №897 від 17.04 2

Для нотаток